THE LIBRARY OF CONGRESS
1800

Class AS182
Book .B35

SMITHSONIAN DEPOSIT

6

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

1538
3911
Pat 41

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

JAHRGANG 1929

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE KLASSE

VERZEICHNIS DER MITGLIEDER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN AM 1. JANUAR 1929
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES JAHRESTAGES KÖNIG FRIEDRICHS II. AM 24. JANUAR 1929
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES LEIBNIZISCHEN JAHRESTAGES AM 4. JULI 1929
VERZEICHNIS DER VOM 1. DEZEMBER 1928 BIS 30. NOVEMBER 1929 EINGEGANGENEN DRUCKSCHRIFTEN

STÜCK I—XXXIII. MIT ELF TAFELN

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

AS182
.B35

INHALT

Seite

Verzeichnis der Mitglieder der Akademie der Wissenschaften am 1. Januar 1929 . . I
Öffentliche Sitzung zur Feier des Jahrestages König Friedrichs II. am 24. Januar 1929 XVII
Heymann: Ansprache: »Das Friderizianische Handelsrecht« XVII
Heymann: Personalveränderungen XL
Hesse: Bericht über das »Tierreich« XL
Schulze: Bericht über die mundartlichen Wörterbücher XLIV
Hahn: Atomumwandlungen und ihre Bedeutung für Chemie und Physik LII
Heymann: Schlußwort LX
Jahresbericht über die griechisch-römische Altertumskunde LX
Jahresbericht über die Sammlung der griechischen Inschriften LX
Jahresbericht über die Sammlung der lateinischen Inschriften LXI
Jahresbericht über das griechische Münzwerk LXII
Jahresbericht über die Prosopographia imperii Romani saec. I—III LXII
Jahresbericht über das Militärwesen der römischen Kaiserzeit LXIII
Jahresbericht über die Preußische Kommission LXIII
Jahresbericht über die Herausgabe der Werke von Weierstrass LXIV
Jahresbericht über die Kant-Ausgabe LXIV
Jahresbericht über die Ibn-Saad-Ausgabe LXIV
Jahresbericht über das Wörterbuch der ägyptischen Sprache LXV
Jahresbericht über das Tierreich und den Nomenclator animalium generum et subgenerum LXV
Jahresbericht über das »Pflanzenreich« LXVI
Jahresbericht über die Geschichte des Fixsternhimmels LXVI
Jahresbericht der Kommission für die Herausgabe der »Gesammelten Schriften Wilhelm von Humboldts« LXVII
Jahresbericht über die Leibniz-Ausgabe LXVIII
Jahresbericht über das Corpus Medicorum Graecorum LXVIII
Jahresbericht der Deutschen Kommission LXIX
Jahresbericht über die Forschungen zur neuhochdeutschen Sprach- und Bildungsgeschichte LXXX
Jahresbericht der Orientalischen Kommission LXXXI
Jahresbericht der Spanischen Kommission LXXXIV
Jahresberich der Kronecker-Kommission LXXXIV
Jahresbericht der Oskar-Mann-Nachlaß-Kommission LXXXIV
Jahresbericht des Vocabularium Jurisprudentiae Romanae LXXXV
Jahresbericht über das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik LXXXV
Jahresbericht der Hermann-und-Elise-geb.-Heckmann-Wentzel-Stiftung LXXXVI
Jahresbericht der akademischen Kommission für das Wörterbuch der deutschen Rechtssprache LXXXVI
Jahresbericht der Kirchenväter-Kommission LXXXIX
Jahresbericht über die Bearbeitung der Flora von Papuasien und Mikronesien XC
Jahresbericht über die Texte zur Geschichte des römischen und kanonischen Rechts im Mittelalter XC
Jahresbericht über die Erforschung der Geschichte unserer Nationalitätsgrenze (Forschungen zum Deutschtum der Ostmarken) XC
Jahresbericht über das Deutsche Biographische Jahrbuch XCI
Jahresbericht über die germanisch-slawische Altertumsforschung XCII
Öffentliche Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages am 4. Juli 1929 . . . XCIII
Lüders: Ansprache XCIII
Schrödinger: Antrittsrede C
Planck: Erwiderung CII
Brackmann: Gedächtnisrede auf Dietrich Schäfer CIV
Fick: Gedächtnisrede auf Franz Keibel CVII
Akademische Preisaufgabe für 1929 CXXII
Verleihung der Leibniz-Medaillen CXXIII
Lüders: Schlußwort CXXV
Verzeichnis der vom 1. Dezember 1928 bis 30. November 1929 eingegangenen Druckschriften CXXVII

1143 31 / 32 / VIII

Inhalt

	Seite
Einstein: Zur einheitlichen Feldtheorie	2
Planck: Über die Potentialdifferenz verdünnter Lösungen. (Zweite Mitteilung)	9
Ostwald: Grundsätzliches zur messenden Farbenlehre. Erster Teil	14
Hesse: Die Stufenleiter der Organisationshöhe der Tiere	27
Carathéodory: Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen	39
G. Pólya: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. (Dritte Mitteilung)	55
Ludendorff: Untersuchungen über die δ Cephei-Sterne	64
A. Marx: Zwei Sätze über schlichte Funktionen	96
K. F. Bonhoeffer und P. Harteck: Experimente über Para- und Orthowasserstoff	103
Wagner: Plan einer Fernsprechkabelverbindung zwischen Europa und Amerika	109
Schur: Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. I	125
T. Levi-Civita: Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen	137
Einstein: Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip	156
Haber: Über die Rolle der Elektrizitätsträger bei der Explosion brennbarer Gase im Gemische mit Luft	162
G. D. Birkhoff: Divergente Reihen und singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen	171
Penck: Geomorphologische Probleme im Fernen Westen Nordamerikas	187
G. Hoheisel: Über das Verhalten des reziproken Wertes der Riemannschen ζ-Funktion	219
v. Laue: Über eine röntgenographische Methode, Größe und Form ultramikroskopischer krystalliner Teilchen zu bestimmen	227
Ludendorff: Über den sogenannten 61 Cygni-Sternstrom	229
Adresse an Hrn. Friedrich Küstner zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 15. Mai 1929	242
Zimmermann: Besonderes vom Knicken	245
Study: Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre	255
Landau: Bemerkungen zu einer Arbeit von Hrn. Hoheisel über die Zetafunktion	271
A. Ostrowski: Über Schwankungen analytischer Funktionen, die gegebene Werte nicht annehmen	276
v. Ficker: Der Sturm in Norddeutschland am 4. Juli 1928	290
Haberlandt: Über Regenerationsvorgänge bei *Bryopsis* und *Codium*	327
Adresse an Hrn. Max Planck zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. Juni 1929	341
Rubner: Alte und neue Irrwege auf dem Gebiete der Volksernährung	343
Bodenstein: Der durch Chlor katalysierte Zerfall des Ozons	367
Schur: Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. II	370
H. Liebmann: Elementarer Beweis des Fenchelschen Satzes über die Krümmung geschlossener Raumkurven	392
Th. Vahlen: Zur Partition der Zahlen	394
E. Hopf: Über die geschlossenen Bahnen in der Mondtheorie	401
Koebe: Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Vierte Mitteilung: Verlauf geodätischer Linien)	414
Fick: Über die Arbeitsleistung der Schultergelenkmuskeln	458
Adresse an Hrn. Heinrich Finke zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. August 1929	488
Adresse an Hrn. Rudolf Thurneysen zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 17. September 1929	490
Johnsen: Über den β-Salmiak und verwandte Kristallarten	492
Hofmann: Beiträge zur Kenntnis des Schwarzpulvers	509
M. Schmidt: Neue Funde in der iberisch-balearischen Trias	516
G. Hoheisel: Zur Theorie der komplexen Zahlen	524
Hahn: Die radioaktiven Substanzen im Dienste chemischer und physikalisch-chemischer Forschung	535
J. G. Hagen S. J.: Weiteres zur Geschichte des Nebels »Barnard 86«	543
Adresse an Hrn. Otto von Zallinger zum goldenen Doktorjubiläum am 20. Oktober 1929	546
P. Krüger: Über die Verdauungsfermente der Wirbellosen	548
H. Bohr: Über ganze transzendente Funktionen von einem besonderen Typus. (Beispiel einer allgemeinen Konstruktionsmethode	565
C. Wirtz: Experimentelles zur Photometrie des Rotationsellipsoids	574
E. Ullrich: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion	592
Bieberbach: Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen	612
Bieberbach: Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen	620
Warburg: Über die Photolyse der Lösungen von Schwefelwasserstoff in Hexan und in Wasser. Nach Versuchen mit Dr. Rump	624
R. Brauer: Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe	626
M. J. Belinfante: Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen	639
Paschen: Lymans Heliumlinien	662
Schrödinger: Verwaschene Eigenwertspektra	668
Adresse an Hrn. Bruno Krusch zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 29. November 1929	685
Namen- und Sachregister	688

1929 I. II

Library of Congress
AUG 7 1929
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 10. Januar. (S. 1)
EINSTEIN: Zur einheitlichen Feldtheorie. (S. 2)
Gesamtsitzung am 17. Januar. (S. 8)
PLANCK: Über die Potentialdifferenz verdünnter Lösungen. (Zweite Mitteilung.) (S. 9)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

I. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 10. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Hesse sprach über die Stufenleiter der Organisationshöhe der Tiere. (Ersch. später.)

In physiologisch-anatomischer Betrachtungsweise werden die Fortschritte vom Protisten zum Metazoon, die Intensivierung der Arbeitsteilung, das Diffusionsproblem bei den Plattwürmern, die »Erfindung« des Kopfes, des Blutgefäßsystems, des Afters und der Leibeshöhle in ihrer Auswirkung auf die Gesamtorganisation und schließlich der mit der mechanischen Vorbereitung der Nahrung zusammenhängende Erwerb der Eigenwärme besprochen.

2. Hr. Einstein überreichte eine Abhandlung: Zur einheitlichen Feldtheorie.

Gewisse Differentialeigenschaften eines Kontinuums, das durch Riemann-Metrik und Fernparallelismus charakterisiert ist, werden abgeleitet. Es werden dann Feldgleichungen aufgestellt, welche einerseits mit diesen Differentialeigenschaften eng zusammenhängen und andererseits in erster Näherung mit den bekannten Feldgesetzen der Elektrizität und Gravitation übereinstimmen.

3. Hr. Schur legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. G. Pólya in Zürich vor: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. (Dritte Mitteilung.) (Ersch. später.)

Mit Hilfe eines neuen Satzes über den transfiniten Durchmesser einer beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge mit zusammenhängendem Komplementärgebiet beweist der Verfasser: Wird ein zusammenhängendes Gebiet, das den Punkt $z = \infty$ enthält und die $2m$ Punkte

$$ae^{\frac{2\lambda\pi i}{m}}, \quad be^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{m}} \qquad (a, b > 0, \quad \lambda = 0, 1, \cdots, m-1)$$

nicht enthält, auf das Äußere eines Kreises so abgebildet, daß der Punkt $z = \infty$ und das Linienelement daselbst festbleiben, so ist der Radius des betreffenden Kreises mindestens $\left(\frac{a^m + b^m}{4}\right)^{\frac{1}{m}}$. Für ein gewisses Schlitzgebiet wird dieser Wert erreicht.

Zur einheitlichen Feldtheorie.

Von A. Einstein.

In zwei jüngst erschienenen Abhandlungen[1] habe ich zu zeigen versucht, daß man zu einer einheitlichen Theorie der Gravitation und Elektrizität dadurch gelangen könne, daß man dem vierdimensionalen Kontinuum außer einer Riemann-Metrik noch den »Fernparallelismus« als Eigenschaft zuschreibt. In der Tat gelang es auch, dem Gravitationsfelde und dem elektromagnetischen Felde eine einheitliche Deutung zu geben. Dagegen führte die Ableitung der Feldgleichung aus dem Hamiltonschen Prinzip auf keinen einfachen und völlig eindeutigen Weg. Diese Schwierigkeiten verdichteten sich bei genauerer Überlegung. Es gelang mir aber seitdem, einen befriedigenden Weg zur Ableitung der Feldgleichungen zu finden, den ich im folgenden mitteile.

§ 1. Formale Vorbereitungen.

Ich benutze die Bezeichnungen, welche neulich Hr. Weitzenböck in seiner Arbeit über den Gegenstand vorgeschlagen hat[2]. Die ν-Komponente des s-ten Beins des n-Beins wird also mit ${}_s h^\nu$ bezeichnet, mit ${}^s h_\nu$ die zugehörigen normierten Unterdeterminanten. Die lokalen n-Beine sind alle »parallel« gestellt. Parallele und gleiche Vektoren sind solche, welche — auf ihr lokales n-Bein bezogen — gleiche Koordinaten haben. Die Parallelverschiebung eines Vektors wird durch die Formel

$$\delta A^\mu = -\Delta^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta = -{}_s h^\mu \, {}^s h_{\alpha,\beta} A^\alpha \delta x^\beta$$

gegeben, wobei in ${}^s h_{\alpha,\beta}$ das Komma andeuten soll, das nach x^β im gewöhnlichen Sinne differenziert werden soll. Der aus den (in α und β nicht symmetrischen) $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$ gebildete »Riemannsche Krümmungstensor« verschwindet identisch.

Als »kovariante Differentation« verwenden wir nur jene, welche mittels der Δ gebildet ist. Sie sei nach der Gepflogenheit der italienischen Mathematiker durch ein Semikolon bezeichnet, also

$$A_{\mu;\sigma} \equiv A_{\mu,\sigma} - A_\alpha \Delta^\alpha_{\mu\sigma}$$
$$A^\mu_{;\sigma} \equiv A^\mu_{,\sigma} + A^\alpha \Delta^\mu_{\alpha\sigma}$$

Da die ${}^s h_\nu$ sowie die $g_{\mu\nu}$ ($\equiv {}^s h_\mu \, {}^s h_\nu$) und die $g^{\mu\nu}$ verschwindende kovariante Ableitungen haben, können diese Größen als Faktoren mit dem kovarianten Differentiationszeichen beliebig vertauscht werden.

[1] Diese Berichte VIII. 28 und XVII. 28.
[2] Diese Berichte XXVI. 28.

Von der bisherigen Bezeichnungsweise weiche ich dadurch ab, daß ich den Tensor Λ $\left(\text{unter Weglassung des Faktors } \frac{1}{2}\right)$ durch die Gleichung

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\nu\mu}$$

definiere.

Der Hauptunterschied gegen die geläufigen Formeln des absoluten Differentialkalküls, welchen die Einführung eines unsymmetrischen Verschiebungsgesetzes mit sich bringt, liegt in der Divergenzbildung. Es sei $T^{\cdots\sigma}_{\cdots}$ ein beliebiger Tensor mit dem oberen Index σ. Seine kovariante Ableitung lautet, wenn wir nur das auf den Index σ bezügliche Ergänzungsglied hinschreiben,

$$T^{\cdots\sigma}_{\cdots;\tau} \equiv \frac{\partial \mathfrak{T}^{\cdots\sigma}_{\cdots}}{\partial x_\tau} + \cdots + T^{\cdots\alpha}_{\cdots}\Delta^{\sigma}_{\alpha\tau}.$$

Multipliziert man die Gleichung mit der Determinante h, nachdem man sie nach σ und τ verjüngt hat, so erhält man nach Einführung der Tensordichte $\mathfrak{T}$ auf der rechten Seite

$$h\,T^{\cdots\sigma}_{\cdots;\sigma} \equiv \frac{\partial\, T^{\cdots\sigma}_{\cdots}}{\partial x^\tau} + \cdots + \mathfrak{T}^{\cdots\alpha}_{\cdots}\Lambda^{\sigma}_{\alpha\tau}.$$

Das letzte Glied der rechten Seite fehlt, wenn das Verschiebungsgesetz symmetrisch ist. Es ist selbst eine Tensordichte, ebenso daher auch die übrigen Glieder der rechten Seite zusammen, welche wir in Übereinstimmung mit der üblichen Bezeichnungsweise als die Divergenz der Tensordichte $\mathfrak{T}$ bezeichnen und

$$\mathfrak{T}^{\cdots\sigma}_{\cdots/\sigma}$$

schreiben wollen. Man erhält dann

$$h\,T^{\cdots\sigma}_{\cdots;\sigma} \equiv \mathfrak{T}^{\cdots\sigma}_{\cdots/\sigma} + \mathfrak{T}^{\cdots\alpha}_{\cdots}\Lambda^{\sigma}_{\alpha\sigma}. \qquad (1)$$

Endlich wollen wir noch eine Bezeichnung einführen, die — wie mir scheint — die Übersichtlichkeit erhöht. Ich will manchmal das Heraufziehen bzw. Hinunterziehen eines Index dadurch andeuten, daß ich den betreffenden Index unterstreiche. Ich bezeichne also z. B. mit $(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}})$ dem zu $(\Lambda^{\sigma}_{\mu\nu})$ gehörigen rein kontravarianten, mit $(\Lambda^{\underline{\sigma}}_{\mu\nu})$ den zu $(\Lambda^{\sigma}_{\mu\nu})$ gehörigen rein kovarianten Tensor.

§ 2. Ableitung einiger Identitäten.

Das Verschwinden der »Krümmung« wird durch die Identität

$$0 \equiv -\Delta^{i}_{kl,\,m} + \Delta^{i}_{km,\,l} + \Delta^{i}_{\sigma l}\Delta^{\sigma}_{km} - \Delta^{i}_{\sigma m}\Delta^{\sigma}_{kl} \qquad (2)$$

ausgedrückt. Diese Identität benutzen wir, um eine solche abzuleiten, welcher der Tensor Λ genügt. Man bilde die beiden Gleichungen, welche aus (1) durch zyklische Verschiebung der Indizes klm entstehen und addiere die drei Gleichungen. Dann erhält man durch passende Zusammenfassung unmittelbar die Identität

$$0 \equiv (\Lambda^{i}_{kl,\,m} + \Lambda^{i}_{lm,\,k} + \Lambda^{i}_{mk,\,l}) + (\Delta^{i}_{\sigma k}\Lambda^{\sigma}_{lm} + \Delta^{i}_{\sigma l}\Lambda^{\sigma}_{mk} + \Delta^{i}_{\sigma m}\Lambda^{\sigma}_{kl}),$$

Diese Gleichung formen wir dadurch um, daß wir statt der gewöhnlichen Ableitungen des Λ die kovarianten Ableitungen einführen. So ergibt sich nach passender Zusammenfassung der Glieder mühelos die Identität

$$0 \equiv (\Lambda^i_{kl;\,m} + \Lambda^i_{lm;\,k} + \Lambda^i_{mk;\,l}) + (\Lambda^i_{k\alpha}\,\Lambda^\alpha_{lm} + \Lambda^i_{l\alpha}\,\Lambda^\alpha_{mk} + \Lambda^i_{m\alpha}\,\Lambda^\alpha_{kl}) \qquad (3)$$

Dies ist eben die Bedingung dafür, daß sich die Λ in der angegebenen Weise durch die h ausdrücken lassen.

Durch einmaliges Verjüngen von (3) erhält man, indem man für $\Lambda_{\mu\,\alpha}^{\ \ \alpha}$ der Kürze halber ϕ_μ setzt, die für das Folgende wichtige Identität

$$0 \equiv \Lambda^\alpha_{kl;\,\alpha} + \phi_{l;\,k} - \phi_{k;\,l} - \phi_\alpha\,\Lambda^\alpha_{kl}\,. \qquad (3\,a)$$

Diese formen wir noch um, indem wir die in k und l antisymmetrische Tensordichte

$$\mathfrak{V}^\alpha_{kl} = h\,(\Lambda^\alpha_{kl} + \phi_l\,\delta^\alpha_k - \phi_k\,\delta^\alpha_l) \qquad (4)$$

einführen. (3a) geht dann in die einfache Form über

$$(\mathfrak{V}^\alpha_{kl})_{|\alpha} \equiv 0 \qquad (3\,b)$$

Die Tensordichte $\mathfrak{V}^\alpha_{kl}$ erfüllt noch eine zweite Identität, welche für das Folgende von Bedeutung ist. Wir stützen uns zu deren Ableitung auf folgendes Vertauschungsgesetz der Divergenzbildungen bei Tensordichten von beliebigem Range:

$$\mathfrak{A}_{\cdot\,\cdot\,|i|k}^{\cdot\,\cdot\,ik} - \mathfrak{A}_{\cdot\,\cdot\,|k|i}^{\cdot\,\cdot\,ik} \equiv -(\mathfrak{A}_{\cdot\,\cdot}^{\cdot\,\cdot\,ik}\,\Lambda^\sigma_{ik})_{|\sigma}\,. \qquad (5)$$

Die Punkte bei $\mathfrak{A}$ bedeuten beliebige Indizes, die in allen drei Gliedern der Gleichung dieselben sind, nämlich diejenigen, welche bei den Divergenzbildungen nicht betroffen werden.

Der Beweis von (5) stützt sich außer auf die Definitionsformel

$$\mathfrak{A}_{\tau\,\cdot\,\cdot\,|i}^{\sigma\,\cdot\,\cdot\,i} = \mathfrak{A}_{\tau\,\cdot\,\cdot\,,i}^{\sigma\,\cdot\,\cdot\,i} + \mathfrak{A}_{\tau\,\cdot\,\cdot}^{\alpha\,\cdot\,\cdot\,i}\,\Delta^\sigma_{\alpha i}\cdots - \mathfrak{A}_{\alpha\,\cdot\,\cdot}^{\sigma\,\cdot\,\cdot\,i}\,\Delta^\alpha_{\sigma i}\cdots \qquad (6)$$

insbesondere auf die Identität (2). Gleichung (5) hängt eng zusammen mit dem Vertauschungsgesetz der kovarianten Differentiation, das ich der Vollständigkeit halber ebenfalls angeben will. Sei T ein beliebiger Tensor, dessen Indizes ich der Bequemlichkeit halber weglasse, so gilt

$$T_{;\,i;\,k} - T_{;\,k;\,i} \equiv -T_{;\,\sigma}\,\Lambda^\sigma_{ik}\,. \qquad (7)$$

Von der Identität (5) machen wir nun Anwendung auf die Tensordichte $\mathfrak{V}^\alpha_{\underline{k}\,\underline{l}}$, deren untere Indizes wir heraufgezogen denken. Wir finden so als einzige nicht triviale Identität

$$\mathfrak{V}^\alpha_{\underline{k}\,\underline{l}|l|\alpha} - \mathfrak{V}^\alpha_{\underline{k}\,\underline{l}|\alpha|l} \equiv -(\mathfrak{V}^\alpha_{\underline{k}\,\underline{l}}\,\Lambda^\sigma_{l\alpha})_{|\sigma}\,,$$

welche man mit Rücksicht auf (3b) auf die Form bringen kann

$$(\mathfrak{V}^\alpha_{\underline{k}\,\underline{l}|l} - \mathfrak{V}^\sigma_{\underline{k}\,\underline{\tau}}\,\Lambda^\alpha_{\sigma\,\tau})_{|\alpha} \equiv 0\,. \qquad (8)$$

§ 3. Die Feldgleichungen.

Nachdem ich die Identität (3b) entdeckt hatte, war es mir klar, daß bei einer natürlichen einschränkenden Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit von der ins Auge gefaßten Art die Tensordichte $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl}$ eine wichtige Rolle spielen müsse. Da deren Divergenz $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|a}$ identisch verschwindet, war es der nächstliegende Gedanke, die Forderung aufzustellen (Feldgleichungen), daß auch die andere Divergenz $\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|l}$ verschwinden solle. So gelangt man in der Tat zu Gleichungen, die in erster Näherung das bekannte Vakuumfeldgesetz der Gravitation liefern, wie es aus der bisherigen allgemeinen Relativitätstheorie bekannt ist.

Dagegen ergab sich so keine Vektorbedingung für die ϕ_α, derart, daß alle ϕ_α mit verschwindender Divergenz mit jenen Feldgleichungen vereinbar waren. Dies beruht darauf, daß in erster Näherung (wegen Vertauschbarkeit des gewöhnlichen Differenzierens) die Identität

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|l|\alpha} \equiv \mathfrak{B}^{\alpha}_{\underline{kl}|\alpha|l}$$

besteht, die Größe auf der rechten Seite aber wegen (3b) identisch verschwindet. Dadurch entfallen nämlich 4 Gleichungen des Systems $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|l} = 0$.

Ich erkannte aber, daß diesem Mangel leicht abgeholfen werden konnte, indem man statt des Verschwindens von $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|\alpha}$ die Gleichung

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl|l} = 0$$

postuliert, in welcher $\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl}$ den von $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl}$ beliebig wenig abweichenden Tensor

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl} = \mathfrak{B}^{\alpha}_{kl} - \varepsilon h(\phi_l \delta^{\alpha}_{k} - \phi_k \delta^{\alpha}_{l}) \qquad (9)$$

bedeutet[1]. Dann erhält man nämlich gerade die MAXWELLschen Gleichungen (alles in erster Näherung), wenn man die Divergenz der Feldgleichungen (nach dem Index α) bildet. Daneben erhält man — indem man zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergeht — nach wie vor die Gleichungen $\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|l} = 0$, welche eben in erster Näherung das richtige Gravitationsgesetz liefern.

Die Feldgleichungen der Elektrizität und Gravitation werden also in erster Näherung durch den Ansatz

$$\overline{\mathfrak{B}}^{\alpha}_{kl|l} = 0$$

richtig geliefert mit der zuzüglichen Bedingung, daß zum Limes $\varepsilon = 0$ überzugehen ist. Dabei bringt es das Bestehen der (in erster Näherung gültigen) Identität

$$\mathfrak{B}^{\alpha}_{kl|l|\alpha} \equiv 0 \qquad (8a)$$

mit sich, daß in den Feldgleichungen der ersten Näherung eine Scheidung der Gesetze für Gravitation einerseits, Elektrizität anderseits auftritt, welche Trennung ja einen so charakteristischen Zug der Natur darstellt.

---

[1] Es ist dies ja die Methode, die immer angewendet wird, um in singulären Fällen auftretende Degenerationen aufzuheben.

Es galt nun, jene an der ersten Näherung gewonnene Erkenntnis für die strenge Betrachtung nutzbar zu machen. Es ist klar, daß wir auch hier von einer Identität auszugehen haben, welche (8a) entspricht. Dies ist offenbar die Identität (8), zumal beide Identitäten außer auf (3b) auf einem Vertauschungssatz der Differentiationsoperationen beruhen.

Wir haben also als Feldgleichungen

$$\overline{\mathfrak{V}}^{\alpha}_{\underline{k}\underline{l}/l} - \overline{\mathfrak{V}}^{\sigma}_{\underline{k}\underline{\tau}} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0 \tag{10}$$

anzusetzen, mit der Vorschrift, nachträglich (d. h. nach Vornahme der Operation »$/\alpha$«) zu $\varepsilon = 0$ überzugehen. Man erhält so, wenn man die linke Seite von (10) mit $\mathfrak{G}^{k\alpha}$ bezeichnet, die Feldgleichungen

$$\mathfrak{G}^{k\alpha} = 0, \tag{10a}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \overline{\mathfrak{G}}^{kl}{}_{/l} = 0. \tag{10b}$$

(10b) liefert mit Rücksicht auf (8) und (9) zunächst

$$\left\{[h(\phi_{\underline{k}}\delta^{\alpha}_{l} - \phi_{\underline{l}}\delta^{\alpha}_{k})]_{/l} - h(\phi_{\underline{k}}\delta^{\sigma}_{\underline{\tau}} - \phi_{\tau}\delta^{\sigma}_{k})\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}\right\}_{/\alpha} = 0.$$

Wir führen nun vorübergehend zur Abkürzung die Tensordichte

$$\mathfrak{W}^{\alpha}_{kl} = h(\phi_k \delta^{\alpha}_{l} - \phi_l \delta^{\alpha}_{k})$$

ein. Gemäß (5) ist

$$\mathfrak{W}^{\alpha}_{\underline{k}\underline{l}/l/\alpha} = \mathfrak{W}^{\alpha}_{\underline{k}\underline{l}/\alpha/l} - (\mathfrak{W}^{\alpha}_{\underline{k}\underline{l}}\Lambda^{\sigma}_{l\alpha})_{/\sigma},$$

so daß die auszurechnende Gleichung auch in der Form

$$(\mathfrak{W}^{l}_{\underline{k}\,\underline{\alpha}/l} - \mathfrak{W}^{\sigma}_{\underline{k}\underline{l}}\Lambda^{\alpha}_{l\tau} - \mathfrak{W}^{\sigma}_{\underline{k}\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{/\alpha} = 0$$

geschrieben werden kann, in welcher Gleichung sich die beiden letzten Glieder wegheben. Durch unmittelbare Ausrechnung ergibt sich

$$\mathfrak{W}^{l}_{\underline{k}\,\underline{\alpha}/l} \equiv h(\phi_{\underline{k};\,\underline{\alpha}} - \phi_{\underline{\alpha};\,\underline{k}}).$$

Die umgeformten Gleichungen (10b) lauten also

$$[h(\phi_{\underline{k};\,\underline{\alpha}} - \phi_{\underline{\alpha};\,\underline{k}})]_{/\alpha} = 0, \tag{11}$$

welches Gleichungssystem zusammen mit

$$\mathfrak{V}^{\alpha}_{\underline{k}\underline{l}/l} - \mathfrak{V}^{\sigma}_{\underline{k}\underline{\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0 \tag{10a}$$

das vollständige System der Feldgleichungen bildet.

Wären wir statt von (10) direkt von (10a) ausgegangen, so hätten wir die »elektromagnetischen« Gleichungen (11) nicht erhalten. Auch würden wir keinen Anhaltspunkt dafür haben, daß die Systeme (11) und (10a) miteinander vereinbar sind. So aber scheint es sicher zu sein, daß diese Gleichungen miteinander verträglich sind, da die ursprünglichen Gleichungen (10) sechzehn Bedingungen für die sechzehn Größen ${}^{s}h_{\mu}$ sind. Zwischen diesen sechzehn Gleichungen (10) bestehen notwendig 4 Identitäten wegen der allgemeinen Kovarianz dieser Gleichungen. Zwischen den 20 Feldgleichungen (11), (10a) bestehen also im ganzen 8 identische Relationen, von denen im Text allerdings nur 4 explizite angegeben sind.

Daß die Gleichungen (10a) in erster Näherung die Gravitationsgleichungen enthalten, die Gleichungen (11) (in Verbindung mit der Existenz eines Potentialvektors) die MAXWELLschen Gleichungen für das Vakuum, ist schon gesagt worden. Ich habe auch zeigen können, daß umgekehrt zu jeder Lösung dieser Gleichungen ein den Gleichungen (10a) genügendes h-Feld existiert[1]. Durch Verjüngung der Gleichungen (10a) erhält man eine Divergenzbedingung für das elektrische Potential

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{f}^{l}_{\mu} - \frac{1}{2}\mathfrak{B}^{\sigma}_{k\tau}\Lambda^{k}_{\sigma\tau} = 0 \\ &(2\mathfrak{f}^{l} = \mathfrak{B}^{\alpha}_{\alpha l} = 2h\phi^{l}) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Eine tiefere Untersuchung der Konsequenzen der Feldgleichungen (11), (10a) wird zu zeigen haben, ob die RIEMANN-Metrik in Verbindung mit dem Fernparallelismus wirklich eine adäquate Auffassung der physikalischen Qualitäten des Raumes liefert. Nach dieser Untersuchung ist es nicht unwahrscheinlich.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Dr. H. MÜNTZ für die mühsame strenge Berechnung des zentralsymmetrischen Problems auf Grund des HAMILTONschen Prinzips zu danken; durch die Ergebnisse jener Untersuchung wurde mir die Auffindung des hier beschrittenen Weges nahegebracht. Ebenso danke ich an dieser Stelle dem »Physikalischen Fond«, welcher mir es während der letzten Jahre ermöglicht hat, einen Forschungsassistenten in der Person des Hrn. Dr. GROMMER anzustellen.

Nachtrag zur Korrektur. Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Feldgleichungen sind formal gegenüber sonst denkbaren so zu kennzeichnen. Es ist durch Anlehnung an die Identität (8) erreicht worden, daß die (16) Größen ${}^{s}h_{\nu}$ nicht nur 16, sondern 20 selbständigen Differentialgleichungen unterworfen werden können. Unter »selbständig« ist dabei verstanden, daß keine dieser Gleichungen aus den übrigen gefolgert werden kann, wenn auch zwischen ihnen 8 identische (Differentiations-) Relationen bestehen.

[1] Dies alles nur, soweit es sich um die linearen Gleichungen der ersten Approximation handelt.

Ausgegeben am 30. Januar.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

II. Gesamtsitzung. 17. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Planck sprach über die Potentialdifferenz verdünnter Lösungen. (Zweite Mitteilung.)

Es wird eine Formel aufgestellt, welche den Größenunterschied der nach der Theorie von Henderson und der nach der Theorie des Verfassers berechneten Potentialdifferenz in gewisser Annäherung zu erkennen gestattet, und hierauf eine Versuchsanordnung angegeben, welche für eine messende Vergleichung der beiderseitigen Werte besonders geeignet erscheint.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. von Zallinger übersandte seine Arbeit »Heirat ohne Trauung im Nibelungenlied und in der Gudrun« (Sonderabdr. Innsbruck 1928).

3. Vorgelegt wurden folgende Veröffentlichungen der Akademie: »Deutsches Wörterbuch« von Jacob Grimm und Wilhelm Grimm, Bd. XI, 3, Lief. 12 (Leipzig 1928), »Rheinisches Wörterbuch «Lief. 18 (Bd. II, 4) (Bonn 1929) und »Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik« Bd. 49, Jahrg. 1923 (Berlin und Leipzig 1928),

4. ferner von der vom Kartell der Deutschen Akademien herausgegebenen »Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften« Bd. III, 2 Heft 10 (Leipzig 1928) und

5. das mit Unterstützung der Akademie veröffentlichte Werk von Curt Jany, Geschichte der Königlich Preußischen Armee bis zum Jahre 1807, 3 Bde. (Berlin 1928/29).

Die Akademie hat ihr ordentliches Mitglied Hrn. Dietrich Schäfer am 12. Januar durch den Tod verloren.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Johannes von Kries in Freiburg am 30. Dezember 1928 durch den Tod verloren.

Die Akademie hat die HH. Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Adolf Schmidt in Gotha und Prof. Dr. Hugo Junkers in Dessau zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Über die Potentialdifferenz verdünnter Lösungen.

(Zweite Mitteilung.)

Von MAX PLANCK.

§ 1. In einer vorangehenden Mitteilung[1] habe ich den prinzipiellen Unterschied der beiden Formeln besprochen, welche einerseits von P. HENDERSON[2], anderseits von mir[3] für die Größe der Potentialdifferenz zwischen zwei unendlich verdünnten Lösungen aufgestellt worden sind.

Bezeichnet man mit $c', c'', c''', \cdots; u', u'', u''', \cdots$ die Konzentrationen und Beweglichkeiten der positiven Ionen, mit $\bar{c}', \bar{c}'', \bar{c}''', \cdots; v', v'', v''', \cdots$ die entsprechenden Größen für die negativen Ionen, wobei

$$c' + c'' + c''' + \cdots = \bar{c}' + \bar{c}'' + \bar{c}''' + \cdots = c, \tag{1}$$

und setzt zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} u'c' + u''c'' + \cdots &= U \\ v'c' + v''\bar{c}'' + \cdots &= V, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

so ist, wenn R die absolute Gaskonstante, T die Temperatur, ε die Ladung eines der hier stets als einwertig angenommenen gr.-Ionen bedeutet, die Potentialdifferenz $\phi_2 - \phi_1 = E$ zweier sich berührender Lösungen 1 und 2 nach HENDERSON:

$$E_H = \frac{RT}{\varepsilon} \cdot \frac{U_1 - U_2 - V_1 + V_2}{U_1 - U_2 + V_1 - V_2} \cdot \log \frac{U_1 + V_1}{U_2 + V_2}, \tag{3}$$

nach PLANCK:

$$E_P = \frac{RT}{\varepsilon} \cdot \log \xi,$$

wobei:

$$\left.\frac{\xi U_2 - U_1}{V_2 - \xi V_1} = \frac{\xi c_2 - c_1}{c_2 - \xi c_1} \cdot \frac{\log \frac{c_2}{c_1} - \log \xi}{\log \frac{c_2}{c_1} + \log \xi}.\right\} \tag{4}$$

§ 2. Wenn es sich nun darum handelt, durch Versuche zwischen beiden Formeln zu entscheiden, so wird es sich natürlich empfehlen, solche Konzentrationen zweier Lösungen zu wählen, für welche die Formeln möglichst verschiedene Werte liefern. Nach welchen Gesichtspunkten man hierbei zu verfahren hat, wird am besten zu übersehen sein, wenn man sich, wie wir das

[1] M. PLANCK, diese Berichte p. 285, 1927.
[2] P. HENDERSON, Zeitschr. f. physikal. Chemie **59**, p. 118, 1907; **63**, p. 325, 1908.
[3] M. PLANCK, Ann. d. Phys. **40**, p. 561, 1890.

hier tun wollen, auf den einfachen Fall beschränkt, daß jede der beiden Lösungen nur eine einzige Art von Kationen und Anionen enthält. In diesem Falle haben wir im ganzen nur zwei Arten von Kationen und Anionen und erhalten aus (1):

$$c' + c'' = \bar{c}' + \bar{c}'' = c, \tag{5}$$

aus (2):

$$\left.\begin{aligned} U &= u' c' + u'' c'' \\ V &= v' \bar{c}' + v'' \bar{c}'' , \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ferner:

$$c_1'' = 0, \quad \bar{c}_1'' = 0, \quad c_2' = 0, \quad \bar{c}_2' = 0,$$

indem wir in der ersten Lösung nur die eingestrichenen, in der zweiten Lösung nur die zweigestrichenen Ionen als vorhanden annehmen, so daß

$$\left.\begin{aligned} c_1 = c_1' = \bar{c}_1', \; c_2 = c_2'' = \bar{c}_2'' \\ U_1 = u' c_1, \; U_2 = u'' c_2 \\ V_1 = v' c_1, \; V_2 = v'' c_2 . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Zur beliebigen Verfügung stehen dann die 6 Konstanten c_1, c_2, u', u'', v', v'', die aber nur eine vierfache Mannigfaltigkeit der Potentialdifferenz E bedingen, da es sowohl bei den Konzentrationen als auch bei den Beweglichkeitszahlen nicht auf die absoluten Werte, sondern nur auf die Verhältnisse ankommt.

Für gewisse spezielle Fälle, wie z. B. $u' = u''$ zusammen mit $v' = v''$, oder $c_1 = c_2$ zusammen entweder mit $u' = u''$ oder mit $v' = v''$, sind E_H und E_P identisch, wie man aus (3) und (4) erkennt. Man wird also bei den anzustellenden Versuchen diese Fälle nicht verwenden, sondern wird vielmehr solche Fälle aussuchen, welche den absoluten Betrag der Differenz $E_H - E_P$ möglichst groß ergeben. Nach welcher Richtung hierbei zu verfahren ist, läßt sich aber nicht unmittelbar erkennen. Dazu ist die Formel für E_P viel zu kompliziert. So ist nicht einmal zu ersehen, ob z. B. für $c_1 > c_2$ u' beziehungsweise v' größer oder kleiner als u'' beziehungsweise v'' gewählt werden muß, um den Betrag von $E_H - E_P$ möglichst in die Höhe zu treiben.

§ 3. Um wenigstens einen ersten festen Anhaltspunkt für die Beantwortung der aufgeworfenen Frage zu gewinnen, kann man so vorgehen, daß man die Werte von E in der Nähe des genannten einfachsten Falles ($u' = u''$, $v' = v''$, $c_1 = c_2$) untersucht. Setzen wir nämlich:

$$\left.\begin{aligned} u' &= u, \; u'' = u + \Delta u \\ v' &= v, \; v'' = v + \Delta v \\ \frac{c_2 - c_1}{c_1} &= \delta \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und nehmen Δu, Δv und δ unendlich klein an, so werden alle Ausdrücke in den Gleichungen (3) und (4) in ihrer Abhängigkeit von diesen drei Größen durch Potenzreihen darstellbar, und die Werte von E_H und E_P lassen sich direkt berechnen und vergleichen.

Die Ausführung der etwas umständlichen, aber elementaren Rechnung ergibt für die gesuchte Differenz den folgenden Ausdruck:

$$E_H - E_P = \frac{RT}{3\varepsilon(u+v)^3} \cdot \Big\{ (\Delta v - \Delta u)\,\Delta u\,\Delta v - \frac{\delta}{2}\left(v(\Delta u)^2 - u(\Delta v)^2 + 3(u-v)\,\Delta u\,\Delta v\right)\Big\}. \tag{9}$$

Man ersieht hieraus zunächst die Bestätigung der früheren Feststellung, daß, wenn zwei der 3 Größen Δu, Δv, δ verschwinden, auch die Differenz $E_H - E_P$ verschwindet. Weiter aber erkennt man leicht, in welchem Sinn und in welchem Betrage die Differenz $E_H - E_P$ anwächst, wenn irgendeine Abweichung von dieser Bedingung eintritt. So ist z. B. für den von P. F. BÜCHI[1] untersuchten Fall

$$E = \mathrm{H\,Cl}\,|\,0.01\,\mathrm{K\,Cl}$$
$$\Delta v = 0$$
$$\Delta u = u'' - u' = u_K - u_H < 0$$
$$\delta = \frac{c_2 - c_1}{c_1} < 0.$$

Folglich nach (9)

$$E_H - E_P > 0,$$

in Übereinstimmung mit der direkten Berechnung, wobei man zugleich erkennt, daß das Vorzeichen von $E_H - E_P$ nicht durch das der Beweglichkeitsdifferenz Δu, sondern nur durch das der Konzentrationsdifferenz bestimmt wird.

Wenn außer den Kationen auch die Anionen in den beiden Lösungen verschieden sind, läßt sich an der Hand von (9) leicht beurteilen, ob die Differenz $E_H - E_P$ durch diese beiden Unterschiede in dem nämlichen oder in entgegengesetztem Sinn beeinflußt wird.

§ 4. Was nun die Anordnung der Versuche betrifft, so scheint mir das folgende Verfahren deshalb das zweckmäßigste zu sein, weil es sich einfach ausführen läßt und zugleich eine Art Nullmethode darstellt. Hat man irgend zwei Lösungen 1 und 2, und stellt aus ihnen eine dritte Lösung 3 dadurch her, daß man irgendeine Quantität der Lösung 1 mit einer beliebigen anderen Quantität der Lösung 2 durcheinandermischt, so ist die Potentialdifferenz:

$$E = 1\,|\,2\,|\,3\,|\,1$$

nach HENDERSON $= 0$, nach PLANCK im allgemeinen von Null verschieden, wie sich aus den Formeln (3) und (4) ergibt. Derartige Versuche sind zur Zeit im physikalischen Institut der Universität Berlin im Gange. Sollte sich aus ihnen, wie es die Ergebnisse von BÜCHI vermuten lassen, eine Bestätigung der HENDERSONschen Formel ergeben, so wäre damit die interessante Tatsache festgestellt, daß bei der Vermischung zweier Lösungen auch bei größtmöglicher Vorsicht die Konvektion praktisch eine viel größere Rolle spielt als die eigentliche, bei ruhendem Lösungsmittel stattfindende Diffusion.

[1] P. F. BÜCHI, Zeitschr. f. Elektrochemie **30**, p. 443, 1924.

Ausgegeben am 30. Januar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 III

AUG 7 1929
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 31. Januar. (S. 13)
Ostwald: Grundsätzliches zur messenden Farbenlehre. Erster Teil. (S. 14)
Hesse: Die Stufenleiter der Organisationshöhe der Tiere. (Mitteilung vom 10. Januar.) (S. 27)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

III. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 31. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Nernst las über die wissenschaftliche Charakteristik der bisher benutzten Lautsprechersysteme, wobei als Grundlage die Gleichung für den stationären Zustand erzwungener Schwingungen benutzt wurde.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. Ostwald legte eine Arbeit vor: »Grundsätzliches zur messenden Farbenlehre.«

Er sprach über die methodologischen Grundsätze der Farbenmessung und entwickelte das System seiner Einteilung in graue Töne und Farbtöne.

3. Hr. Bieberbach legte vor:

a) eine Arbeit des Hrn. G. D. Birkhoff in Cambridge (Mass.): Divergente Reihen und singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen. (Ersch. später.)

Es wird gezeigt, wie auch in Fällen, wo die gewöhnlich benutzten Reihen divergieren, das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2$$

auf die Normalform transformiert werden kann in der Umgebung einer Stelle, wo X_1 und X_2 verschwinden.

b) eine Arbeit des Hrn. A. Marx in Königsberg i. Pr.: Zwei Sätze über schlichte Abbildungen. (Ersch. später.)

Es wird gezeigt, daß die Sternschranke einer schlichten Abbildung $z + a_2 z^2 + \cdots$ von $|z| < 1$ zwischen 0.64 und 0.70 liegt.

Grundsätzliches zur messenden Farbenlehre.

Von Wilhelm Ostwald.

Erster Teil.

I.

Sind die Farben meßbar?

Da die Farbe eine Empfindung ist, gehört die Farbenlehre zu den psychologischen Wissenschaften. In diesem ganzen Gebiet ist noch die Möglichkeit strittig, überhaupt Messungen anzustellen, da der Meßling, die Empfindung, überaus beweglich ist und bei gegebenem gleichem Reiz (der physikalisch meßbar ist) die verschiedensten Werte annehmen kann. Da aber umgekehrt alle und jede Messung zuletzt auf der Gleichheit zweier Empfindungen beruht, so scheint hier ein Kreisschluß vorzuliegen, der den Begriff der Messung selbst bedroht.

Die Lösung dieser Schwierigkeit gelingt durch die Anwendung des von Leibniz aufgestellten und in seiner Bedeutung erkannten Stetigkeitsgesetzes, das seinerseits in dem hier in Frage kommenden Gebiet auf der zeitlichen Dauer jeder Empfindung über den Reiz hinaus, also zuletzt auf physiologisch-chemischer Grundlage beruht. Streckenmessungen kommen beispielsweise darauf hinaus, daß die Indexlinie mit einem Teilstrich zusammenfällt; genauer: daß die eine Linie als symmetrische Fortsetzung oder Einlagerung der anderen erscheint. Hierzu ist ein Urteil über die symmetrische Gleichheit von Rechts und Links am Strichkomplex erforderlich, d. h. das rechte Bild muß noch im Bewußtsein vorhanden sein, wenn das linke betrachtet wird und umgekehrt. Dadurch, daß man die beiden Seiten wiederholt die Rollen als Objekt und Erinnerung vertauschen läßt, sichert man die Beobachtung gegen den einseitigen Einfluß des Abklingens am Erinnerungsbilde.

Ganz ähnlich ist der Vorgang, durch welchen wir die Gleichheit zweier Farben feststellen. Wir erfüllen das Gesichtsfeld symmetrisch mit den Farben, am einfachsten in Gestalt zweier Halbkreise mit gemeinsamem Durchmesser und sorgen durch Fernhaltung aller Grenzerscheinungen an der Berührungslinie dafür, daß der Wechsel von Objekt und Erinnerungsbild so schnell und störungsfrei wie möglich erfolgen kann.

Das Postulat.

Um von dem Nachweis einer Gleichheit zu einer Messung übergehen zu können, ist ein Postulat erforderlich, welches die additive Beschaffenheit der Operation ausspricht, durch welche aus gleichartigen Teilstücken größere Ge-

bilde derselben Art zusammengesetzt werden. Bei Streckenmessungen lautet das Postulat, daß die Größe einer Strecke durch die Fortbewegung des Streckenträgers im Raume nicht geändert wird. Dadurch entsteht die Möglichkeit, durch Zusammensetzung gleicher Einheitsstrecken einen gleichstufig geteilten Maßstab herzustellen und die Meßoperation auf eine Zählung solcher Einheiten zurückzuführen. Die Steigerung der Genauigkeit wird durch die Wahl kleinerer Einheiten bewirkt, die als (dezimale) Bruchteile der ursprünglichen Einheit bis zur Unterscheidungsschwelle geführt werden.

Um also die Frage nach der Meßbarkeit der Farben zu beantworten, muß das Postulat gefunden werden, vermöge dessen ein als Einheit gewählter Farbenabstand unter Erhaltung seines Wertes so verschoben werden kann, daß durch Zusammensetzung gleicher Abstände ein Farbenmaßstab oder eine Farbleiter entsteht, welche das Messen in ein Zählen umzuwandeln ermöglicht. Wie bei allen Postulaten kann nicht seine absolute Richtigkeit, wohl aber seine Brauchbarkeit erwiesen werden.

Messung der unbunten Farben.

Wir beschränken die Untersuchung zunächst auf die unbunten Farben Weiß, Grau, Schwarz, die bekanntlich eine stetige Reihe bilden mit zwei gegensätzlichen Endpunkten. Der Weißpunkt ist durch die Albedo Eins definiert; weiß ist eine Fläche, welche alles auffallende Licht zerstreut zurückwirft; er liegt also im Endlichen. Der Schwarzpunkt hat die Albedo Null und liegt psychologisch im negativ Unendlichen.

Wir wählen als willkürliche Einheit den Abstand zweier grauer Flächen a und b von verschiedener Albedo und fragen nach der Operation, durch welche wir über b hinaus ein Grau c definieren können, welches ebenso weit von b absteht wie b von a. Die einzige bekannte ist folgende. Wir verändern die Beleuchtung von a und b so, daß a die gleiche graue Farbe zeigt wie b bei der ursprünglichen Beleuchtung. Dies ist nach der oben gegebenen Erklärung des experimentellen Nachweises der Gleichheit immer möglich. Die Farbe nun, welche b unter dieser neuen Beleuchtung zeigt, definiert den Punkt c. Da man diesen Vorgang beliebig wiederholen kann, so ist es möglich, einen vierten, fünften usw. gleichabständigen Punkt festzulegen und so einen Maßstab längs der ganzen Reihe Weiß-Grau-Schwarz einzuteilen, dessen untere Grenze durch die verfügbaren technischen Hilfsmittel gegeben ist. Nach oben ist er durch die Albedo Eins begrenzt. Daß man nach demselben Verfahren die anfangs gewählte willkürliche Einheit bis zur Schwelle unterteilen kann, braucht nur erwähnt zu werden.

Man erkennt die weitgehende Ähnlichkeit zwischen der Streckenmessung und der Graumessung. Dort war das Postulat von der täglichen Erfahrung hergenommen, daß die starren Körper unserer Umwelt anscheinend ohne Änderung der Gestalt durch den Raum bewegt werden können, weil sie wieder die alten Raumverhältnisse erkennen lassen, nachdem sie an ihren alten Ort zurückgebracht sind. Bekanntlich ist das Postulat der gestaltlichen Unveränderlichkeit bei der Bewegung durch den Raum nur eine Möglichkeit

von vielen; sie ist aber unter ihnen die einfachste und hat sich bisher als ausreichend bewährt.

Dasselbe kann man vom Beleuchtungspostulat sagen. Ebenso wie man die Gestalt als unabhängig vom Ort postuliert, postuliert man die »Schattierung« als unabhängig von der Beleuchtung.

Grenzen.

Ein Unterschied beider Fälle scheint aber in folgendem zu liegen. Grenzen des Raumes kennen wir nicht; das Verschiebungspostulat gilt daher unbegrenzt. Dagegen kennen wir Grenzen nach oben wie nach unten, wo das Auge seinen Dienst versagt. Es ist also nötig, hier die physikalischen wie die psychophysischen Verhältnisse genauer zu prüfen.

Die physikalische Voraussetzung des Beleuchtungspostulats ist die Unabhängigkeit der Albedo von der Stärke der Beleuchtung. Hier sind keine Grenzen bekannt, ähnlich wie beim Raum.

Wohl aber ist die Wahrnehmung der Farbe durch das Auge begrenzt, denn es gibt sowohl eine zu starke wie auch eine zu schwache Beleuchtung, wo das Auge seinen Dienst versagt. Dazwischen besteht ein sehr breites Zwischengebiet, wo das Auge sich den vorhandenen Beleuchtungsverhältnissen anpaßt, wenn auch mit einer gewissen Veränderlichkeit der Schwelle. Es entspricht dies einigermaßen der Grenze beim gewöhnlichen Längemessen, wo die optische Vergrößerung durch die Endlichkeit der Lichtwellenlängen eingeschränkt ist.

Für unsere Aufgabe ergibt sich daraus der wichtige Schluß, daß die Farbenmessung eine exakte Begründung nur durch Bezugnahme auf die Albedo, also eine physikalische, nicht psychologische Eigenschaft erfahren kann. Tatsächlich hat sich unser Farbensehen biologisch dieser Forderung weitgehend angepaßt. Denn das Weber-Fechnersche Gesetz, welches einen so großen Umfang psychophysischer Tatsachen gut beschreibt, ist im Gebiete der Gesichtsempfindungen eine unmittelbare Folge jenes Postulats.

Das Gesetz von Weber-Fechner.

Aus dem Remissionsgesetz geht hervor, daß mit den Gesamtlichtmengen auch die Unterschiede der Lichtmengen von zwei bestimmten Oberflächen der Beleuchtung proportional sind, daß sie also in einem von der Beleuchtung unabhängigen Verhältnis stehen. Nun fassen wir bekanntlich ein unbuntes Bild stets in gleicher Weise auf, ob die Beleuchtung stark oder schwach ist; für die Auffassung ist somit das Verhältnis der Lichtmengen maßgebend und nicht ihre Differenz. Das ist aber das Weber-Fechnersche Gesetz.

Biologisch ist diese Tatsache so zu deuten, daß wir des Auges nicht zur Beurteilung absoluter Helligkeiten bedürfen, sondern zur Erkennung der Gegenstände der Außenwelt. Diese aber sind in sehr allgemeiner Weise durch den Besitz einer ganz bestimmten Remission gekennzeichnet, viel seltener durch

den Besitz absoluter Lichtstärken, die praktisch nur bei Selbstleuchtern in Frage kommen. Vielmehr besitzt das Auge in der Irisbewegung und in der Adaptation Einrichtungen, die es weitgehend unabhängig von der absoluten Lichtstärke, also möglichst unempfindlich gegen deren Verschiedenheiten machen.

Einer rationellen Messung der Farben (zunächst der unbunten) muß also das Weber-Fechnersche Gesetz als Postulat zugrunde gelegt werden, wie man das Gesetz von der Erhaltung der Gestalt bei räumlichen Verschiebungen der Streckenmessung zugrunde legt. Daß es Gebiete des Sehens gibt, wo Abweichungen von jenem Gesetz bestehen, berührt diese Grundlegung ebensowenig, wie etwa die Tatsache der perspektivischen Mannigfaltigkeit unserer Anschauungsbilder eines gegebenen starren Körpers das Postulat der Streckenmessung berührt. Man kann sich dies noch deutlicher durch folgende Überlegung machen.

Nehmen wir drei Flächen mit den Albedowerten a, b, c an, für die das Verhältnis $a : b = b : c$ besteht, so werden die beiden Abstände der Farben als gleich empfunden. Dies gilt zunächst zweifellos für »gute« Beleuchtungen, d. h. für Lichtstärken, bei denen das Auge am vollkommensten Dienst tut, und darüber hinaus noch ein gutes Stück nach oben und unten. Darüber hinaus mögen Abweichungen eintreten; so wird bei schwachem Licht leicht der dunklere Abstand kleiner empfunden als der hellere. Nun ist aber die Remission unabhängig von der Beleuchtung, und die Abstandsdefinition, die auf ihr beruht, darf durchaus nicht als eine Funktion der Beleuchtung dargestellt werden. Wenn also Abweichungen vom Weber-Fechnerschen Gesetz beobachtet werden, so müssen sie ebenso als technische Fehler bei der Farbenmessung bewertet werden, wie Längenabweichungen durch parallaktische Verschiebung Messungsfehler sind.

Damit dürfte die grundsätzliche Ausführbarkeit einer von subjektiven Abweichungen völlig freien Messung der unbunten Farben erwiesen sein. Es muß ausdrücklich betont werden, daß es sich um eine wirkliche Messung handelt, wie die von Strecken, Gewichten, Stromstärken usw., nicht nur um eine zufällige oder willkürliche Bezifferung. Denn die einzige subjektive oder psychologische Voraussetzung, die für dieses System benutzt worden ist, beschränkt sich darauf, daß die Farbengleichheit zweier angrenzender Teile des Gesichtsfeldes beobachtet werden kann. Die anderen Voraussetzungen sind physikalische, also objektive.

Auf dieser Grundlage ist es nun leicht, eine Stufenleiter der unbunten Farben aufzustellen, durch welche jede einzelne ebenso eindeutig definiert ist wie etwa die Tonleiter durch die Schwingzahlen. Die Maßzahlen der Grauleiter sind die Logarithmen der Albedowerte. Da deren obere Grenze die Eins ist, so sind diese Meßzahlen alle negativ; sie laufen von 0 bis $-\infty$. Die Einheit wird durch die Basis der benutzten Logarithmen bestimmt; wählt man aus naheliegenden praktischen Gründen dekadische Logarithmen, so ist das ganze Maßsystem eindeutig festgelegt. Auf die praktische Ausführung dieser theoretischen Grundlage soll hier nicht eingegangen werden; es sei nur bemerkt, daß die praktisch herstellbaren Stufen kaum über die Maßzahl -2 hinausgehen.

II.

Grau als Mischung.

Psychologisch ist jedes Grau eine Farbe für sich, ebenso wie Schwarz und Weiß. Daß wir es als ein Gemisch aus diesen beiden auffassen, rührt von der experimentellen Tatsache her, daß man es durch Mischung aus diesen Bestandteilen erzeugen kann und hierbei auf dieselben Farben kommt, die man durch Verminderung der Beleuchtung aus Weiß erhält. Hierauf beruht die Möglichkeit der Messung des Grau, z. B. mittels des von mir angegebenen Halbschattenphotometers. Den gleichen Gedanken hat später Pulfrich für sein Stufenphotometer verwertet.

Um Weiß und Schwarz zu mischen, bringt man entsprechende Anteile beider zur Einwirkung auf das Auge und sorgt dafür, daß durch Unterschreitung der Schwelle eine einheitliche Empfindung entsteht. Diese kann räumlich oder zeitlich unterschritten werden. Verschiedenheiten im Gesichtsfelde, deren Sehwinkel unterhalb 0.0001 liegt, werden nicht mehr als solche empfunden, sondern als eine homogene Farbe. Das gleiche gilt für zeitliche Verschiedenheiten unterhalb 0″.03. Die Mischungsergebnisse beider Methoden stimmen überein.

Graudefinition durch Mischung.

Man kann auf diese Tatsachen gleichfalls ein Maßsystem der unbunten Farben begründen, indem man die Bruchteile Weiß und Schwarz, welche durch Mischung das fragliche Grau ergeben, als Maßzahlen benutzt. Betrachtet man ein beliebiges graues Flächenstück, das mit unterschwelligen Fleckchen von Weiß und Schwarz bedeckt ist, als Einheit, so ist der Weißanteil w wie der Schwarzanteil s durch je einen echten Bruch dargestellt, deren Summe gleich Eins ist, unabhängig von der gewählten Flächeneinheit. Es gilt also $w + s = 1$. Von den beiden Veränderlichen w und s ist also nur eine unabhängig. Wir verwenden vorwiegend w in solchem Sinne.

Zugunsten dieses Maßsystems, das wir das analytische nennen können, da die Zahlenwerte durch Zerlegung des empfindungsmäßig homogenen Grau in die Anteile Weiß und Schwarz gewonnen werden, läßt sich anführen, daß es auch insofern ein psychophysisches ist, als die Umwandlung des objektiv (räumlich oder zeitlich) unhomogenen Feldes in ein subjektiv homogenes auf physiologischen Eigentümlichkeiten des Auges beruht. Wenn man aber eine Skala etwa mit den Graustufen 1.0, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.0 betrachtet, so werden die Stufen als zweifellos ungleich empfunden. Am weißen Ende sind die Unterschiede kaum merklich, am schwarzen übergroß.

Die Ursache hierfür ist biologisch. Da die Beleuchtung unserer Umgebung innerhalb weitester Grenzen wechselt, so besteht die Notwendigkeit, behufs Erkennung der Dinge bei jeder Beleuchtung gleiche Verhältnisse der Helligkeiten als kennzeichnend aufzufassen, während wir im allgemeinen gar keine Gelegenheit haben, gleiche Differenzen zu erleben. Niemand

kann voraussagen, wie ein Gemisch von gleichen Teilen Weiß und Schwarz aussieht, und wenn er den Versuch anstellt, so wundert er sich, daß sich hierbei ein ganz helles Grau ergibt.

Es ist also nicht tunlich, ein Postulat des Inhaltes aufzustellen, daß gleichen Differenzen des Weißgehalts gleiche Abstände der Graureihe empfindungsgemäß zugeordnet werden sollen. Obwohl sich die Farbempfindungen für Zuordnungen als recht plastisch erweisen, sind hier die Abweichungen weitaus zu groß. Es bleibt also bei der logarithmischen Zuordnung.

Bezogene und unbezogene Farben.

Von besonderer Bedeutung ist, daß die objektive Definition der Maßzahlen der unbunten Reihe bezogene Farben voraussetzt. Der fundamentale Unterschied zwischen unbezogenen und bezogenen Farben, auf den ich seit mehr als einem Jahrzent wiederholt aufmerksam gemacht habe, ist von den gegenwärtigen Vertretern der Wissenschaft noch nicht unter die regelmäßig benutzten Begriffe aufgenommen worden. Er ist sachlich und eindeutig dadurch gekennzeichnet, daß den unbezogenen Farben, die allein in einem dunklen Gesichtsfeld erscheinen, ohne daß der Beschauer über die allgemeine Beleuchtung ein Urteil hat, das Schwarz fehlt. Ihre Gesamtheit ist daher nur zweifaltig (zweidimensional), während die bezogenen Buntfarben durch drei unabhängige Bestandteile gekennzeichnet sind. Die Gesamtheit aller unbezogenen Buntfarben läßt sich daher in einer Fläche darstellen; Helmholtz (der sich nur mit unbezogenen Farben beschäftigt hat) stellte sie durch eine Kreisscheibe dar, mit dem Kreise der gesättigten Farben in Umfang und Weiß in der Mitte; längs jedem Halbmesser liegen die stetigen Abstufungen zwischen beiden.

Schwarz.

Es überrascht beim ersten Hören, daß die unbezogenen Farben kein Schwarz und somit auch kein Grau enthalten sollen, doch erweist die nähere Untersuchung die Richtigkeit dieses Schlusses. Bedeckt man die Lichtöffnung einer Dunkelkammer mit einer Mattscheibe, so sieht sie immer weiß aus, wie man auch die Helligkeit der äußeren (unbunten) Beleuchtung abändern mag, denn ihre Farbe ist unbezogen. Nur bei sehr schwacher Beleuchtung, bei welcher das Auge an der Grenze seiner Leistungsfähigkeit steht, kommt seine rudimentäre photometrische Befähigung zur Geltung, und man kann die dann vorhandene Farbe nicht mehr Weiß nennen.

Dies erklärt auch, weshalb man durch vollkommenen Ausschluß des Lichtes vom Auge nie wirkliches Schwarz erhalten kann. Das völlig verdunkelte Gesichtsfeld ist vielmehr von dunkelgrauen Wolken erfüllt, die sich oft bewegen. Das Dunkelgrau rührt von der geringen photometrischen Fähigkeit des Auges her, welche die Erkenntnis vermittelt, daß die Betätigung des Sehorgans sehr gering ist. Sie ist aber vorhanden, wobei dahingestellt bleiben mag, ob es sich um retinale oder zerebrale innere Reize handelt.

Sobald man aber dieses Eigengrau des Gesichtsfeldes in Vergleich bringt mit objektiven Flächen, deren Beleuchtungsverhältnisse man kennt, sobald

man m. a. W. das Gebiet der bezogenen Farben betritt, erscheint an Stelle des Eigengrau ein tiefes und reines Schwarz. Am einfachsten ist der Versuch an der kleinen Öffnung eines innen geschwärzten Hohlraums, einen KIRCHHOFFschen schwarzen Körper anzustellen, denn eine solche Öffnung sieht schwärzer aus, als irgendeine schwarze Fläche, die man daneben anbringt. Da auch jetzt in der schwarzen Öffnung das Eigengrau bestehen bleibt, so ist das ganz andere, rein schwarze Aussehen durch die Bezugnahme auf die Beleuchtung der Umwelt bewirkt. Auf den sehr wichtigen Schluß, daß somit der besondere Empfindungscharakter der bezogenen Farben psychologisch bedingt ist und nicht physikalisch, sei zunächst nur hingewiesen.

III.

Bunte Farben.

Entwicklungsgeschichtlich sind die unbunten Empfindungen weit älter als die bunten. Das entsprechende Sinnesorgan, das Urauge, erfüllte zuerst nur die Aufgabe, die An- oder Abwesenheit strahlender Energie anzuzeigen und später die, eine grobe Schätzung ihrer Stärke zu ermöglichen. Eine andere Entwicklung ermöglichte durch genauere Richtungsempfindung das Erkennen von Formen; hierauf ist hier nicht einzugehen. Andererseits entstand die Möglichkeit, Wellenlängen des Lichts zu unterscheiden. Zunächst nach gröbsten Gegensätzen: kurze und lange Wellen oder Blau und Gelb; später kam Rot und Grün dazu.

Inmitten dieser Entwicklung stehen wir gegenwärtig. Die Gesamtzahl der Kombinationen der Wellenlängen beträgt u^u, wo u die Anzahl unterscheidbarer Stufen bedeutet. Das Urauge hatte den Umfang $u^0 = 1$; ihm war nur Hell und Dunkel unterscheidbar. Dann stieg der Umfang der Farbempfindungen auf u^1, u^2, und gegenwärtig stellt u^3 die Mannigfaltigkeit unserer Farbenwelt bezüglich der Wellenlängen dar. Für die Möglichkeit einer weiteren Steigerung sind deutliche Anzeichen nicht vorhanden, wenn sie auch nicht ausgeschlossen sein soll.

Dieser ungeheure Unterschied zwischen der Mannigfaltigkeit der Farben und der der Wellenverbindungen ist eine zureichende Ursache, auf eine Systematik der Farben auf Grund der Wellenlängen zur Zeit zu verzichten. Wir haben vielmehr das unmittelbare Farberlebnis auf die Natur seiner Mannigfaltigkeit zu untersuchen, und das Wellenlängenproblem nimmt die Gestalt an: welche verschiedene Kombinationen bewirken die gleiche Farbe? Da eine rationelle Antwort auf diese Frage noch nicht gefunden ist, so kann man aus Wellenlängenforschungen zur Zeit überhaupt noch kaum Hilfe für die Farbforschung erwarten.

Der Farbton.

Die neue Eigenschaft, welche zu den unbunten Farben tritt, um sie zu bunten zu machen, heißt der Farbton. Wir können uns Farben vorstellen, welche ausschließlich den Farbton zeigen, ohne einen Anteil Weiß oder

Schwarz; sie sollen Vollfarben genannt werden. Die Vollfarben zeigen eine stetige zyklische, einfaltige Ordnung, den Farbenkreis, genauer Farbtonkreis. Daß die Reihenfolge der Farbtöne mit der im Spektrum übereinstimmt (soweit letzteres geht), ist eine primitive Notwendigkeit, da die beiderseits vorhandene Stetigkeit Abweichungen in der Reihenfolge unmöglich macht. Umgekehrt ist aber die Übereinstimmung durchaus kein Beweis dafür, daß das Spektrum dem Farbtonkreis irgendwie zugrunde liege, denn jede beliebige stetige Farbtonfolge, die auf irgendeine Weise zustande kommt, wie z. B. die Farben dünner Blättchen, besteht notwendig aus Wiederholungen der gleichen Farbtonfolge.

Der Ordnungscharakter.

Wohl aber tritt hier ein umgekehrt-verwandtes Problem auf, das merkwürdigerweise bisher kaum als solches behandelt worden ist. Die Wellenlängen, denen die Farben des Spektrums zugeordnet sind, bilden eine lineare Reihe mit je einem größten und kleinsten Wert am Ende. Wären die Farbtöne eine unmittelbare Funktion der Wellenlänge, so müßten sie eine lineare Ordnung mit je einem äußersten Wert an den Enden zeigen, ähnlich wie die Reihe Weiß, Grau, Schwarz. Sie zeigen aber eine geschlossene zyklische Ordnung, und die fehlenden Purpurfarben, die man aus Rot und Blau ermischen kann, unterscheiden sich in ihrem Charakter durchaus nicht von den anderen Farbtönen, denen homogene Wellen zugeordnet sind. Dies ist ein unwiderleglicher Beweis dafür, daß der Zusammenhang zwischen Farbton und Wellenlänge von viel verwickelterer Art ist, als man anzunehmen pflegt, und daß ferner die Homogenität der Lichtwellen den Farbempfindungen keineswegs einen ausgezeichneten psychischen Charakter erteilt. Die homogenen Lichter sind m. a. W. durchaus nicht als das Urphänomen der Buntfarben anzusehen, wie dies bisher immer geschehen war. Es besteht kein Zweifel, daß dieser durch die Jahrhunderte geschleppte Irrtum die Hauptursache für die Verzögerung gewesen ist, welche die wissenschaftliche Klarstellung der Farbenwelt bisher erfahren hatte.

Das Farbenhalb.

Es muß nun die Frage aufgeworfen und beantwortet werden: wie kann aus der linearen Ordnung der Wellenlängen die zyklische Ordnung der Farbtöne entstehen?

Die Antwort ist: dadurch, daß als Urphänomen der Farbenwelt nicht die durch homogene Lichter erzeugten Empfindungen wirksam sind, sondern die durch Farbenhalbe erzeugten.

Unter einem Farbenhalb wird die Gesamtheit aller Lichter verstanden, welche im Spektrum zwischen zwei gegenfarbigen Lichtern enthalten sind. Sie mischen sich zu einer Gesamtfarbe, deren Farbton mitten zwischen den begrenzenden Gegenfarben liegt. Die Lücke, welche das Spektrum im Vergleich zum Farbtonkreise zeigt, wird behandelt, als enthielte sie die fehlenden purpurfarbigen Lichter; es gibt also neben den vollständigen Farbenhalben

unvollständige, bei denen die Lücke entweder einseitig bei den kurzen oder den langen Wellen liegt, oder inmitten des Farbenhalbes, das alsdann aus zwei getrennten Stücken besteht.

Um zu erkennen, wie hierdurch die zyklische Erscheinung des Farbtonkreises entsteht, denkt man sich das Spektrum so angeordnet, daß zwischen den Gegenfarben überall gleiche Abstände bestehen. Über das Spektralband bewegt man nun eine Blendenreihe, welche abwechselnd ein Farbenhalb zudeckt und eines frei läßt. Hierdurch kommen alle Farbenhalbe nacheinander zur Erscheinung, welche möglich sind. Dabei ergibt sich, daß sie sich genau wiederholen, wenn die Blende die Länge des Spektrums plus der Lücke zurückgelegt hat. Diese Periodizität ist also nichts als der Ausdruck der zyklischen Ordnung, welche an jeder Stelle begonnen werden kann und nach dem Durchlaufen der ganzen Mannigfaltigkeit wieder genau auf den Anfangspunkt zurückgelangt. Das ist die Beschaffenheit des Farbtonkreises, nicht aber die des Spektrums.

Lücke und Mischung.

Wie man sieht, beruht die Bildung der zyklischen Beziehung auf dem Mischungsbegriff und auf dem Umstande, daß der Umfang des Farbenhalbes erheblich größer ist als die psychologische Lücke zwischen dem langwelligen Rot und dem kurzwelligen Veil. Bei der von mir vorgeschlagenen Einteilung des Farbtonkreises in 24 Punkte beträgt die Lücke 5 Punkte, während jedes Farbenhalb 12 Punkte umfaßt. Immerhin macht sich die Lücke insofern geltend, als die Farben Rot und Veil, welche sie enthalten, zu den dunkleren und dunkelsten des Kreises gehören.

Was die Mischung der Lichter anlangt, so ist schon die grundlegende Tatsache betont worden, daß psychologisch ein Unterschied zwischen homogenen und gemischten Lichtern nicht besteht. Alle Erregungen der Netzhaut werden qualitativ als homogen empfunden, und eine Zerlegung in die Komponenten, wie sie das Ohr auszuführen vermag, ist dem Auge vollkommen unmöglich. Die von einzelnen Forschern beanspruchte Fähigkeit, etwa im Grün Blau und Gelb als Bestandteile zu erkennen, ist eine Selbsttäuschung, die auf Erinnerungen an die beim Mischen von Farbstoffen beobachteten Erscheinungen beruht. Ohne diese Unfähigkeit des Auges zur Analyse wäre es ja nicht möglich, daß eine unbestimmt große Anzahl verschiedener Lichtgemische als gleich empfunden werden kann, wie es tatsächlich der Fall ist.

Die Gegenfarben.

Auf dem gleichen Boden ergibt sich die Beantwortung der Frage, wie die Beziehung der Gegenfarben erklärt werden kann. Zieht man die homogenen Lichter in Betracht, so muß die Tatsache, daß je zwei Lichter, die um etwa zwei Drittel des Spektrums abstehen, sich zu weißem Licht mischen lassen, als unerklärlich bezeichnet werden. Das Rätsel wird noch dunkler durch den Umstand, daß es für einen erheblichen Teil der homogenen Lichter, nämlich die grünen, überhaupt keine Gegenfarben im Spektrum gibt. Und ganz hoffnungs-

los wird das Problem gegenüber der Tatsache, daß diese grünen Lichter durch Nachbilder, Kontrastfarben und andere psychophysische Vorgänge, welche die Erscheinung von Gegenfarben hervorrufen, sich ebenso im Besitz von Gegenfarben erweisen wie die anderen homogenen Lichter, deren Gegenfarben auch als homogene Lichter vorhanden sind.

Alle diese Tatsachen lassen erkennen, daß die dem Physiker so nahe liegende Auffassung, die homogenen Lichter und ihre bestimmten Wellenlängen seien als Grundlage der Farbenlehre anzunehmen, sich vom psychophysischen Standpunkt aus nicht bewährt, da sie keine Erhellung der Probleme bewirkt, sondern nur ihre Verdunkelung.

Das Gegenteil gilt für die Lehre vom Farbenhalb als dem Urphänomen der Buntfarben, denn sie löst alle diese Rätsel.

Zunächst das der Gegenfarben. Diese kommen dadurch zustande, daß die in einem gegebenen Farbenhalb nicht vorhandenen Lichter ihrerseits zu einer Gesamtfarbe gemischt werden. Daraus folgt unmittelbar, daß beide Farben, welche gar keine gleichen Lichter enthalten, psychologisch den größten Farbtongegensatz aufweisen müssen. Die Summe der beiderseitigen Lichter ergibt alle Lichter, die im Spektrum vorhanden sind; deren Gemisch aber ist Weiß. Es ist also nicht Zufall, sondern Notwendigkeit, daß die Gegenfarbenpaare sich zu Weiß mischen. Von diesem Gesichtspunkt aus rückt die physiologische Erklärung der subjektiven Entstehung der Gegenfarben in das Gebiet des Erreichbaren. Und man begreift andererseits, warum es experimentell so schwierig ist, homogene gegenfarbige Lichter im Auge zu Weiß zu mischen, während aus Gegenfarben, die breite Wellengebiete umfassen (wie alle Körperfarben), sich Weiß oder Grau ohne alle Mühe durch optische Mischung erzeugen läßt.

Die homogenen Lichter als Resterscheinung.

Erzeugt man irgendein Farbenhalb, dessen Farbton sich im Spektrum vorfindet, das m. a. W. nicht aus zwei getrennten Wellengebieten besteht, so kann man beiderseits Wellen fortnehmen, ohne daß sich der Farbton zu ändern braucht. Betrachtet man diese Farben unbezogen, so sehen sie gleich aus, falls man den durch die Einengung bewirkten Lichtverlust durch Steigerung der Lichtstärke der übriggebliebenen Wellen ausgleicht. Man kann so fortfahren, bis das restliche Licht homogen geworden ist, d. h. bis die Farbtonverschiedenheit zwischen den beiden Grenzwellen unterhalb der Schwelle liegt. Dann haben wir es mit einer Spektralfarbe zu tun.

Die Farben der homogenen Lichter erscheinen dergestalt als Restphänomene, denen die Farben der Farbenhalbe zugrunde liegen. Diese abgeleitete und fernliegende Beschaffenheit erklärt die auffallende Tatsache, daß die persönlichen Verschiedenheiten in der Auffassung der Farben homogener Lichter unverhältnismäßig viel grösser sind als in der Auffassung der Farbenhalbe und der ihnen nahestehenden Farben der Farbstoffe. Bei Farbtonbestimmungen an Aufstrichfarben durch Ermittelung der Gegenfarbe haben sich unter Tausenden von Messungen durch verschiedene farbtüchtige Personen

überhaupt keine individuellen Unterschiede nachweisen lassen, falls diese Personen das 60. Lebensjahr noch nicht erreicht hatten. Erst ältere Augen mit stark vergilbter Linse ließen Abweichungen bei dem Paar Rot-Seegrün im Betrage von 0.01 bis 0.02 des Farbtonkreises erkennen.

Es folgt hieraus u. a., daß die Untersuchungsmethoden der Farbtüchtigkeit, die auf der Anwendung homogener Lichter beruhen, grundsätzlich in solchem Sinne fehlerhaft sind, daß die dort auftretenden Anomalien durchaus keinen sicheren Schluß auf Mangelhaftigkeit gegenüber den breiten Wellenmassen rechtfertigen, welche die Erscheinungen unserer Umwelt bedingen. Es finden vielmehr hier sehr bemerkenswerte Kompensationen statt, welche auch bei abweichender Auffassung homogener Lichter zu übereinstimmender Auffassung der Umweltsfarben führen. In solchem Sinne waren die buntgefärbten Wollstränge des Begründers der praktischen Lehre von den Farbstörungen Holmgren wissenschaftlich besser als die scheinbar exaktere spektrale Analyse, die bekanntlich nur einen Berg ungelöster Probleme gebracht und insbesondere zahlreiche Personen als anomal bezeichnet hat, welche sich praktisch als durchaus farbtüchtig bewährten.

Die Purpurfarben.

Auch die merkwürdige Tatsache, daß die Purpurfarben im Spektrum durch Abwesenheit glänzen, findet ihre erste Erklärung durch die Lehre vom Farbenhalb. Ihre Farbenhalbe sind diejenigen, welche aus zwei Endstücken, Rot und Veil, bestehen, zwischen denen die Lücke klafft. Die oben beschriebene Zusammenziehung des breiten Wellenbandes unter Wahrung des chromatischen Schwerpunkts, d. h. des Farbtons, ist hier nicht möglich, weil dieser Farbton in der Lücke, gleichsam im imaginären Gebiet liegt. Alle anderen Farbenhalbe, sowohl die vollständigen im Grün, wie die einseitig unvollständigen im Blau und Kreß, haben dagegen ihre Schwerpunkte im reellen Gebiet und lassen sich daher auf homogene Lichter gleichen Farbtons reduzieren.

IV.

Farbtonmessung.

Zur Beantwortung der Frage, ob eine Messung der Farbtöne möglich ist, und wenn, unter welchen Voraussetzungen, stellen wir zunächst fest, daß durch Nebeneinanderstellen zweier bunten Felder sich ihre Gleichheit oder Ungleichheit ebenso beurteilen läßt wie bei unbunten.

Eine Ungleichheit tritt aber nicht nur ein, wenn beide Farbtöne verschieden sind, sondern schon, wenn bei gleichem Farbton die anderen Komponenten der Farbe verschieden sind. Bei bezogenen Farben, die eine dreifaltige Gruppe bilden, sind zwei andere Bestandteile vorhanden, bei unbezogenen nur einer, nämlich Weiß. Wir machen die Voraussetzung, daß diese anderen Komponenten sich bei dem Vergleich zweier Farben auf ihren Farbton gleich machen lassen, so daß vorhandene Verschiedenheiten nur vom

Farbton herrühren. Die technischen Mittel hierzu sollen hier nicht erörtert werden, da es nur auf das Grundsätzliche ankommt.

Zwei verschiedene Farbtöne haben jedenfalls einen gewissen Abstand, den man sich als Winkel oder Bogenlänge im Farbtonkreis veranschaulichen kann. Es muß nun gefragt werden, ob es ein Postulat gibt, mit dessen Hilfe man zu den Punkten a und b mit dem Abstand $a-b$ einen dritten c so finden kann, daß $a-b=b-c$ ist, d. h. die Abstände gleich sind.

Die Antwort scheint zunächst verneinend ausfallen zu müssen, weil der Farbtonkreis nicht in dem Sinne homogen ist wie der Raum. Man kann nicht sagen, daß etwa der Abstand Gelb-Kreß seine Größe behält, wenn man versucht, ihn nach Veil-Blau zu übertragen. Dies rührt daher, daß wir ein sehr sicheres absolutes Farbton-Gedächtnis haben, und diese Eigenschaft nicht leicht wegdenken können.

Für die Tonhöhen besteht im allgemeinen kein absolutes Gedächtnis. Wir können daher eine Oktave als solche erkennen, in welchem Gebiet der Tonreihe sie auch erscheint, und ebenso die anderen Intervalle. Es gibt aber einzelne Personen, welche absolute Tonhöhen empfinden und für welche daher der Tonraum in demselben Sinne inhomogen ist. Sie haben aber keine Schwierigkeit, die Intervalle unabhängig von der absoluten Tonhöhe zu empfinden. Sie erkennen daher das Verschiebungspostulat im Tonraum trotz des Mangels an Homogenität an. Daraus folgt, daß diese Eigenschaften trennbar sind, und es besteht die Hoffnung, eine solche Trennung auch im Farbtonkreise durchzuführen und vermittels einer geeigneten Eigenschaft einen vom Farbton unabhängigen Abstandsbegriff im Farbkreis zur Geltung zu bringen, zunächst zu dem Zwecke, den Kreis gleichabständig einzuteilen.

Der psychologische Kreis.

Als erstes derartiges Postulat bietet sich die Gleichheit der Unterschiedschwelle an. Schon 1884 haben König und Dieterici im Spektrum die Unterschiedsschwellen der angrenzenden Farbtöne durchgemessen und einen sehr merkwürdigen Wechsel kleiner und großer Schwellenabstände, bezogen auf die Wellenlängen, gefunden. Man kann nun die Farbtöne so anordnen, daß überall gleichen Abständen gleiche Schwellen entsprechen, und erhält so den psychologischen Farbtonkreis.

Auch der Maßstab der Abstände läßt sich eindeutig festlegen durch das Postulat, daß die Gegenfarben sich im Farbtonkreise gegenüberliegen müssen. Hierdurch wird gleichzeitig die spektrale Lücke ausgefüllt, da man die Purpurfarben nach den gegenfarbigen grünen ordnen kann. Außerdem entstehen für die anderen Farbtöne unabhängige Doppelbestimmungen. Sie stehen nicht im Widerspruch untereinander.

Als Grundlage exakter Messungen kann indessen dieses Postulat nicht wohl dienen. Das Hindernis liegt in der starken subjektiven Veränderlichkeit sowohl der Schwelle wie der Gegenfarbenbeziehung an homogenen Lichtern. Wir können die Ergebnisse solcher Ermittlungen daher zwar als beiläufige Kontrollmittel dafür benutzen, ob anderweit gefundene Kreisteilungen empfindungsgemäß gleichabständig sind, nicht aber zu ihrer genauen Festlegung.

Das Mischungspostulat.

Einer exakten Kreisteilung müssen an Stelle der homogenen Lichter Farbenhalbe oder ihnen nahestehende Farben zugrunde gelegt werden. Ferner muß ein Postulat gefunden werden, welches einen stetigen Übergang von einem Farbton zum andern ermöglicht, wie er im Spektrum ohne weiteres vorliegt.

Die erste Forderung wird durch möglichst reinfarbige Aufstriche erfüllt, für welche die heutige Farbstoffchemie zureichendes, wenn auch nicht ganz befriedigendes Material liefert. Der zweiten Forderung genügt die Operation der Mischung, wobei ausschließlich die additive oder optische Mischung in Frage kommt. Das entsprechende Postulat lautet: wenn zwei Farben verschiedenen Farbtons, die gleiche Mengen Vollfarbe enthalten, gemischt werden, so fällt der entstehende Farbton in die Mitte zwischen beiden.

Es ist an anderer Stelle ausführlich dargelegt worden, daß hierdurch eine eindeutige Einteilung des Farbtonkreises möglich gemacht wird. Sie ergibt bei der Durchführung wesentlich die von Hering angegebene Ordnung, doch mit dem Unterschiede, daß dessen »Urgrün« nicht gegenüber dem Urrot stehen darf, da es nicht seine Gegenfarbe ist; es gehört weiter nach der gelben Seite hin. Der rationelle Farbtonkreis läßt vier Urfarben erkennen: Gelb, Rot, Ublau und Seegrün. Dazwischen liegen vier andere Farben, die mit den Urfarben zusammen die acht Hauptfarben bilden; diese sind Gelb, Kreß, Rot, Veil, Ublau, Eisblau, Seegrün, Laubgrün. Der Unterschied gegen frühere Farbtonordnungen besteht darin, daß Blau und Grün in je zwei wesentlich verschiedene Farbtöne zerlegt worden sind. Das rötliche Ublau ist von dem grünlichen Eisblau ebenso verschieden wie Gelb von Kreß, und dasselbe gilt für die beiden Grün: das kalte, bläuliche Seegrün und das warme, gelbliche Laubgrün.

Die Frage, ob auch das Postulat des gleichen Schwellenwertes in dem nach dem Mischungspostulat hergestellten Kreise erfüllt ist, darf im wesentlichen bejaht werden. Insbesondere findet sich der von König und Dieterici entdeckte eigentümliche mehrfache Wechsel großer und kleiner Schwellenwerte beim stetigen Fortgang durch die Farbtonordnung des Spektrums getreu wieder.

Im einzelnen bedarf aber die Angelegenheit noch besonderer Durchforschung. Denn die Forderung, daß gleiche Mengen Vollfarbe bei der Mischung zu verwenden sind, setzt die Möglichkeit voraus, diese Mengen zu messen. Hierdurch entsteht eine Anzahl neuer Begriffsbildungen und Aufgaben, die zwar grundsätzlich bearbeitet sind, im einzelnen aber noch der schärferen Erfassung gewisser Sonderfälle harren. Hierüber soll eine zweite Abhandlung Auskunft erteilen.

Die Stufenleiter der Organisationshöhe der Tiere.

Von R. Hesse.

(Vorgelegt am 10. Januar 1929 [s. oben S. 1].)

Wenn man früher Entwicklungsreihen innerhalb des Tierreichs aufstellte, so waren die leitenden Gesichtspunkte immer nur die Entwicklung der Formen und die stammesgeschichtliche Herleitung der Gruppen des Systems. Die Funktion, die ja das notwendige Korrelat der Form ist, wurde dabei nie mit in die Betrachtung einbezogen. Solche rein morphologische Einstellung ist einseitig und gibt ein unvollkommenes Bild. Jetzt, wo die physiologisch-anatomische Betrachtungsweise immer mehr an Geltung gewinnt, ist es wohl an der Zeit, auch einmal die fortschreitende Leistungsfähigkeit der Organismen in ihrer Entfaltung zu untersuchen. Die anatomische Grundlage läßt sich auch da nicht entbehren. Denn die Verrichtungen, die Funktionen, sind durch die ganze Tierreihe, ja durch die Reihe aller nicht chlorophyllbesitzenden Lebewesen die gleichen; die Einrichtungen aber, an die diese Verrichtungen gebunden sind, die Baupläne der tierischen Organisation, sind mannigfach verschieden.

Die Gleichheit der Verrichtungen ergibt sich daraus, daß die Grundlagen der Lebenserscheinungen und damit die notwendige Reihenfolge der Vorgänge für alle Tiere die gleichen sind. Die in den Lebensäußerungen zutage tretende Energie muß durch Zerlegung komplizierter chemischer Verbindungen, der Nährstoffe, gewonnen werden. Solche Stoffe müssen also zunächst beschafft werden (Nahrungsaufnahme); sie müssen löslich gemacht und dem Körper einverleibt werden (Verdauung und Resorption); sie müssen zu möglichst ausgiebiger Energiegewinnung unter Sauerstoffaufnahme gespalten werden (intermediärer Stoffwechsel und Atmung), und die dabei zurückbleibenden Schlacken und die entstehenden Stoffwechselprodukte wie Kohlensäure und Ammoniakderivate müssen als überflüssige und oft sogar schädliche Stoffe aus dem Körper entfernt werden, oft nach vorheriger Entgiftung (Defäkation, Exkretion). Das sind die Grundzüge der Lebensfunktionen bei der Amöbe und der Hefezelle wie beim Menschen, und, wie die Nährstoffe überall ähnlich sind, so zeigen auch die Mittel des Nahrungsabbaus und die dabei auftretenden Zwischenstufen oft eine überraschende Ähnlichkeit[1].

Die Einrichtungen aber, in und an denen sich diese grundlegenden Vorgänge abspielen, sind überaus verschieden. Die tierischen Lebewesen sind

[1] William Küster, 1923, Der Mensch und die Hefe. Stuttgart.

Maschinen, in denen gebundene chemische Energie frei gemacht und zu Lebensleistung nutzbar gemacht wird, zu Bewegung, Reizleitung, Wärme u. a. Die von Menschen erfundenen Maschinen, in denen chemische Energie in Bewegung umgesetzt wird, erfahren innerhalb desselben Grundplanes sehr verschiedene Grade des Aufbaues und der Vollkommenheit, z. B. die Kolbendampfmaschinen, und weichen dabei in den Einzelheiten des Bauplans je nach ihrer Verwendung sehr voneinander ab. Es können aber auch durch Einbeziehung neuer Prinzipien der Energieverwendung weitere Fortschritte gemacht werden, z. B. durch Dampfturbinen oder Explosionsmotoren. Das alles geht Hand in Hand mit wesentlichen Änderungen in der »Morphologie« der Maschine. Ganz ebenso hängen die morphologischen Abänderungen in den Bauplänen der Tiere aufs engste mit den Einzelheiten der Energiegewinnung und der Energieverwertung zusammen. Mit der fortschreitenden Differenzierung des Bauplans tritt im allgemeinen auch eine Vervollkommnung in der Energetik des Tierkörpers ein, gründlichere Freimachung der in den Nährstoffen vorhandenen Energie und deren nutzbringendere, sparsamere Verwendung. Das Ergebnis solcher »Verbesserungen« ist Intensivierung der Lebensleistung. Und wie im Handel und Wandel eine Maschine allmählich durch die andere überlegene verdrängt wird, die Gewichtsuhr durch die Federuhr, die Feuerschloßflinte durch den Hinterlader, und die alten Typen sich nur noch unter dem Schutz besonderer Verhältnisse, auf dem Dorf, in der Wildnis, erhalten, so verdrängt in der Tierreihe ein Bauplan den anderen: die Fische stechen die Tintenfische aus, die Knochenfische verdrängen die Schmelzschupper, die Säugetiere überwiegen über die Reptilien — infolge der überlegenen Leistungsfähigkeit des Bauplans. Die Schritte solcher Vervollkommnung in der Tierreihe wollen wir einmal in großen Zügen verfolgen.

Der erste große Schritt, und nach seiner grundsätzlichen Bedeutung wohl der wichtigste, ist der vom Protisten zum vielzelligen Tier, dem Metazoon, von der Einzelzelle zum Zellenstaat. Den Übergang bilden Protistenkolonien, bei denen die einzelnen Partner der Kolonie völlig gleichwertig sind (*Pandorina*); sie sind bei den wiederholten Teilungen der Mutterzelle beieinander geblieben. Der Vorteil, der ihnen daraus erwächst, besteht darin, daß ihre motorischen Kräfte sich addieren, die Bewegungshindernisse aber, die aus der Reibung an dem umgebenden Wasser erwachsen, durch relative Verkleinerung der Oberfläche vermindert werden. Das gibt also die Möglichkeit, die Bewegungsleistung zu steigern oder bei gleicher Leistung die Körpermaschine weniger abzunutzen und damit ihre Dauer zu verlängern. Auch feindlichen Nachstellungen durch andere Protisten ist die große Kolonie weniger ausgesetzt als das kleine Einzelwesen. Der Vorteil ist verhältnismäßig klein; aber auch das Opfer, durch das er erkauft wird, ist gering: die Zelle gibt ihre Freiheit auf; sie ist an die Kolonie gebunden auf Gedeih und Verderb.

Ein wesentlicher Fortschritt kommt erst zustande, wenn zwischen den Zellen der Kolonie eine Arbeitsteilung eintritt. Die Zellen sind dann nicht mehr gleich, sie übernehmen verschiedene Leistungen und werden dadurch

auch morphologisch verschieden. Die wichtigste Arbeitsteilung ist die zwischen generativen und somatischen Zellen, Keimzellen und Körperzellen (*Volvox*). Während bei der gewöhnlichen Protistenkolonie jede Zelle sich in gleicher Weise vermehren und zur Grundlage einer neuen Kolonie werden kann, kommen hier von der Gesamtheit der Zellen nur einzelne für die Erhaltung der Art in Betracht; diese wachsen als Keimzellen stärker heran auf Kosten der anderen, die ihnen Nährstoffe abgeben. Und während sie so in neuen Generationen weiterleben können, sind die anderen, die Körperzellen, rettungslos dem Tode verfallen. An der Wiege des Zellenstaates steht der Verlust von Freiheit und Gleichheit der Zellen und die »Erfindung« des obligaten Todes. Die Protisten sind potentiell unsterblich; jedes Individuum kann zwar sterben (durch Unglücksfall), es muß aber nicht sterben und kann in seinen Teilstücken weiterleben. Auch für die Metazoen gilt das »omne vivum ex vivo«. Potentielle Unsterblichkeit als Grundlage der Kontinuität des Lebens muß auch ihnen zukommen; aber sie ist auf die generativen Zellen, auf die Keimzellen, beschränkt. Dieses Prinzip, gewisse Zellen zugunsten bevorzugter Geschwister zu benachteiligen, hier dem sicheren Tode auszuliefern — das Majoratsprinzip könnte man es nennen —, erweist sich weiter auch innenhalb des Keimplasmas als fruchtbar. In vielen Fällen werden zahlreiche Nachkommen der Urkeimzelle eines Individuums wieder zu Sklaven einer geringeren Zahl bevorzugter Geschwister, der Gameten, degradiert, denen sie als Nährzellen und Follikelzellen entsprechend assimilierte Nährstoffe liefern, wobei sie selbst sich abnutzen und schließlich sterben. Der ganze Körper des vielzelligen Tieres, das, was wir als Individuum bezeichnen, hat schließlich für die Fortdauer des Lebens keine andere Bedeutung als die, Sklave der Keimzellen zu sein, sie aufzuammen und ihnen zu gedeihlicher weiterer Entwicklung zu verhelfen.

Zwischen den Körperzellen tritt eine weitere Arbeitsteilung ein. Wenn auch jede von ihnen die für das Leben nötigen Grundleistungen der Ernährung, Bewegung und Reizbarkeit in gewissem Ausmaße behält, so übernimmt sie für die Gesamtheit doch nur bestimmte Teilleistungen. Sie wird dadurch auch in ihrer inneren Einrichtung und ihrer äußeren Gestalt beeinflußt, sie bekommt funktionelle Gestalt, die sie für ihre Leistung geeigneter macht. Das ist das Wesentliche an der histologischen Differenzierung. Durch Spezialisierung werden im Zellenstaat wie im Menschenleben vollkommnere Leistungen erzielt.

Der erste Schritt der Arbeitsteilung äußert sich morphologisch in der Bildung der Keimblätter. Die einfache Hohlkugelform von *Volvox* ist bei den Metazoen als Blastula eine vorübergehende Entwicklungsstufe. Durch Einwachsen eines Teils der Hohlkugelwand entsteht, wie durch eine Einstülpung, ein doppelwandiger Organismus, die Gastrula, mit Arbeitsteilung zwischen äußerem und innerem Keimblatt, wobei das äußere die Hauptmasse der Bewegungsleistungen, die Reizaufnahme und die Sauerstoffaufnahme, übernimmt, das innere die Nahrungsaufnahme. Die Zellen des äußeren Keimblatts geben Sauerstoff an die des inneren ab und erhalten von diesen Nährstoffe. Da die beiden Keimblätter dicht aneinander liegen, sind die Strecken

für diese Stoffwanderungen kurz. Die Exkretion besorgt jede Zelle für sich; jede grenzt ja unmittelbar an die Außenwelt und kann ihre Stoffwechselprodukte dorthin entleeren. Der Bauplan der Gastrula ist unverändert erhalten in dem Tierkreis der Coelenteraten. Diese einfachsten Metazoen haben also nur zwei Hauptorgane, die Haut und den Darm, der nur eine Öffnung nach außen hat. Ein überaus fruchtbares, die Tiere im Gegensatz zu den Pflanzen kennzeichnendes Prinzip kommt in diesem Bauplan zum ersten Male zur Anwendung, die Bildung innerer Oberflächen; es wird auch weiterhin immer aufs neue verwandt. Von den Protisten her ist bei den Coelenteraten die intrazelluläre Verdauung beibehalten, die Aufnahme der Nahrungspartikel in das Innere der Darmzellen. Verdauungsfermente kommen nur bei Berührung größerer Nahrungsstücke mit der Darmwand in jene hinein und bringen sie zum gröberen Zerfall; in den Darmraum kommt kein Ferment, er ist noch ganz Außenwelt.

Im übrigen ist bei diesem Zellenstaat die Arbeitsteilung im einzelnen noch sehr gering. Die Muskelelemente sind noch nicht selbständige Bildungen, sondern Anhänge der Epithelzellen. In den Nesselzellen, die die mikroskopischen Waffen der Coelenteraten enthalten, sind nebeneinander drei verschiedene Organelle vorhanden, ein Sinnesorganell (das Cnidocil), Muskelorganellen und ein Drüsenorganell, die Kapsel selbst, Einrichtungen, die bei den höheren Metazoen auf drei verschiedene, miteinander zu einer funktionellen Einheit verbundene Zellsorten verteilt sein würden.

Neue Notwendigkeiten ergeben sich, wenn sich zwischen äußeres und inneres Keimblatt Zellmassen als mittleres Keimblatt trennend einschieben. Diese Zellen entspringen aus weitergehender Arbeitsteilung. Muskelelemente lösen sich aus dem Verbande der primären Keimblätter und vervielfältigen sich; Nervenzellen und Keimzellen sind in der Tiefe besser geschützt als in den oberflächlichen Epithelien. Die Festigkeit des Körpers wird dadurch vergrößert, seine Beweglichkeit vermehrt, seine Reaktionsfähigkeit durch Sonderung von peripherem und zentralem Nervensystem vervielfältigt. Aber die vegetativen Verhältnisse dieser mittleren Zellmassen, ihre Ernährung und Exkretion, stehen unter neuen Bedingungen. Die Zellen des mittleren Keimblatts grenzen nirgends an die Oberfläche; für die Beschaffung von Nahrung und Sauerstoff sind sie auf die Oberflächenzellen angewiesen. Jene Stoffe gelangen von den Aufnahmestellen, dem Darmepithel und dem Körperepithel, zu den Gebrauchsstellen auf dem Wege der Diffusion. So ist es ja auch bei den Coelenteraten; aber da liegen die Aufnahme- und Verbrauchsstellen dicht beieinander, die Diffusionsstrecken sind kurz. Bei den Tieren mit mittlerem Keimblatt sind sie voneinander durch Zellmassen getrennt. Diffusion ist aber ein überaus langsamer Vorgang. Um die Stoffwechselvorgänge zu beschleunigen, gilt es daher, die Diffusionsstrecken nach Möglichkeit zu verkürzen.

Daraus ergibt sich die Erklärung für den Bau der Plattwürmer. Die Atmung geschieht durch die gesamte Oberfläche; die Abflachung des Wurmkörpers ermöglicht es, daß alle Binnenzellen nahe der Oberfläche liegen. Bei kleinen Würmern ist keine Stelle des Körpers weit von der Darmoberfläche entfernt, der Darm ist ein einfacher Schlauch. Wenn aber der Wurm größer

ist, ist auch sein Darm ausgebreitet; er reicht vielfach verästelt durch den ganzen Körper und bringt die Nahrung bis in die fernsten Winkel, so daß keine Zelle weit von der Nahrungsquelle liegt. Die ernährungsbedürftigen Organe, besonders die Geschlechtsorgane, dehnen sich durch den ganzen Körper aus und halten sich in unmittelbarer Nähe des Darms. Bei kleinen Formen sind die Gonaden noch leidlich kompakte Scheiben; denn als kleine Körper haben sie an sich im Verhältnis zu ihrer Masse eine relativ große Oberfläche. Aber bei größeren Arten verästeln sich die Gonaden vielfach oder zersplittern in kleine Bläschen, so daß die nahrungsaufnehmende Oberfläche wirksam vermehrt wird. Eine besondere Einrichtung ist für die Exkretion durchgeführt. Diese sehr beweglichen Tiere haben einen starken Stoffwechsel; die Abfallprodukte des Stoffwechsels aber sind Gifte für den Körper, die bei langsamer Diffusion an den Nachbarzellen Unheil anrichten könnten; so ist hier eine neue innere Oberfläche geschaffen, ein System feiner, vielverzweigter Röhren, die sich durch den ganzen Körper erstrecken und mit ihren Endzellen, den Protonephridien, die Exkretstoffe aufnehmen und nach außen befördern. All das ermöglicht erst die Bildung des mittleren Keimblatts mit ihren Vorteilen.

Die Coelenteraten sind entweder festsitzend oder, wenn sie frei beweglich sind, schweben sie frei im Wasser; sie sind »willenlos« den Strömungen preisgegeben und werden durch sie vielfach an Stellen verschleppt, wo sie zugrunde gehen müssen. Die Plattwürmer haben bei kompakterem Gewebe ein größeres spezifisches Gewicht; sie kriechen auf der Unterlage, kleinere Formen mit Hilfe der Flimmerhaare ihres Körperepithels, größere Formen mit Hilfe der Muskulatur, deren motorische Kräfte durch Emanzipation vom Epithel und Vermehrung der Einzelelemente wesentlich gesteigert sind. Für festsitzende und freischwebende Organismen sind alle Seiten gleichwertig, bei ihnen bringt ein radiärer Bau des Körpers keine Nachteile. Für kriechende Formen aber ist es von Vorteil, wenn immer dieselbe Körperstelle vorangeht; das wirkt bestimmend für die Körpergestalt und gestattet eine ökonomische Anordnung der Muskulatur. Das bei der Kriechbewegung führende Vorderende ist bevorzugt; es kommt mit Nahrung und mit Feinden zuerst in Fühlung; hier sind daher die Sinnesorgane besonders wirkungsvoll und häufen sich an; hier entsteht im Zusammenhang mit ihnen eine stärkere Ausbildung des zentralen Nervensystems, das Cerebralganglion; hierher wird schließlich auch der Mund verlegt. Damit haben wir die Entstehung des Kopfes.

So ist der Bauplan der Plattwürmer dem der Coelenteraten an Leistungsfähigkeit weit überlegen. Aber auf der anderen Seite sind ihm durch Mängel der Organisation gewisse Grenzen gesetzt. Der Körper muß dünn und flach sein — nur so ist die sauerstoffaufnehmende Oberfläche groß genug für die sauerstoffverbrauchende Zellmasse. Die Größenausdehnung eines solchen Körpers ist beschränkt; sonst droht die Gefahr der Zerreißung auf unebenem Untergrund. Auch die größten freilebenden Plattwürmer sind daher nur wenige Zentimeter lang und breit. Wo freilich entsprechender Schutz geboten ist, kann auch der Plathelminthenkörper bedeutende Ausdehnung erreichen; Bandwürmer werden bis 9 m lang.

Diese Schranken werden gebrochen durch eine neue Lösung des Diffusionsproblems mit der »Erfindung« des Blutkreislaufs. Nicht eine Körperflüssigkeit an sich ist etwas Neues, Befreiendes, sondern der Umtrieb dieser Flüssigkeit im Körper in bestimmten Bahnen mit Hilfe von Muskelkraft. Im System der Blutbahnen tritt die wirksamste Entfaltung innerer Oberflächen auf. Die »Blutgefäße« dringen in alle Teile des Körpers ein, und ihr Inhalt, das Blut, wird zum Stoffwechselvermittler. Ein Stoff braucht nur eine kurze Strecke durch Diffusion zurückzulegen, um bis zum nächsten Blutgefäß zu gelangen; dort wird er vom Blut aufgenommen und durch den ganzen Körper geführt. Der Sauerstoff von der Hautoberfläche, die Nährstoffe von der Darmoberfläche werden so mit Beschleunigung zu den Verbrauchs- und Speicherstellen gebracht; die Exkretstoffe gelangen ebenfalls in das Blut und kommen so zu den besonderen Ausscheidungsstellen. Der Blutkreislauf befördert den Stoffaustausch um so mehr, je weiter seine Bahnen durch den Körper verbreitet sind und je reicher die Oberflächenentwicklung in ihnen ist (Fortschritt von Sinussen zu Kapillaren). Ein solcher Blutkreislauf tritt zum ersten Male in einfacher Form bei den Schnurwürmern auf, um nirgends mehr zu fehlen. Und sofort sind die Beschränkungen, die der Diffusionsnot entspringen, gefallen. Die Würmer können dick und drehrund werden, sie erreichen Längen von 13 m und mehr; in ihrem Körper werden die Nephridien auf enge Stellen an einem Hauptblutgefäß lokalisiert. Diffus verteilt bleibt zunächst nur die Atmung. Sobald auch diese an beschränkte Stellen mit dünner Wandung und großer Oberfläche gebunden wird, sobald außen Kiemen oder im Körperinnern Tracheen oder Lungen auftreten, dann braucht die übrige Hautoberfläche nicht mehr durchlässig zu sein; es kann zur Bildung des Gehäuses bei Schnecken, des Hautpanzers bei Gliederfüßlern, der Hornschicht der Haut bei Wirbeltieren kommen; das sind die Schutzeinrichtungen gegen das Vertrocknen, die das Verlassen des heimatlichen Wassers und den Übergang zum Luftleben gestatten und damit zur Grundlage der gewaltigen Fortschritte werden, die mit dem Luftleben verknüpft sind. Bei Arthropoden wird außerdem der Panzer zum Bewegungsskelett, das der Muskulatur feste Ansatzpunkte bietet und ihre Leistungen erst zu voller Wirksamkeit bringt. Die überlegene Organisation der Arthropoden, zu denen vier Fünftel der bekannten Tierarten gehören, konnte erst entstehen, nachdem der Blutkreislauf »erfunden« war — das wird auch dadurch nicht widerlegt, daß auf dem Höhepunkt ihrer Ausbildung die Tracheenatmung wieder vom Blut unabhängig wird.

Aber noch ein weiterer Fortschritt ist im Bauplan der Schnurwürmer verwirklicht. Der Darm, der bisher nur eine Öffnung nach außen hatte, die sowohl der Nahrungsaufnahme wie der Entleerung unverdaulicher Stoffe dient, bekommt eine zweite Öffnung am entgegengesetzten Ende: eine folgenreiche Neuerung, die »Erfindung« des Afters. Der Fortschritt in der Ausnutzung der Nahrung, der damit gegeben wird, ist leicht zu verstehen. Früher bildete die Füllung des Darmes eine Grenze für die Aufnahme neuer Nahrung, und wenn Raum dafür geschaffen wurde, dann lagen die am meisten ausgenutzten Nahrungsmassen am tiefsten, und mit ihnen mußten ungenügend verbrauchte

entfernt werden; Aufnahme und Entleerung gingen in entgegengesetzter Richtung. Jetzt ist die Möglichkeit gegeben, daß ein einheitlicher Nahrungsstrom durch den ganzen Darm zieht; je mehr sich der Darminhalt dem After nähert, um so mehr sind ihm die wertvollen Stoffe entzogen, und die Entleerungen sind nährstofffrei. Zugleich ist damit freies Feld für eine andere Neuerung geschaffen. Bisher fand die Verdauung in den Zellen des Darmepithels intrazellulär statt; jetzt werden verdauende Fermente in den Darmraum entleert, lösen dort die verdaulichen Stoffe auf, und diese werden resorbiert. Der Darm hat aufgehört, in dem Maße wie früher Außenwelt zu sein. Schließlich ist durch diesen gerichteten Nahrungsstrom die Grundlage für Lokalisation der Darmfunktionen gegeben, die freilich erst allmählich vollständig verwirklicht wird. Am Anfang des Darms wird die Vorbereitung der Nahrung lokalisiert; dort geschieht die Sekretion der Verdauungssäfte, die schließlich in der Hauptsache im Magen und in der Bauchspeicheldrüse stattfindet; im mittleren Teil des Darms spielt sich die Resorption ab, und der Endteil dient nur der Formung der Kotballen.

Aber noch sind bei den Schnurwürmern die Bedingungen für eine solche Arbeitsteilung nicht ganz erfüllt. Der Darm ist in das Körperparenchym eingebettet und wird durch die Kontraktionen der Muskulatur bei der Lokomotion in Mitleidenschaft gezogen; andererseits ist er auf diese selbe Muskulatur für die Beförderung der Nahrungsmassen angewiesen. Er hat noch keine Unabhängigkeit und Selbständigkeit im Körper erreicht; ihm fehlt noch die Eigenmuskulatur zur planmäßigen Beförderung seines Inhalts durch Peristaltik. Diese Unabhängigkeit bekommt der Darm durch die »Erfindung« der Leibeshöhle. Schon bei den Schnurwürmern liegen zu beiden Seiten des Darms Hohlräume reihenweise angeordnet, die Binnenräume der in regelmäßigen Abständen wiederkehrenden Gonaden, der Eierstöcke bzw. Hoden. Diese Hohlräume erweitern sich, die einander entsprechenden Paarlinge über und unter dem Darm verschmelzen miteinander, die hintereinander gelegenen Höhlen verdrängen das trennende Parenchym bis auf dünne Muskelscheidewände; so kommt es zur Bildung einer gekammerten Leibeshöhle, die Darm und Bauchmark umgreift und in deren Epithelauskleidung das Keimepithel liegt. Das ist der Fall bei den Ringelwürmern. Wenn dann im Laufe der Entwicklung die Leibeshöhle einheitlich wird durch Verschwinden der Septa (wie schon bei Sipunculoiden und vor allem bei Arthropoden), dann ist auch die Möglichkeit gegeben, den Darm durch Schlingenbildung über Körperlänge zu verlängern, damit seine resorbierende Fläche sehr wirksam zu vergrößern und die Grundlage für äußerste Ausnutzung der Nahrung zu erreichen. Auf solchem Standpunkt sind die Insekten und — vielleicht auf anderem Wege — die Wirbeltiere angelangt.

Die letzte Steigerung, durch die eine weitere Intensivierung der Ernährung möglich wird, ist die mechanische Vorbereitung der Nährstoffe durch Zertrümmerung, die »Erfindung« des Kauens. Diesen Fortschritt finden wir nur bei den Arthropoden einerseits, bei den Vögeln und Säugetieren andererseits. Ganz wenige andere Tierformen haben Andeutungen davon; sie können Muscheln knacken oder raspelnd Bruchstücke der Nahrung abkratzen; ein

richtiges Kauen haben wir nur bei den Genannten. Hier geschieht es auf dreierlei Weise: Die Arthropoden kauen mit ihren Vorderkiefern, einem umgewandelten Beinpaar. Die Vögel kauen, soweit sie Pflanzenfresser sind, mit ihrem Muskelmagen, dessen Wirkung sie durch aufgenommene Mahlsteine erhöhen. Die Säuger kauen mit den Kiefern, die eine besonders ausgebildete Zahnbewaffnung tragen; andere Wirbeltiere haben Fangzähne, die durch Lücken getrennt sind; bei den Säugern schließen sich Zähne gleicher Art lückenlos zu einheitlichen Gruppen zusammen, die als Klingen, Feilen, Quetschen in den Dienst der Nahrungszertrümmerung treten. Die Folgen dieser Neuerung sind sehr weitgehend. Der nächste Fortschritt ist die Erweiterung des Speisezettels; das Kauen ermöglicht die volle Ausnutzung der pflanzlichen Nahrung. Nur sehr selten wird bei Metazoen ein Ferment angetroffen, das Zellstoff löst; wo eine solche Zellulose vorhanden ist, wie beim Flußkrebs und der Weinbergschnecke, löst sie aber nur junge Zellwände, Hemizellulosen. In den Zellen der höheren Pflanzen sind das Protoplasma und die ihm eingelagerten Kohlehydrate und Fette von einer Zellulosemembran umschlossen, und das Eindringen der Verdauungsfermente wird dadurch sehr verzögert. Wenn aber diese Membranen mechanisch gesprengt werden, wenn das kompakte pflanzliche Parenchym zu einer mehligen Masse mit großer Oberfläche zermahlen wird, dann gehen die Verdauungsprozesse schnell und gründlich voran. So ist eine gewaltige Nahrungsquelle der Ausbeutung erschlossen worden; die Pflanzenfresser gedeihen und bilden ihrerseits die Grundlage für die Existenz der Tierfresser.

Die schnelle Verarbeitung der so vorbereiteten Nahrung ermöglicht bei überschüssig vorhandenem Nahrungsvorrat eine beschleunigte Energieproduktion in der Zeiteinheit, die hinausgeht über die für Ortsbewegung, Nervenleitung und andere Betriebserfordernisse notwendigen Ausgaben. Das ist die Vorbedingung dafür, daß ein Teil der Energie dem Tierkörper als Wärme zugeführt wird. Die Eigenwärme wiederum beschleunigt die Ausnutzung der Nahrung, da die Geschwindigkeit des Reaktionsablaufs bei der Verdauung nach dem VAN'T HOFFschen Gesetz mit einer Temperaturzunahme von 10° auf das Doppelte bis Dreifache steigt. Dieser Circulus ist es, auf dem die Eigenwärme bei Vögeln und Säugern beruht (L. DOEDERLEIN)[1]. Aber nur Lufttiere konnten eigenwarm werden, weil Luft die Wärme schlecht leitet. Wasser als guter Wärmeleiter würde dem Körper zuviel Wärme entziehen (erst sekundär konnten eigenwarme Tiere, durch Speckpolster thermisch isoliert, ins Wasser gehen). Durch die Eigenwärme wurde das Tier in weitem Maße von Temperaturerniedrigung in der Umgebung unabhängig und instand gesetzt, beständig seine volle Lebensintensität zu entfalten. Bei Nacht und im Winter, wo wechselwarme Lufttiere wie Frösche, Reptilien und Wirbellose in Starre liegen und ihrer Selbst- und Arterhaltung nicht nachgehen können, ist das eigenwarme Tier unbehindert, wenn es nur genug Nahrung, d. h. Heizstoff, hat. Ein Fink, der 20 Jahre alt wird, lebt viel mehr als eine Schlange oder ein Laubfrosch, die ebenso alt werden.

[1] LUDWIG DOEDERLEIN, 1921, Betrachtungen über die Entwicklung der Nahrungsaufnahme bei den Wirbeltieren. Zoologica 27 (Heft 71).

Aber diese Unabhängigkeit hat ihre Kehrseite; sie wird erkauft durch Abhängigkeit von reichlicher Nahrung. Das eigenwarme Tier ist von der Nahrung viel mehr abhängig als das wechselwarme. Insekten, Frösche, Schlangen können monatelang hungern; für Eigenwarme ist Hunger schnell tödlich. Nur solche, die zeitweise wieder in den wechselwarmen Zustand übergehen können, die Winterschläfer wie Murmeltier, Siebenschläfer, Fledermäuse, können länger ohne Nahrungsaufnahme bleiben. Aber ihre Gesamtleistung ist um das vermindert, ihre Lebensfülle ist geringer als bei anderen.

Wenn also das Kauen die Unterlage für die Eigenwärme bei Lufttieren ist, weshalb sind dann die kauenden Insekten nicht ebenfalls eigenwarm? Durch Bewegung können sie Wärme produzieren; man fühlt an einem frisch vom Flug gefangenen Schwärmer, wenn man ihn in der Hand hält, daß er wärmer ist als die umgebende Luft. Ja viele im Frühjahr fliegende Insekten wie Hummelfliegen (*Bombylius*), Pelzbienen, Hummeln sind behaart und können durch die isolierende Luftschicht im Pelz die Bewegungswärme länger zusammenhalten; gerade diese Einrichtung ermöglicht es den Hummeln, hoch ins Gebirge und weit nach Norden zu gehen. Aber Eigenwärme kann sich hier nicht halten wegen der im Verhältnis zur Masse übergroßen Oberfläche. Eine Honigbiene von 0.1 g Gewicht hat eine Oberfläche von 1.98 cm^2 [1]. Nach Rubners Versuchen produziert ein eigenwarmes Tier (Hund) auf 1 m^2 seiner Oberfläche in bestimmter Zeit eine konstante Wärmemenge, etwa 1200 Kalorien, mag es groß oder klein sein. Das kleine Tier mit seiner relativ größeren Oberfläche muß also mehr Wärme produzieren im Verhältnis zu seiner Masse als das große; bei einem großen Hund von 20 kg Gewicht kommen auf 1 kg Masse 45 Kalorien, bei einem kleinen Hund von 3.2 kg ebenso 88 Kalorien. Eine Biene müßte unter gleichen Bedingungen 2376 Kalorien auf 1 kg Masse produzieren, um ihre Eigenwärme konstant zu halten. Eine so ungeheure Leistung ist nicht möglich. Die geringe Körpergröße der Insekten aber wird erzwungen durch das Außenskelett; dieses müßte, um die nötige Festigkeit zu besitzen, für größere Tiere so enorm schwer werden, daß ihre motorische Kraft dafür nicht ausreicht (Leuckart).

Und trotzdem gibt es ein Insekt, das zeitweilig eigenwarm ist, das ist die Biene — aber nicht die Einzelbiene ist eigenwarm, sondern »der Bien«, wie der westfälische Imker das ganze Volk bezeichnet. Nur im Stock sind sie eigenwarm; sie heizen ihre Wohnung. Im Winter, wenn im Stock die Temperatur unter 13° sinkt, setzen sie die Heizung in Gang. Sie hängen als dichter Haufen mit geringer Oberfläche, als Traube, an der Decke des Stockes. Wenn die Traube ganz auf 13° abgekühlt ist, werden die Bienen unruhig, die Traube lockert sich, sie bewegen sich und nehmen aus ihren Vorräten Nahrung auf, und in Zeit von einer Stunde hebt sich die Temperatur auf 25°, und die Traube setzt sich wieder an. Die zu äußerst sitzenden »Hautbienen«, radiär mit dem Kopf nach innen orientiert, kriechen, wenn

---

[1] Die Gewichtsangabe stammt von L. Armbruster, 1921, Arch. f. Bienenkunde 3, S. 5 (223). Die Oberfläche wurde an einem Bienenmodell von 44 cm Länge gemessen (2663 cm^2 ohne die Flügel und Mundwerkzeuge) und dann auf 1.2 cm Länge umgerechnet ($L : l = \sqrt{O} : \sqrt{o}$, wobei L und O Länge und Oberfläche des Modells, l und o die des Tieres bedeuten).

sie abgekühlt sind, ins Innere der Traube, und andere kommen an ihre Stelle und so fort, bis die Traube wieder auf 13° durchkühlt ist; das dauert etwa 22 Stunden; dann setzt ein neuer Heizsprung ein. Völlig gleichwarm aber ist der Stock im Frühjahr zur Brutzeit; die Bienen halten dann die Temperatur auf beständig 34—35° C, ganz unabhängig von der Außentemperatur. Auch hier, wie bei den eigenwarmen Wirbeltieren, ist ständige Versorgung mit Nahrung die Grundbedingung für die Wärmeerzeugung. Nahrungsvorräte für erwachsene Tiere, wodurch die Biene und manche Ameisen vor anderen Insekten ausgezeichnet sind, finden so ihre Erklärung im Zusammenhang des Bienendaseins. So erreichen diese wunderbaren Tiere, die auch durch die Ernährung ihrer Brut mit einem Sekret ihrer Drüsen an die Säugetiere erinnern, auch hier einen der Höhepunkte der Vervollkommnung, die im Tierleben vorkommen.

Solche Reihen von Vervollkommnungen in den Funktionen, wie hier für den Stoffwechsel eine vorgeführt wurde, lassen sich auch für das Nervensystem und für den Bewegungsapparat aufstellen. Bei jenem ist es die zunehmende Zentralisierung und Staffelung (Überordnung), bei diesem die Entwicklung eines (äußeren oder inneren) Bewegungsskeletts als Ansatz für die Muskeln, was den Fortschritt bedingt. Aber die Reihenfolge der Tierformen in den verschiedenen Reihen ist nicht gleich; die Reihen verlaufen nicht parallel; sie überkreuzen sich vielfach. So kommt es, daß sich nicht irgendeine Tierform als die vollkommenste bezeichnen läßt; die einen erreichen in dieser, die andern in jener Hinsicht den Gipfel der Ausbildung. So ist auch der Mensch nicht etwa ein Ausbund aller Vollkommenheiten; in vielen Leistungen wird er von anderen Tieren übertroffen. Aber er ist Großhirnspezialist, und dieser Steigerung seiner nervösen Leistungen verdankt er seine Erfolge im Kampf ums Dasein. Mag ihn der Adler in der Schärfe des Sehens, der Fisch im Schwimmen und Tauchen, das Pferd in der Geschwindigkeit des Laufs, der Vogel im Flug übertreffen, er baut seine Fernrohre, seine Schiffe und Unterseeboote, seine Autos, seine Flugzeuge und gewinnt; er sieht, schwimmt, taucht, rennt und fliegt — mit dem Großhirn.

Ausgegeben am 18. Februar.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Harvard College
AUG 7 1929
Smithsonian Deposit

1929 IV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 7. Februar. (S. 37)

CARATHÉODORY: Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen. (S. 39)

G. PÓLYA: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. (Dritte Mitteilung.) (Mitteilung aus der Sitzung der phys.-math. Klasse vom 10. Januar.) (S. 55)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichte erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie i zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Fre exemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwec auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Za von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere b zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lasse sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar a gezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch me Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu d Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffend Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Fre exemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei de redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kost der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 5 und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (i ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen e hält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie i zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Fre exemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwec auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Za von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere b zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lasse sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar a gezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch me Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es da der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffe den Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexempla und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem re gierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kost abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

IV. Gesamtsitzung. 7. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff sprach über Kronos und die Titanen. (Ersch. später.)

Von Kronos wissen nur die Ionier, von denen aus sich der Vater und Vorgänger des Zeus durch die Epiker verbreitet. Nach der älteren, Homerischen Vorstellung liegt Kronos mit seinem Gefolge, den Titanen, gefangen tief unter dem Tartaros. Nach der jüngeren Vorstellung ist er freigelassen und herrscht auf den Inseln der Seligen. Die Ionier haben ein Fest Kronia im Hochsommer, da führen sie für einen Tag ein Schlaraffenleben, wie es das goldene Geschlecht unter Kronos geführt hatte. Kronos kann niemals in diese Welt herüberwirken, er existiert nur in Relation zu Zeus; in dessen Gefolge ist er auch nach Olympia gekommen, wo man später mehr von ihm erzählte.

Als der Blitzgott Zeus in Ionien zum Könige der Götter ward, forderte das Denken Eltern und Vorgänger des Zeus, der die jetzt herrschende Weltordnung geschaffen hat. Je nach Beurteilung des gegenwärtigen Lebens lag vorher titanische Wildheit, die Zeus überwunden hat, oder ein paradiesisches Leben anders organisierter Menschen, dem Zeus ein Ende bereitet hat. Religion ist hier nicht, sondern theologisch-kosmogonische Spekulation. Den Namen für die Titanen, die Götter sind, scheinen die Hellenen von den Thrakern entlehnt zu haben.

2. Das auswärtige Mitglied Hr. Carathéodory übersandte eine Abhandlung: »Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen«.

Die Arbeit bringt Beweis und Anwendungen der folgenden Verschärfung und Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Julia:

Es sei für $|z| < 1$, die analytische Funktion $f(z)$ regulär und $|f(z)| < 1$. Dann konvergiert

$$\lim_{z \to 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z}$$

in jedem Dreieck A, das im Einheitskreise liegt und eine Ecke im Punkte $z = 1$ besitzt, gleichmäßig, wobei allerdings der Grenzwert ∞ auch zugelassen werden muß. Ist der Grenzwert endlich, so ist auch $f'(z)$ stetig im Innern und auf dem Rande von A, so daß die Funktion $f(z)$ dann im Punkte $z = 1$ eine Winkelderivierte besitzt.

3. Hr. Schmidt legte eine Note von Prof. G. Hoheisel, Breslau, vor unter dem Titel »Über das Verhalten des reziproken Wertes der Riemannschen ζ-Funktion«. (Ersch. später.)

Die Arbeit bringt Beweis und Anwendungen des folgenden Satzes:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante K, so daß jedes Gebiet, in welchem

$$|\zeta(s)| < e^{-\varepsilon t}, \quad s = \sigma + it$$

bleibt, sich in einen Kreis vom Radius $K \cdot \frac{\log t}{t}$ einschließen läßt.

4. Hr. Wilcken legte einen »Bericht über eine Reise zur Vorbereitung eines Supplementum Hispaniense des Corpus inscriptionum Latinarum« von Dr. Lothar Wickert vor. (Ersch. später.)

Die lateinischen Inschriften der Iberischen Halbinsel, die seit dem Erscheinen des letzten Supplements zum II. Bande des Corpus inscriptionum Latinarum (Ephem. epigr. IX, 1 [1903]) nicht mehr planmäßig gesammelt worden sind, und deren Zahl sich in den letzten Jahrzehnten durch Grabungen und Zufallsfunde stark vermehrt hat, bildeten den Gegenstand einer epigraphischen Studienreise, die der Berichterstatter im Herbst 1928 im Auftrage der Akademie unternahm, und auf der er besonders Katalonien, Madrid und Umgebung, Extremadura und Andalusien besuchte. Das auf dieser Reise gesammelte Material liefert die Grundlage zu einem umfangreichen neuen Supplement des spanischen Inschriftencorpus.

5. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte den 2. Band der 11. Auflage seiner Übersetzung »Griechischer Tragödien«: Orestie (Berlin 1929).

6. Das korrespondierende Mitglied Hr. Felix M. Exner übersandte einen Sonderabdruck seiner Arbeit »Dünenstudien auf der Kurischen Nehrung« (Wien 1928).

7. Hr. Heymann überreichte das Werk von Adolf Stoll »Friedrich Karl v. Savigny« Bd. II (Berlin 1929), das mit Unterstützung der Akademie erschienen ist;

8. Hr. Wiegand den »Katalog der Sammlung antiker Skulpturen« der Staatlichen Museen zu Berlin, Bd. III: »Katalog der griechischen Skulpturen des fünften und vierten Jahrhunderts v. Chr.« von Carl Blümel (Berlin 1928).

9. Vorgelegt wurden der 32. Bd. der »Deutschen Texte des Mittelalters«: »Das Märterbuch. Die Klosterneuburger Handschrift 713«, hrsg. von Erich Gierach (Berlin 1928) und die Gedächtnisrede auf »Albrecht Thaer« von Prof. Dr. J. Hansen (Berlin 1929).

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Freiburg i. Br. Hrn. Dr. Hans Spemann zum korrespondierenden Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen.

Von C. CARATHÉODORY.

Einleitung.

1. Hr. G. JULIA hat vor einigen Jahren einen sehr interessanten und wichtigen Satz bewiesen[1], den man durch Grenzübergang aus dem SCHWARZschen Lemma gewinnen kann. Dieser Satz lautet, wenn man ihn von seiner ursprünglichen geometrischen Einkleidung befreit, folgendermaßen:

Im Kreise $|z|<1$ sei die analytische Funktion $f(z)$ regulär und ihr absoluter Betrag $|f(z)|<1$. Außerdem sei $f(z)$ auch im Punkte $z=1$ regulär und man habe dort $f(1)=1$ und $f'(1)=\alpha$. Dann ist die Zahl α reell und positiv und es gilt für jeden Punkt z des Kreises $|z|<1$ die Relation

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}. \tag{1}$$

Hr. LÖWNER hat bemerkt, daß man diesen Satz von JULIA beweisen kann[2], ohne die Regularität von $f(z)$ im Punkte $z=1$ vorauszusetzen: der Satz gilt schon, wenn bei beliebiger geradliniger Annäherung des Punktes $z=1$ aus dem Inneren des Einheitskreises der Grenzwert

$$\lim_{z=1} \frac{1-f(z)}{1-z} = \alpha \tag{2}$$

existiert, endlich ist und von der Richtung der Annäherung unabhängig ist.

Durch die vorliegende Untersuchung wird der JULIAsche Satz auf ganz andere Weise verallgemeinert. Es wird sich nämlich zeigen, daß die Bedingungen von LÖWNER, die etwas künstlich zusammengestellt sind, ganz von selbst gelten, wenn man für α auch den Wert Unendlich zuläßt. Man kann sogar viel mehr beweisen: unter der einzigen Voraussetzung, daß $f(z)$ regulär und $|f(z)|<1$ im Kreise $|z|<1$ ist, konvergiert die linke Seite von (2) gleichmäßig in jedem Dreieck A, das im Einheitskreise liegt, und eine Ecke im Punkte $z=1$ besitzt. Wenn α endlich ist, gilt nicht nur die Relation (1), wie LÖWNER es schon gezeigt hatte, sondern es ist auch $f'(z)$ stetig im Inneren und auf dem Rande von A, so daß die

[1] Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles (Journ. de Mathématiques Ser. 8 Vol. 1, 1918, p. 72), Extension nouvelle d'un lemme de SCHWARZ (Acta Math. Vol. 42. 1918, p. 349).

[2] L. BIEBERBACH, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2 p. 124.

Funktion $f(z)$ dann im Punkte $z = 1$ eine Winkelderivierte besitzt, die gleich α ist. Dies alles erhält man durch eine unwesentliche Modifikation des ursprünglichen Gedankens von JULIA.

Nachträglich kann man notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen des JULIAschen Satzes, d. h. der Relation (1) bei passendem α, außerordentlich einfach formulieren: es genügt eine gegen den Punkt $z = 1$ konvergierende Punktfolge $z_1, z_2, \cdots$ zu haben, die sich im Inneren eines Dreiecks A befindet, und für welche die Zahlen

$$\left| \frac{1 - f(z_n)}{1 - z_n} \right|$$

alle unterhalb einer festen Schranke bleiben.

Dieser so verallgemeinerte JULIAsche Satz wird uns erlauben, das Verhalten der konformen Abbildung in gewissen Randpunkten der betrachteten Gebiete vollständig zu übersehen.

Auf diese Weise werden wir Beispiele von Funktionen $f(z)$ erhalten, die eine endliche Winkelderivierte im Punkte $z = 1$ besitzen, ohne in diesem Punkte selbst stetig oder sogar beschränkt zu sein.

I. Hilfssätze aus der nichteuklidischen Geometrie.

2. Wir betrachten die beiden Kreise $|z| < 1$ und $|w| < 1$ als Träger einer nichteuklidischen (LOBATSCHEWSKYschen) Geometrie. Zwei reelle Punkte x und h $(x < h)$ des ersten Kreises haben dieselbe nichteuklidische Entfernung wie die beiden reellen Punkte y und k $(y < k)$ des zweiten Kreises, wenn das Doppelverhältnis der vier Zahlen $(-1, x, h, 1)$ gleich ist dem Doppelverhältnis der vier Zahlen $(-1, y, k, 1)$; dies kann man aber schreiben:

$$\frac{(1-x)(1+h)}{(1+x)(1-h)} = \frac{(1-y)(1+k)}{(1+y)(1-k)}.$$

Wir setzen nun

$$1 - h = u, \quad 1 - k = v \tag{3}$$

und erhalten

$$\frac{1-y}{1+y} = \frac{v(2-u)}{u(2-v)} \cdot \frac{1-x}{1+x}. \tag{4}$$

3. Ist $x \geq 0$, so stellt die Zahl u den (euklidisch gemessenen) Abstand dar zwischen dem Kreise $|z| = 1$ und dem nichteuklidischen Kreise, der durch den Punkt h hindurchgeht und den Punkt x zum nichteuklidischen Mittelpunkt besitzt. Eine analoge Bedeutung hat v, falls $y \geq 0$ ist.

Nun liegt aber nach dem SCHWARZschen Lemma für jede Funktion $f(z)$, die im Kreise $|z| < 1$ regulär und absolut genommen kleiner als Eins ist, der Punkt $f(z)$ im Inneren eines nichteuklidischen Kreises mit dem nichteuklidischen Mittelpunkt $f(0)$, dessen Radius (nichteuklidisch gemessen) gleich ist dem Radius des analogen Kreises der z-Ebene, der durch den Punkt z hindurchgeht und $z = 0$ zum Mittelpunkte besitzt.

Man hat daher stets

$$1 - |f(z)| \geqq v, \tag{5}$$

wenn man v aus der Gleichung (4) berechnet, in der man $x = 0$, $y = |f(0)|$ und $u = 1 - |z|$ setzt. Dies liefert aber die Relation

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} \geqq \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)| \cdot |z|} > \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|}, \tag{6}$$

die uns nützlich sein wird.

4. Eine zweite Anwendung der Gleichung (4) ist folgende: wir betrachten Folgen von reellen positiven Zahlen $u_1, u_2, \cdots$ und $v_1, v_2,$ die den Bedingungen genügen:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0, \qquad \lim_{n=\infty} v_n = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{v_n}{u_n} = \alpha > 0. \tag{7}$$

Wir bezeichnen ferner mit K_n' einen Kreis, dessen Rand den Punkt x enthält und der den Punkt $h_n = 1 - u_n$ zum nichteuklidischen Mittelpunkte hat, und mit Γ_n' einen Kreis von gleichem nichteuklidischen Radius, der den Punkt $k_n = 1 - v_n$ zum nichteuklidischen Mittelpunkt besitzt. Dieser letzte Kreis wird die reelle Achse der w-Ebene in einem Punkte y_n treffen, den man berechnet, wenn man in (4) die Größen u, v, y durch u_n, v_n, y_n ersetzt. Die Kreise K_n' konvergieren gegen einen Kreis K, der ein Orizykel der nichteuklidischen Ebene ist, der die Punkte $z = 1$ und $z = x$ enthält; ebenso konvergieren die Kreise Γ_n' gegen einen ebensolchen Orizykel Γ, der die Punkte $w = 1$ und $w = y$ enthält, wobei y als Grenzwert der y_n durch die Formel

$$\frac{1 - y}{1 + y} = \alpha \frac{1 - x}{1 + x} \qquad (\alpha > 0) \tag{8}$$

berechnet wird.

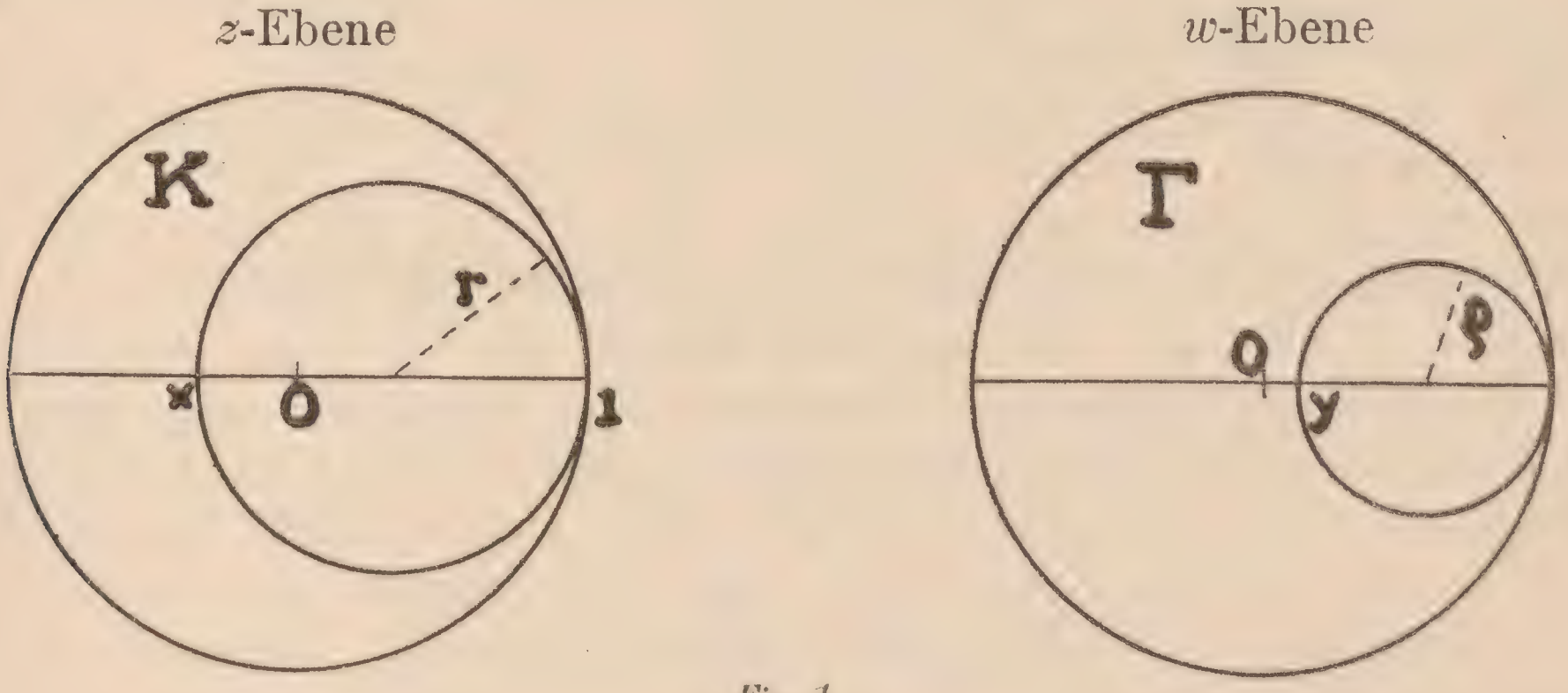


Fig. 1.

Bezeichnet man mit r und ρ die euklidischen Radien von K und Γ, so ist $x = 1 - 2r$ und $y = 1 - 2\rho$ und man findet aus (8)

$$\rho = \frac{\alpha r}{1 - r(1 - \alpha)}. \tag{9}$$

II. Erweiterung des Satzes von JULIA.

5. Wir betrachten nun eine analytische Funktion $w = f(z)$, die im Kreise $|z| < 1$ regulär und dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist und für welche noch folgendes gilt: es soll eine Folge von Zahlen $z_1, z_2, \cdots$ existieren, für welche die Relationen

$$\lim_{n=\infty} z_n = 1, \qquad \lim_{n=\infty} f(z_n) = 1 \tag{10}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \alpha \tag{11}$$

gleichzeitig gelten, wobei α eine endliche Zahl ist. Diese Zahl α, die nach ihrer Definition reell und nicht negativ ist, muß, wegen der Relation (6), immer von Null verschieden sein.

Setzen wir also $u_n = 1 - |z_n|$ und $v_n = 1 - |f(z_n)|$, so sind die Relationen (7) des vorigen Paragraphen erfüllt, und wir können, bei festgehaltenem x auf der reellen Achse, die dort angegebenen Folgen von Kreisen K_n' und Γ_n' konstruieren, die gegen die Orizykel K und Γ konvergieren. Nun bezeichne man mit K_n und Γ_n nichteuklidische Kreise von gleichen, nichteuklidischen Radien wie K_n' und Γ_n', deren nichteuklidische Mittelpunkte aber in z_n bzw. $f(z_n)$ statt in $|z_n|$ bzw. $|f(z_n)|$ liegen.

Man geht von K_n' zu K_n über durch eine gewöhnliche Drehung der Figur um den Punkt $z = 0$; hierbei konvergiert aber, wegen der ersten Gleichung (10) der Drehungswinkel mit $1 : n$ gegen Null. Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse zwischen Γ_n' und Γ_n. Hieraus folgt aber, daß die Kreise K_n gegen K und die Kreise Γ_n gegen Γ konvergieren.

6. Ein Punkt z, der im Inneren des Kreises K liegt, liegt also auch im Inneren von unendlich vielen Kreisen K_n. Nach dem SCHWARZschen Lemma muß dann der Punkt $w = f(z)$ im Inneren von unendlich vielen Kreisen Γ_n liegen, und hieraus folgt, daß $f(z)$ nicht außerhalb Γ, also entweder im Inneren oder auf dem Rande von Γ, liegen muß.

Man kann aber weiter schließen, daß $f(z)$ sicher nicht auf dem Rande von Γ liegen kann, da sonst in jeder Umgebung von z Punkte z' existieren müßten, die im Inneren von K liegen würden, und für welche, im Widerspruch mit dem letzten Resultat, $f(z')$ außerhalb von Γ wäre.

Einem Punkte z_1, der auf dem Rande von K liegt, entspricht ein Punkt $w = f(z)$, der entweder im Inneren oder auf dem Rande von Γ liegt. Es ist nun, wie wir gleich sehen werden, sehr leicht zu zeigen[1], daß, wenn das letzte für einen einzigen derartigen Wert von z zutrifft, alle Punkte des Randes von K auf den Rand von Γ abgebildet werden, und daß die Funktion $f(z)$ dann eine nichteuklidische Bewegung darstellt, die den Punkt $z = 1$ unverändert läßt. Als solche hat sie dann die Gestalt

$$f(z) = \frac{(1+z) - (\alpha + i\beta)(1-z)}{(1+z) + (\alpha - i\beta)(1-z)} \quad (\alpha > 0, \beta \text{ reell}); \tag{12}$$

hierbei hat α dieselbe Bedeutung wie zuvor.

[1] Siehe BIEBERBACH, a. a. O. S. 125.

7. Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß zwei Orizykel der nichteuklidischen Ebene $|z| < 1$, die beide den Punkt $z = 1$ enthalten, äquidistante Kurven im Sinne unserer nichteuklidischen Geometrie sind: denn sie sind beide orthogonale Trajektorien einer Schar von nichteuklidischen Geraden.

Ferner stellt die Gleichung (8), wenn man für x und y komplexe Werte zuläßt, eine konforme Abbildung der beiden Kreise $|z| < 1$ und $|w| < 1$ aufeinander, bei der die nichteuklidischen Entfernungen invariant bleiben. Es werden also zwei beliebige der betrachteten Orizykel, die die reellen Punkte x_1 und x_2 $(x_1 < x_2)$ enthalten, in zwei Orizykel von derselben nichteuklidischen Entfernung δ transformiert, die durch die Punkte y_1 und y_2 hindurchgehen.

Nun sei z_1 ein Punkt auf dem Orizykel durch x_1, dem ein Punkt $w_1 = f(z_1)$ auf der Begrenzung des Orizykels durch y_1 entspricht.

Wir können auf dem Orizykel durch x_2 einen Punkt z_2 derart wählen, daß die nichteuklidische Entfernung $E(z_1, z_2) = \delta$ ist. Nach dem Resultat des vorigen Paragraphen liegt nun der Punkt $w_2 = f(z_2)$ nicht außerhalb des Orizykels durch y_2, und es ist daher

$$E(w_1, w_2) \geqq \delta .$$

Andererseits ist nach dem gewöhnlichen SCHWARZschen Lemma

$$E(w_1, w_2) \leqq E(z_1, z_2) ,$$

und der Vergleich aller dieser Bedingungen ergibt

$$E(w_1, w_2) = E(z_1, z_2) ,$$

was bekanntlich nur eintreten kann, wenn $f(z)$ eine linear gebrochene Funktion ist, durch welche der Einheitskreis auf sich selbst abgebildet wird. In unserem Falle muß sie die Gestalt (12) besitzen, da sonst für keine Punktfolge $z_1, z_2, \cdots$ die Bedingungen (10) und (11) erfüllt sein würden.

Wir haben hiermit ein Resultat erhalten, das die JULIAsche Behauptung umfaßt, unter Voraussetzungen, die wesentlich einfacher sind. Wir werden sogar noch sehen, daß diese Voraussetzungen allgemeiner sind.

III. Geometrische Deutung und analytische Formulierung des Satzes.

8. Man kann das obige Ergebnis von JULIA in eine sehr einfache geometrische Relation einkleiden. Aus der Betrachtung der nachstehenden Figur 2 folgt nämlich

$$\frac{AP}{PB} = \frac{Ax}{xE} = \frac{1-x}{1+x} ,$$

und ebenso findet man

$$\frac{A_1P_1}{P_1B_1} \leqq \frac{1-y}{1+y} ,$$

falls P_1 nicht außerhalb des Orizykels durch y ist. Bezeichnet man also mit P und P_1 die Punkte, die den Zahlen z und $w = f(z)$ entsprechen, so folgt

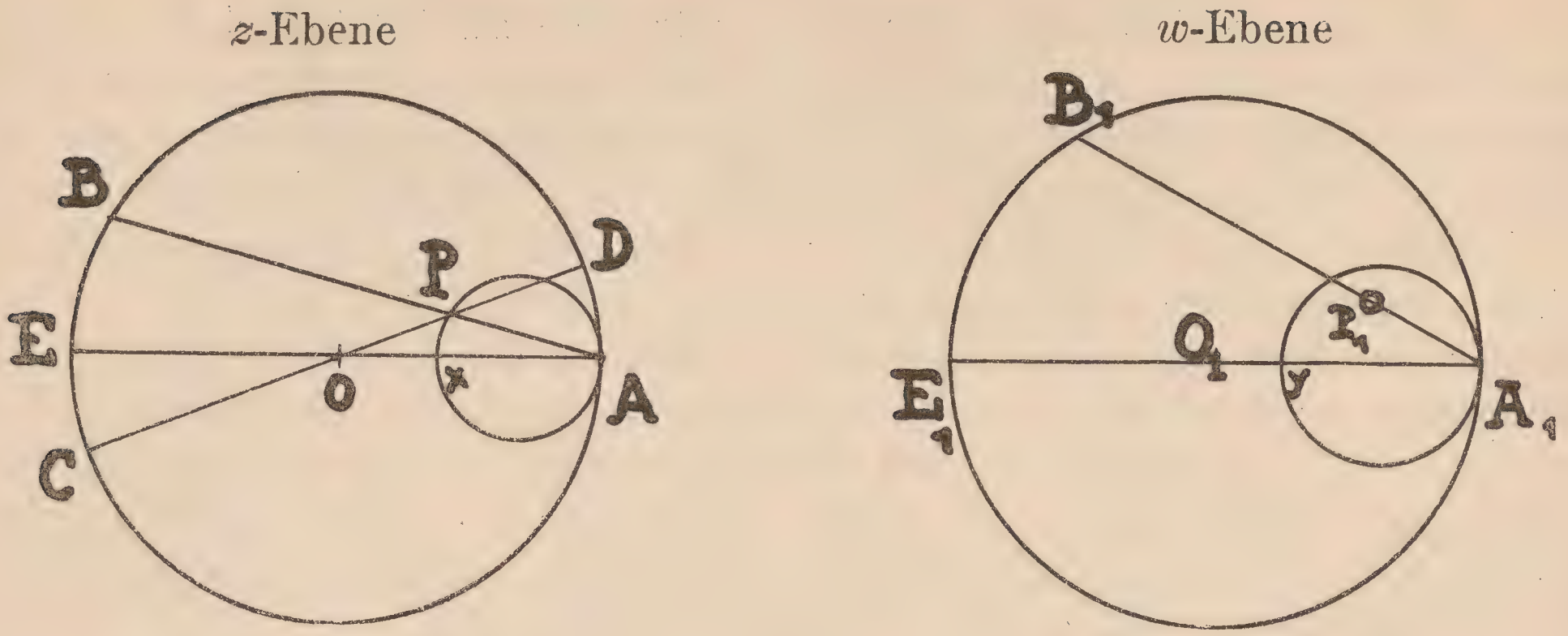


Fig. 2.

aus der Gleichung (8), daß der Inhalt des JULIAschen Satzes auch in der sehr eleganten Gestalt

$$\frac{A_1P_1}{P_1B_1} \leqq \alpha \frac{AP}{PB} \tag{13}$$

geschrieben werden kann.

Man kann für die Verhältnisse $AP:PB$ und $A_1P_1:P_1B_1$ auch analytische Ausdrücke finden. In der Tat folgt aus einem elementargeometrischen Satze:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP \times AP}{AP \times PB} = \frac{AP \times AP}{CP \times PD} = \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{A_1P_1}{P_1B_1} = \frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2};$$

statt der Relation (13) kann man daher schreiben:

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leqq \alpha \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}, \tag{14}$$

eine Bedingung, die wir schon in der Einleitung angegeben haben.

IV. Folgerungen.

9. Man bemerke, daß dann und nur dann keine Folge von Punkten $z_1, z_2, \cdots$ gefunden werden kann, für welche die Relationen (10) und (11) gelten, wenn aus (10) immer folgt, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} = \infty$$

ist.

Wir können daher unsere Resultate folgendermaßen aussprechen:

Satz 1. Wenn die Funktion $w = f(z)$ regulär im Kreise $|z| < 1$ ist, und wenn in diesem Kreise $|f(z)| < 1$ ist, wenn es außerdem Punktfolgen $z_1, z_2, \cdots$ gibt, die im Inneren des Einheitskreises liegen und für welche gleichzeitig die Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} z_n = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} f(z_n) = 1 \tag{15}$$

existieren, so ist entweder für alle derartige Punktfolgen

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \infty, \tag{16}$$

oder es gibt reelle, positive und endliche Zahlen α, so daß für alle $|z| < 1$ die Relation

$$0 < \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leqq \alpha \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \tag{17}$$

gilt.

Gibt es insbesondere unter diesen Zahlen einen Wert α_0 und einen Punkt z', für welche in (17) das Gleichheitszeichen gilt, so besteht die Relation

$$\frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} = \alpha_0 \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \tag{18}$$

für alle Punkte des Einheitskreises, und $f(z)$ wird durch den Ausdruck

$$f(z) = \frac{(1+z) - (\alpha_0 + i\beta)(1 - z)}{(1+z) + (\alpha_0 - i\beta)(1 - z)} \qquad (\alpha_1 > 0,\ \beta \text{ reell}) \tag{19}$$

dargestellt.

10. Die Voraussetzungen, unter welchen wir den Satz von JULIA bewiesen haben, sind die allgemeinsten, für welche die Relation (17) gilt. Man kann nämlich den Satz 1 umkehren und folgenden Satz beweisen:

Satz 2. Wenn die Funktion $w = f(z)$ im Kreise $|z| < 1$ regulär und nicht konstant gleich Eins ist, wenn es außerdem eine positive endliche Zahl α gibt, so daß für alle $|z| < 1$ die Bedingungen

$$0 < \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leqq \alpha \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \tag{20}$$

erfüllt sind, so ist überall im Einheitskreise $|f(z)| < 1$, und es gibt Folgen von Punkten $z_1, z_2, \cdots$ dieses Kreises, für welche die Bedingungen (15) verifiziert sind und gleichzeitig die linke Seite von (16) existiert und $\leqq \alpha$ ist.

Man sieht erstens ohne weiteres ein, daß das Bestehen der Relation $|f(z)| < 1$ für $|z| < 1$ eine direkte Folge von (20) ist, da es sonst Punkte innerhalb des Einheitskreises geben würde, für welche der Ausdruck

$$\frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2}$$

negativ wäre. Nun besagt die Relation (20) nach den Ausführungen des § 8, daß jeder Punkt des Randes des Orizykels K durch die Funktion $w = f(z)$

auf einen Punkt des Inneren oder des Randes eines Orizykels Γ abgebildet wird, wobei nach (9) zwischen den euklidischen Radien r und ϱ dieser Orizykel die Gleichung

$$\varrho = \frac{\alpha r}{1 - r(1-\alpha)} \tag{21}$$

besteht.

Insbesondere wird der reelle Punkt

$$x = 1 - 2r \tag{22}$$

des Randes von K auf einen Punkt $f(x)$ abgebildet, für welchen die Relation

$$|1 - f(x)| \leqq 2\varrho \tag{23}$$

gilt. Der Vergleich der drei letzten Relationen liefert uns jetzt

$$\frac{1 - |f(x)|}{1-x} \leqq \frac{|1 - f(x)|}{1-x} \leqq \frac{\alpha}{1 - r(1-\alpha)}. \tag{24}$$

Hieraus entsteht durch Grenzübergang

$$\liminf_{x=1} \frac{1 - |f(x)|}{1-x} \leqq \liminf_{x=1} \frac{|1 - f(x)|}{1-x} \leqq \alpha \tag{25}$$

eine Relation, mit deren Hilfe man den behaupteten Satz sofort einsieht.

11. Wir sind jetzt imstande, für die gegebene Funktion $f(z)$ die kleinste Zahl α_0 zu bestimmen, für welche die Relation (20) noch für jeden Punkt des Einheitskreises gilt[1]. Nach (25) kann α_0 nicht kleiner sein als

$$\liminf_{x=1} \frac{1 - |f(x)|}{1-x}.$$

Setzt man aber α_0 gleich dieser letzten Zahl, so gibt es Folgen von (reellen) Zahlen $z_1, z_2, \cdots$, für welche die Gleichungen (10) und (11) erfüllt sind und der Grenzwert α in (11) durch α_0 ersetzt ist. Daher kann man auch in den Relationen (24) und (25) die Zahl α durch α_0 ersetzen und erhält mit Berücksichtigung der Definition von α_0

$$\liminf_{x=1} \frac{1 - |f(x)|}{1-x} = \liminf \frac{|1 - f(x)|}{1-x} = \alpha_0;$$

außerdem folgt aber auch aus (24)

$$\limsup_{x=1} \frac{1 - |f(x)|}{1-x} \leqq \limsup_{x=1} \frac{|1 - f(x)|}{1-x} \leqq \alpha_0,$$

und diese beiden letzten Relationen implizieren die Existenz und Gleichheit der Grenzwerte

---

[1] Es ist nützlich, auf folgende Deutung unserer bisherigen Überlegungen aufmerksam zu machen: führt man neben α_0 noch die kleinste Zahl α' ein, für welche die Gleichungen (10) und (11) gleichzeitig verifiziert werden können, so besagt der § 6, daß $\alpha_0 \leqq \alpha'_0$ ist, während die Gleichung (24) zur Folge hat, daß $\alpha'_0 \leqq \alpha_0$ sein muß. Man überlege sich nun, daß die Gleichung $\alpha'_0 = \alpha_0$ als das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit angesehen werden kann, aus welchem alle übrigen Ergebnisse, auch auf anderem als auf dem im Texte angegebenen Wege, leicht gefolgert werden können.

$$(26)\qquad \lim_{x=1}\frac{1-|f(x)|}{1-x}=\lim_{x=1}\frac{1-f(x)}{1-x}=\alpha_0.$$

12. Nach der Formel (6) des § 3 muß die zuletzt bestimmte Zahl α_0 positiv und von Null verschieden sein, und es folgt also aus (26)

$$(27)\qquad \lim_{x=1}\frac{1-|f(x)|}{|1-f(x)|}=1.$$

Setzt man nun

$$(28)\qquad 1-f(x)=\lambda e^{i\vartheta},$$

wobei λ positiv und ϑ reell ist, so erhält man

$$(29)\qquad \frac{1-|f(x)|}{|1-f(x)|}=\frac{2\cos\vartheta-\lambda}{1+\sqrt{1-2\lambda\cos\vartheta+\lambda^2}}.$$

Wenn nun x gegen Eins konvergiert, so konvergiert nach (28) die Zahl λ gegen Null, und nach (27) und (29) muß dann $\cos\vartheta$ und daher auch $e^{i\vartheta}$ gegen Eins konvergieren. Dieses letzte Resultat ergibt mit Berücksichtigung von (26) und (28)

$$(30)\qquad \lim_{x=1}\frac{1-f(x)}{1-x}=\lim_{x=1}\frac{|1-f(x)|\cdot e^{i\vartheta}}{1-x}=\alpha_0.$$

Daher gilt der

Satz 3. Für alle Funktionen $f(z)$, für welche die Voraussetzungen des zweiten Satzes erfüllt sind, existieren für reelle x die Grenzwerte

$$(31)\qquad \lim_{x=1}\frac{1-|f(x)|}{1-x}=\lim_{x=1}\frac{|1-f(x)|}{1-x}=\lim_{x=1}\frac{1-f(x)}{1-x}=\alpha_0,$$

und diese Grenzwerte sind einander gleich.

V. Die Winkelderivierte.

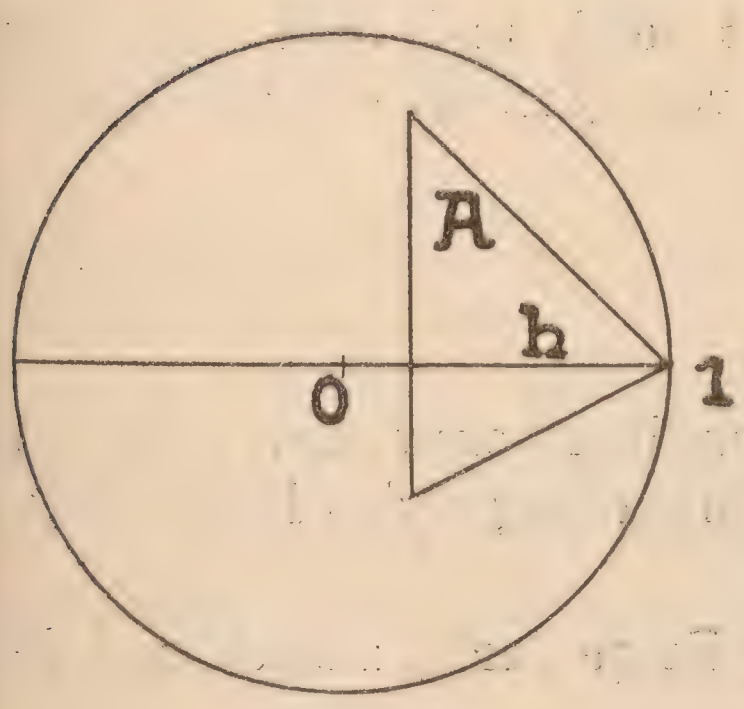


Fig. 3.

13. Wir wollen das letzte Resultat auf komplexe Werte von z übertragen. Zu diesem Zwecke betrachten wir ein Dreieck A, dessen eine Spitze mit dem Punkte $z=1$ zusammenfällt und dessen entgegengesetzte Seite ganz im Inneren des Kreises $|z|<1$ liegt und senkrecht zur reellen Achse ist. Eine der Gleichung (29) ganz analoge Formel verbürgt, wie man weiß, die Existenz einer positiven endlichen Zahl M, so daß für alle Punkte des Inneren von A

$$(32)\qquad \frac{|1-z|}{1-|z|}<M$$

ist. Es sei nun $f(z)$ eine im Kreise $|z| < 1$ reguläre Funktion, deren absoluter Betrag kleiner als Eins ist; für jede innerhalb des Dreiecks A liegende Folge von Punkten $z_1, z_2, \cdots$ gelten nach (32) die Relationen

$$\frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} \leqq \frac{|1-f(z_n)|}{1-|z_n|} \leqq M \left| \frac{1-f(z_n)}{1-z_n} \right| .$$

Ist also nicht für alle derartige und gegen den Punkt $z = 1$ konvergierende Folgen

$$\lim_{n=\infty} \frac{1-f(z_n)}{1-z_n} = \infty ,$$

so besteht nach dem Satze 1 des § 9 die Relation (17), und es gibt eine Zahl α_0, für welche (31) erfüllt ist.

14. Wir nehmen nun an, daß dies letzte der Fall sei, bezeichnen mit h die Höhe des Dreiecks A (s. Figur 3) und führen die Bezeichnungen ein

$$r_n = \frac{\Re(1-z_n)}{h} , \tag{33}$$

$$\rho_n = \frac{\alpha_0 r_n}{1-r_n(1-\alpha_0)} . \tag{34}$$

Ferner setzen wir

$$1-z = r_n(1-t) \tag{35}$$

$$1-f(z) = \rho_n\big(1-\phi_n(t)\big) . \tag{36}$$

Die Größen ρ_n sind aus den r_n so bestimmt worden, daß nach dem Satze von Julia alle Funktionen $\phi_n(t)$ für $|t| < 1$ der Bedingung $|\phi_n(t)| < 1$ genügen. Sie bilden also eine normale Familie.

Nun folgt aus den Gleichungen (34) bis (36)

$$\phi_n(t) - 1 = \frac{(f(z)-1)}{\alpha_0(z-1)}(t-1)\big(1-r_n(1-\alpha_0)\big) . \tag{37}$$

Aus (33) folgt, weil $\lim_{n=\infty} z_n = 1$ ist, daß r_n gegen Null konvergiert. Für reelle Werte von t ist nach (35) auch die Zahl z reell, und man entnimmt aus der letzten Gleichung mit Berücksichtigung von (31), daß dann die Relation

$$\lim_{n=\infty} \phi_n(t) = t \qquad (t \text{ reell}) \tag{38}$$

besteht.

Nach dem Fundamentalsatz der normalen Familien konvergiert also $\phi_n(t)$ gleichmäßig gegen t auf jeder abgeschlossenen Punktmenge des Inneren des Kreises $|t| < 1$.

Wir kehren nun zu unserer ursprünglichen Folge der z_n zurück und definieren die Zahlen t_n durch die Gleichungen

$$1-z_n = r_n(1-t_n) . \tag{39}$$

Die t_n stellen Punkte dar, die sämtlich auf der Basis des Dreiecks A liegen, wenn man dieses Dreieck auf den Kreis $|t|<1$ überträgt. Da diese Basis eine abgeschlossene Punktmenge innerhalb des Kreises $|t|<1$ bildet, muß nach dem letzten Resultat mit der Bezeichnung

$$\phi_n(t_n) = t_n + \tau_n \tag{40}$$

die Relation

$$\lim_{n=\infty} \tau_n = 0$$

gelten.

Nun entnimmt man aus (37), (39) und (40)

$$\frac{1-f(z_n)}{1-z_n} = \frac{\alpha_0}{1-r_n(1-\alpha_0)}\left(1-\frac{\tau_n}{1-t_n}\right);$$

in dieser Gleichung ist $\lim_{n=\infty} r_n = 0$, $\lim_{n=\infty} \tau_n = 0$ und $\Re(1-t_n) = h$, und es folgt also

$$\lim_{n=\infty} \frac{1-f(z_n)}{1-z_n} = \alpha_0 . \tag{41}$$

15. Man kann ein ähnliches Resultat für die Ableitung $f'(z)$ unserer Funktion $f(z)$ gewinnen. Da nämlich die $\phi_n(t)$ eine normale Familie darstellen, die im Inneren von $|t|<1$ gegen t konvergiert, konvergieren die Ableitungen $\phi_n'(t)$ von $\phi_n(t)$ gleichmäßig gegen Eins auf jeder abgeschlossenen Punktmenge im Inneren von $|t|<1$. Insbesondere findet man daher, daß

$$\lim_{n=\infty} \phi_n'(t_n) = 1$$

ist.

Nun erhält man durch Differentiation von (36) nach t, wenn man (35) berücksichtigt,

$$\phi_n'(t) = f'(z)\frac{r_n}{\rho_n},$$

und es ist daher

$$f'(z_n) = \frac{\alpha_0}{1-r_n(1-\alpha_0)}\phi_n'(t_n).$$

Man hat also auch

$$\lim_{n=\infty} f'(z_n) = \alpha_0,$$

wodurch die Existenz einer Winkelderivierten von $f(z)$ im Punkte $z=1$ bewiesen worden ist.

Wir können unsere Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 4. Es sei die analytische Funktion $w=f(z)$ im Kreise $|z|<1$ regulär, und in diesem Gebiete sei $|f(z)|<1$. Wir betrachten im Einheitskreise ein Dreieck A, dessen eine Ecke mit dem Punkte $z=1$ zusammenfällt. Dann existiert für jede im Inneren von A liegende und gegen Eins konvergierende Punktfolge $z_1, z_2, \cdots$ der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 - f(z_n)}{1 - z_n}, \tag{42}$$

der entweder gleich Unendlich oder gleich einer reellen positiven Zahl α_0 ist. Im zweiten Falle gilt außerdem die Relation

$$\lim_{n=\infty} f'(z_n) = \alpha_0,$$

und die Funktion $f(z)$ besitzt eine Winkelderivierte im Punkte $z = 1$. Endlich ist dann die Relation (17), für $\alpha \geq \alpha_0$, ebenfalls im ganzen Einheitskreis erfüllt.

16. Aus dem letzten Satze folgt als unmittelbares Korollar der

Satz 5. Eine Funktion $f(z)$, die den Voraussetzungen des letzten Satzes genügt, besitzt im Punkte $z = 1$ eine Winkelderivierte, wenn man folgende zwei Bedingungen verifizieren kann: 1. im Inneren von A gibt es eine rektifizierbare Kurve γ, die sich bis zum Punkte $z = 1$ erstreckt, und längs welcher $\lim_{z=1} f(z) = 1$ ist; 2. wenn man den reellen Teil irgendeines Punktes ζ von γ mit ξ bezeichnet, so ist das längs der Kurve γ genommene Integral

$$\frac{1}{1 - \xi} \int_{\xi}^{1} f'(z)\, dz \tag{43}$$

gleichmäßig beschränkt, wenn ζ die Kurve γ durchläuft.

In der Tat ist, wenn M eine Schranke für den Ausdruck (43) bezeichnet längs der ganzen Kurve γ

$$\left| \frac{1 - f(\zeta)}{1 - \zeta} \right| < k \cdot M,$$

wobei k eine Zahl bedeutet, die nur von der Gestalt des Dreiecks A abhängt, und daher ist der Satz 4 anwendbar.

17. Nach dem letzten Satze besteht insbesondere eine Winkelderivierte, wenn längs eines Strahles, bei geradliniger Annäherung an $z = 1$, die Funktion $f(z)$ gegen Eins konvergiert und $|f'(z)|$ beschränkt bleibt.

Es gibt auch allgemeinere Konsequenzen unseres Satzes, von denen ich hier nur eine skizzieren will: ist die Funktion $f(z)$ regulär und beschränkt im Einheitskreise, so ist es bekanntlich nicht notwendig, daß bei geradliniger Annäherung an die Peripherie des Kreises die obere Grenze von $|f(z)|$ überhaupt approximiert werden kann. Ist dies aber längs einer Sehne des Kreises, die z. B. im Punkte $z = 1$ mündet, der Fall, so muß entweder die Funktion $f(z)$ in diesem Punkte eine Winkelderivierte besitzen, oder es darf $|f'(z)|$ auf der besagten Sehne nicht zu langsam Unendlich werden, wenn z gegen Eins strebt.

VI. Anwendungen auf konforme Abbildungen.

18. Da die Verhältnisse, die bei der konformen Abbildung des Inneren eines einfach zusammenhängenden Gebietes G auf das Innere eines Kreises in der Nähe des Randes herrschen, bisher nur in ihren gröbsten Umrissen

studiert worden sind, kann eine konsequente Terminologie zur Unterscheidung der verschiedenen möglichen Hauptfälle noch nicht ausgebildet werden. Hier will ich folgende Benennungen benutzen: in einem Punkte P des Randes von G soll die Abbildung winkeltreu heißen, wenn auf der Peripherie des Bildkreises ein Punkt P_1 existiert, derart, daß je zwei Sehnen des Kreises, die sich in P_1 unter einem Winkel ω schneiden, Bilder von Kurven sind, die in P denselben Winkel ω miteinander bilden. Dies kann sehr wohl der Fall sein, ohne daß das Vergrößerungsverhältnis in der Nähe von P endlich bleibt; wenn nun dieses Vergrößerungsverhältnis bei geradliniger Annäherung an P_1 gegen einen wohlbestimmten endlichen Wert strebt, so soll die Abbildung von P auf P_1 konform genannt werden.

Zum Beispiel wird durch die Funktion $w = -zlz$ die Halbebene $\Re z > 0$ in der Umgebung von $z = 0$ schlicht auf ein Stück der w-Ebene abgebildet, und im Punkte $z = 0$ ist die Abbildung winkeltreu, aber nicht konform.

Andererseits ist es evident, daß, wenn die Abbildungsfunktion $w = f(z)$ im Punkte $z = 1$ eine Winkelderivierte im Sinne des vorigen Abschnittes besitzt, die Abbildung in diesem Punkte konform sein muß. Setzt man in der Tat $f'(z) = \lambda e^{i\vartheta}$ ($\lambda > 0$, ϑ reell), so stellt λ das Vergrößerungsverhältnis und ϑ den Drehwinkel bei der Abbildung dar; beide sind stetige Funktionen von z im Inneren und auf dem Rande unseres Dreiecks A, falls $f(z)$ die besagte Winkelderivierte besitzt.

19. In einem Punkte P der Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Gebietes G seien nun zwei sich berührende Kreise C und D gegeben, die folgende Eigenschaften besitzen: jeder Punkt des Inneren von C ist ein Punkt von G, und kein Punkt des Inneren von D liegt in G. Wir wollen beweisen, daß bei jeder konformen Abbildung von G auf das Innere eines Kreises die Abbildung auch im Punkte P selbst konform ist.

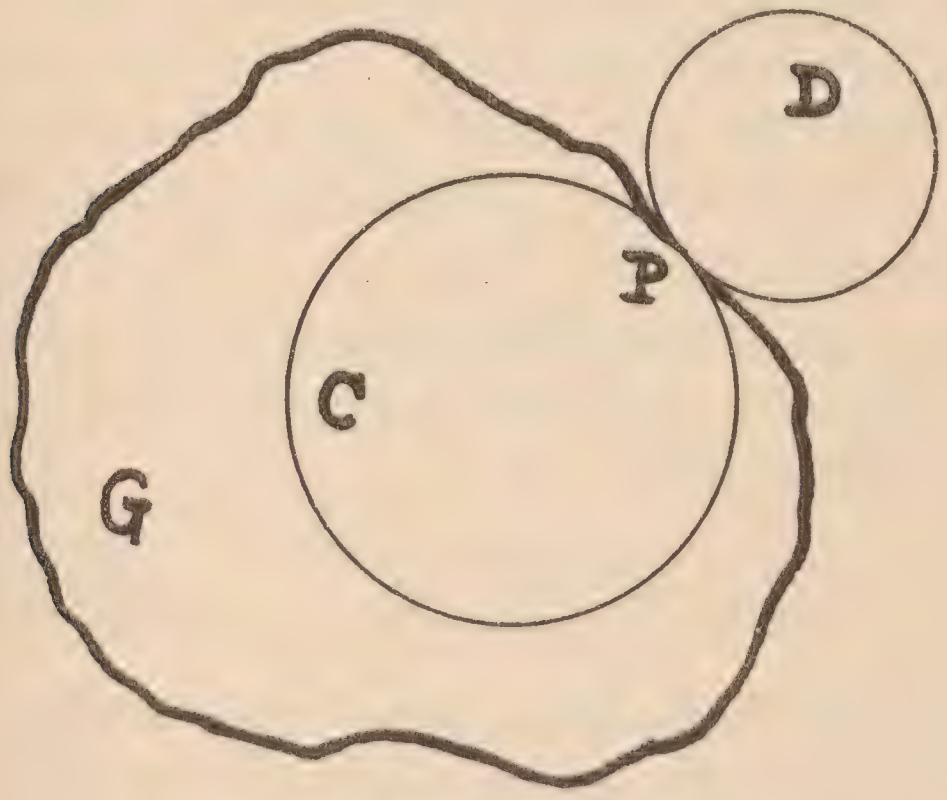


Fig. 4.

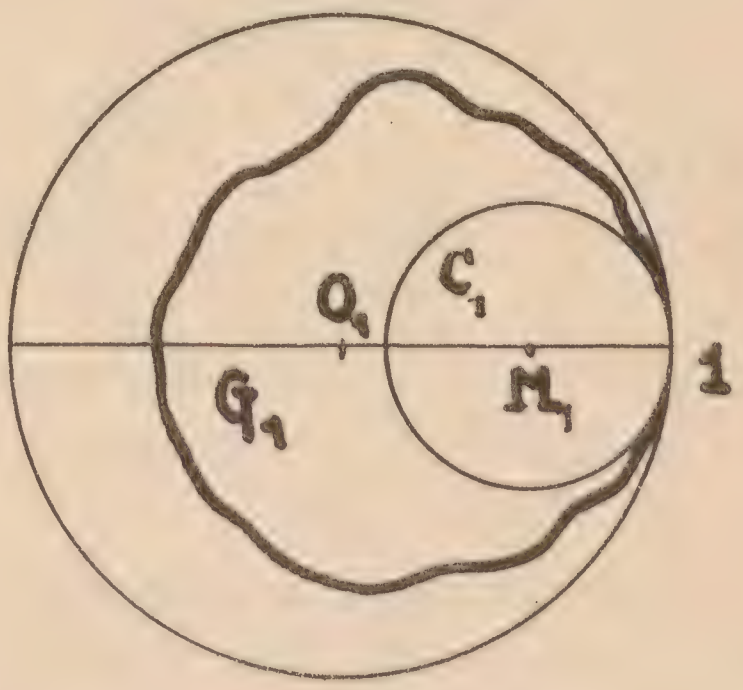


Fig. 5.

Wir machen eine Möbiussche Transformation, durch welche das Innere des Kreises D auf das Äußere des Einheitskreises einer w-Ebene transformiert wird und der Punkt P in den Punkt $w = 1$ übergeht. Hierbei wird C in einen Kreis C_1 mit dem Mittelpunkt M_1 transformiert und das Gebiet G

in ein Gebiet G_1, das im Kreise $|w| < 1$ liegt und den Kreis C_1 in seinem Inneren enthält. Wir betrachten eine Funktion

$$w = f(z),$$

durch welche das Gebiet G_1 auf das Innere des Kreises $|z| < 1$ konform abgebildet wird, so daß z. B. dem Punkte $z = 0$ der Mittelpunkt M_1 des Kreises C_1 entspricht. Um unseren Satz zu beweisen, genügt es, wie wir sahen, zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl von $f(z)$ diese Funktion im Punkte $z = 1$ eine Winkelderivierte besitzt. Nun bemerke man, wenn man mit r_1 den Radius von C_1 bezeichnet, daß jeder Kreis $|z| = \tau < 1$ durch die Funktion $f(z)$ auf eine Kurve abgebildet wird, die den zu C_1 konzentrischen Kreis mit dem Radius $r_1 \tau$ in ihrem Inneren enthält. Es gibt also auf dem Kreise $|z| = \tau$ mindestens einen Punkt ζ, für welchen $f(\zeta)$ reell ist und

$$1 - f(\zeta) < r_1 (1 - |\zeta|)$$

ist. Man kann also eine Folge von Punkten $z_1, z_2, \cdots$ auswählen, die gegen einen Punkt $z_0 = e^{i\vartheta}$ des Einheitskreises konvergieren, so daß für alle diese Punkte

$$\frac{1 - f(z_n)}{1 - |z_n|} < r_1$$

ist und gleichzeitig $f(z_n)$ reell ist. Es ist aber immer möglich, die Abbildung so zu normieren, daß $z_0 = 1$ ist. Die so normierte Funktion $f(z)$ besitzt nach unseren früheren Sätzen eine Winkelderivierte im Punkte $z = 1$, wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

20. Ein sehr lehrreiches Beispiel ist folgendes:

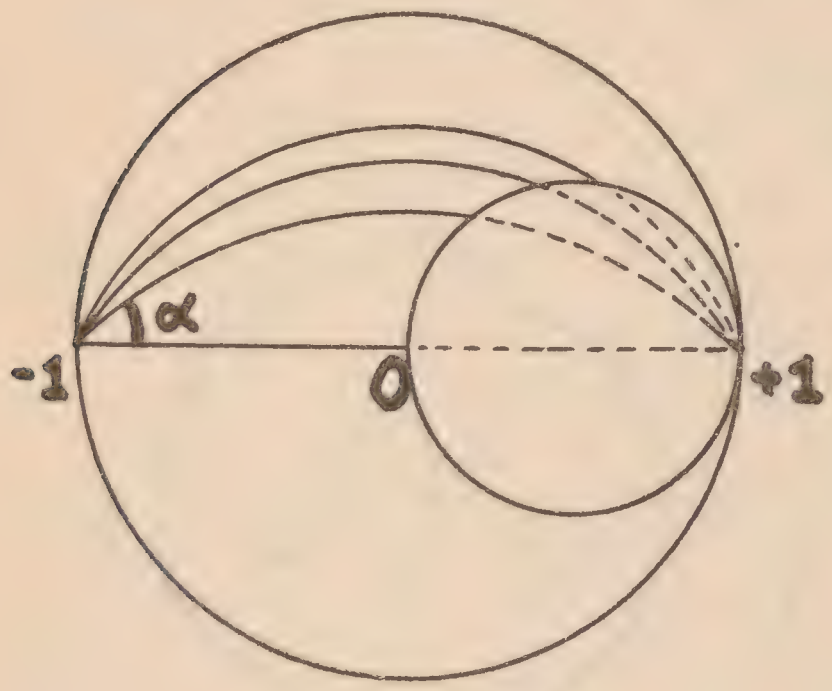


Fig. 6.

Wir schneiden das Innere des Einheitskreises längs gewisser Kreisbögen auf, die die Punkte -1 und $+1$ verbinden und in diesen Punkten die reelle Achse unter einem Winkel α treffen. Auf jedem dieser Kreisbögen wird der Schnitt vom Punkte -1 aus geführt, aber nur so lange fortgesetzt, als der Bogen außerhalb des Kreises $|z - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}$ liegt. Außerdem wählen wir

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{(n-1)}{n}, \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

Dieser so aufgeschnittene Kreis besitzt im Punkte $+1$ die Eigenschaften, die wir im vorigen Paragraphen vom Gebiete G verlangt haben. Die Abbildungsfunktion $f(z)$ hat also eine Winkelderivierte im Punkte $z = 1$. Andererseits kann man nach der Theorie der Primenden eine innerhalb $|z| < 1$ liegende und gegen $z = 1$ konvergierende Kurve konstruieren, deren Bild in der w-Ebene jeden Punkt der oberen Hälfte des Kreises $|w| = 1$ zum Häufungspunkte besitzt. Die Funktion $f(z)$, die unsere Abbildung liefert, ist also, trotz der Existenz

einer Winkelderivierten im Punkte $z = 1$, unstetig in diesem Punkte. Die Kurve, die wir zuletzt betrachtet haben, muß natürlich den Kreis $|z| = 1$ im Punkte 1 berühren.

21. Man kann die letzten Resultate noch ein wenig verallgemeinern: die Schlüsse des § 16 können nämlich leicht auf den Fall übertragen werden, in welchem der Kreis D in der Figur 4 innere Punkte des Gebietes G enthält, wenn nur bei jeder konformen Abbildung von G auf einen Kreis die Punkte von C und die Punkte des Durchschnitts von G mit D auf zwei Punktmengen abgebildet werden, die eine von Null verschiedene Entfernung voneinander haben.

22. Eine viel weitergehende Verallgemeinerung ist folgende: wir nehmen an, daß unser Gebiet G ein Gebiet H enthält, daß G und H einen gemeinsamen Randpunkt P besitzen, und daß die Begrenzung von H in der Umgebung von P durch eine reguläre analytische Kurve γ gebildet wird.

Wir nehmen zweitens an, daß man die konforme Abbildung des Inneren von G auf das Innere des Kreises $|z| < 1$ derart normieren kann, daß ein Stück $h < z < 1$ der reellen Achse das Bild einer Kurve sei, die ganz im Inneren von H verläuft, und den Randpunkt P als Endpunkt besitzt. Bei dieser konformen Abbildung wird also H auf ein Gebiet H_1 im Inneren von $|z| < 1$ abgebildet, das den Punkt $z = 1$ als Randpunkt besitzt. Gibt es nun im Inneren von H_1 einen Kreis $\varkappa$, der den Punkt $z = 1$ auf seiner Peripherie enthält, so wird die Funktion $w = f(z)$, durch welche die soeben betrachtete Abbildung von G auf $|z| < 1$ dargestellt wird, im Punkte $z = 1$ eine Winkelderivierte besitzen.

In der Tat wird durch dieselbe Funktion $w = f(z)$ das Innere von H auf das Innere von H_1 abgebildet, und diese letzte Abbildung kann man in zwei Schritten vollziehen. Man bestimme erstens eine Funktion $w = \phi(u)$, durch welche H auf den Kreis $|u| < 1$ konform abgebildet wird, so daß die Punkte $u = 1$ und P einander entsprechen. Zweitens bestimme man eine Funktion $u = g(z)$, durch welche der Kreis $|u| < 1$ auf H_1 abgebildet wird, und normiere diese Abbildung so, daß

$$f(z) = \phi(g(z))$$

sei. Im Punkte $z = 1$ besitzt nun die Funktion $g(z)$ eine Winkelderivierte, weil die Umkehrung $z = h(u)$ dieser Funktion nach dem § 19 eine Winkelderivierte im Punkte $u = 1$ hat; im Punkte $u = 1$ aber ist $\phi(u)$ regulär und $\phi'(1) \neq 0$, weil der Rand γ von H im Punkte P analytisch ist. Hieraus folgt sofort die angekündigte Eigenschaft von $f(z)$.

23. Ein Beispiel, bei welchem das letzte Resultat angewandt wird, ist folgendes. Es seien $u_1, u_2, \cdots$ unendlich viele Punkte auf der reellen Achse der w-Ebene, die gegen den Punkt $w = 0$ konvergieren. Wir konstruieren auf dieser Achse eine Folge von getrenntliegenden Intervallen $\delta_1, \delta_2, \cdots$, so daß u_k der Mittelpunkt von δ_k sei, und errichten über jedes δ_k als Basis einen Streifen S_k, dessen Rand aus zwei Parallelen zur imaginären Achse besteht. Unser Gebiet G soll nun aus der Vereinigungsmenge aller Punkte der unteren Halbebene mit den Streifen $S_1, S_2, \cdots$ bestehen; ferner wählen

wir für das Gebiet H des vorigen Paragraphen die untere Halbebene, und für den Punkt P den Punkt $w = 0$. Die Kurve, die wir γ genannt haben, ist dann hier die reelle Achse.

Man überlege sich, daß man nach beliebiger Vorgabe der Punkte u_k die Intervalle $\delta_1, \delta_2, \cdots$ sukzessive so klein wählen kann, daß bei der konformen Abbildung von G auf den Einheitskreis das Bild H_1 von H die geforderten Eigenschaften besitzt.

Man erhält auf diese Weise eine Funktion $w = f(z)$, die im Punkte $z = 1$ eine Winkelderivierte besitzt und in keiner Umgebung dieses Punktes beschränkt ist.

Eine Funktion, die die letzte Eigenschaft besitzt, hätte man übrigens auch einfacher bilden können; man braucht nur an Stelle des Gebietes, das auf der Fig. 6 abgebildet ist, ein anderes zu betrachten, das aus diesem durch eine geeignete Möbiussche Transformation entsteht.

Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete.

(Dritte Mitteilung.)

Von Prof. Dr. G. Pólya
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Schur am 10. Januar 1929 [s. oben S. 1].)

1. Ich gehe von folgender Minimumaufgabe aus: *Gegeben sind zwei Punkte a und b in der z-Ebene. Unter allen beschränkten und abgeschlossenen Punktmengen, die ein einfach zusammenhängendes Komplementärgebiet haben und die beiden gegebenen Punkte enthalten, ist eine solche zu finden, deren Robinsche Konstante (transfiniter Durchmesser) möglichst klein ist.* Die Lösung dieser Aufgabe ist bekannt: Die Verbindungsstrecke von a und b besitzt die kleinste Robinsche Konstante, $= \frac{1}{4}|b-a|$. Dies ist eben der Inhalt jenes wichtigen Koebe-Bieberbachschen Satzes, den ich in meiner ersten Mitteilung[1] in einer gewissen Richtung verallgemeinert habe. Man kommt zu einer Verallgemeinerung in anderer Richtung, wenn man die Minimumaufgabe allgemeiner faßt: Anstatt zwei Punkte vorzugeben, gibt man eine beliebige endliche Gesamtheit von Punkten vor. Man betrachtet eine beschränkte und abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}$, die die gegebenen Punkte enthält, und man sucht sie so zu bestimmen, daß ihre Robinsche Konstante möglichst klein sei. Anstatt zu verlangen, daß das Komplementärgebiet von $\mathfrak{A}$ einfach zusammenhängend, also $\mathfrak{A}$ selbst ein Kontinuum sei, kann man allgemeiner bloß die Forderung stellen, daß $\mathfrak{A}$ eine Summe von endlich vielen Kontinua sei, und dabei vorschreiben, welche gegebenen Punkte demselben Teilkontinuum von $\mathfrak{A}$ angehören sollen[2].

In dieser Allgemeinheit formuliert, dürfte die Aufgabe als hoffnungslos erscheinen. Immerhin führten mich meine Untersuchungen über analytische Fortsetzung[3] zu einem Ansatz zur unteren Abgrenzung des genannten Minimums. Der Ansatz besteht in der asymptotischen Auswertung gewisser Determinanten

[1] Vgl. diese Sitzungsberichte 18 (1928), S. 228—232. (Die zweite Mitteilung daselbst S. 280—282.)

[2] Die Anregung zu dieser Aufgabe verdanke ich Hrn. N. Tschebotarëw, der mir eine Aufgabe mitteilte, die sich nur unwesentlich von jenem Spezialfall der hier formulierten unterschied, in welchem $\mathfrak{A}$ ein einziges Kontinuum ist.

[3] Math. Annalen 99 (1928), S. 687—706.

und ergab den genauen Minimalwert der Robinschen Konstante bei gewissen einfachen rotationssymmetrischen Punktkonfigurationen. Man gelangt so zu neuen Verallgemeinerungen des erwähnten Koebe-Bieberbachschen Satzes, sowohl für einfach wie für mehrfach zusammenhängende Gebiete, vgl. die Nr. 4. In der Nr. 2 gebe ich einen neuen Beweis für den zu verwendenden Satz über analytische Fortsetzung.

2. Hauptsatz. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine beschränkte und abgeschlossene, in der z-Ebene gelegene Punktmenge, deren Komplementärgebiet* $\mathfrak{G}$ *zusammenhängend ist und deren transfiniter Durchmesser* τ *heißt. Die durch das Funktionselement*

$$\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^{n+1}}+\cdots=f(z) \tag{1}$$

definierte analytische Funktion $f(z)$ *sei in* $\mathfrak{G}$ *eindeutig und ausnahmslos regulär. Es sei die rekurrente Determinante*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots a_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots a_{2n-2} \end{vmatrix} = A_n \tag{2}$$

gesetzt. Dann ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n^2]{|A_n|} \leqq \tau . \tag{3}$$

Von den durch M. Fekete entdeckten Eigenschaften des transfiniten Durchmessers werden die beiden folgenden gebraucht[1]:

I. *Zu einem gegebenen positiven* ε *gehört eine von endlich vielen geschlossenen analytischen Kurven begrenzte abgeschlossene Menge* $\mathfrak{A}^*$ *von dem transfiniten Durchmesser* τ^**, so beschaffen, daß erstens alle Punkte von* $\mathfrak{A}$ *innere Punkte von* $\mathfrak{A}^*$ *sind, und zweitens*

$$\tau^* < \tau + \varepsilon \tag{4}$$

ist. (Die für jede abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}$ definierte monotone Mengenfunktion $\tau = \tau(\mathfrak{A})$ ist »von oben« stetig.)

II. *Zu einem gegebenen positiven* ε *gehört ein* N*, so beschaffen, daß, sobald* $n > N$ *ist, für* n *beliebige in* $\mathfrak{A}$ *gelegenen Punkte* $z_1, z_2, \cdots z_n$

$$\left| (z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2)\cdots(z_n-z_{n-1}) \right| < (\tau+\varepsilon)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

gilt. (Diskriminantendefinition von τ.)

Die in bezug auf die analytische Fortsetzung des Funktionselementes (1) getroffene Voraussetzung wird voll ausgenutzt, indem wir

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{K}} z^n f(z)\,dz \tag{5}$$

[1] M. Fekete, Math. Zeitschrift 17 (1923), S. 228—249. Vgl. insbesondere S. 234, Fußnote 4, Bemerkung 2 (für I) und die Sätze I und III (für II).

setzen, wobei das Integral längs des vollen Randes $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{A}^*$ erstreckt ist, und zwar so, daß jede Randkurve in positivem Sinne durchlaufen wird. Man beachte, daß, gemäß I, der Rand von $\mathfrak{A}^*$ ganz in $\mathfrak{G}$ verläuft (und dem Rande von $\mathfrak{G}$ beliebig nahekommen kann).

Wenn man (5) in (2) einsetzt, erhält man gemäß einer geläufigen Determinantenformel[1]

$$(6)\quad A_n = \frac{1}{n!\,(2\pi i)^n} \int_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}} \cdots \int_{\mathfrak{R}} f(z_1) f(z_2) \cdots f(z_n) \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 dz_1\, dz_2 \cdots dz_n .$$

Die Gesamtlänge aller in $\mathfrak{R}$ inbegriffenen Kurven sei mit L und das Maximum von $|f(z)|$ auf $\mathfrak{R}$ mit M bezeichnet. Die n Punkte $z_1, z_2, \cdots z_n$ liegen auf $\mathfrak{R}$, also in $\mathfrak{A}^*$; indem man II auf $\mathfrak{A}^*$ anstatt auf $\mathfrak{A}$ anwendet, erhält man aus (6) für genügend großes n

$$|A_n| < \frac{1}{n!\,(2\pi)^n} L^n M^n (\tau^* + \varepsilon)^{n(n-1)} < \left(\frac{L M e}{2\pi (\tau^* + \varepsilon)\, n} \right)^n (\tau^* + 2\varepsilon)^{n^2} ;$$

es wurde noch (4) benutzt. Es folgt weiter

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, |A_n|^{\frac{1}{n^2}} \leq \tau + 2\varepsilon$$

und hieraus wegen der Willkürlichkeit von ε der Hauptsatz.

3. Die beiden Seiten von (3) zeigen eine gewisse »Kovarianz« bei einfachen Transformationen.

Ich werde folgende Bezeichnungen benutzen: Die rekurrente Determinante, die aus den Koeffizienten der Reihe

$$\frac{a_0^*}{z} + \frac{a_1^*}{z^2} + \cdots + \frac{a_n^*}{z^{n+1}} + \cdots = f^*(z)$$

ebenso aufgebaut ist wie A_n aus denen der Reihe (1), vgl. unter (2), wird mit A_n^* bezeichnet. — Es sei (wie bisher) das zusammenhänge Komplementärgebiet der beschränkten abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{G}$, der transfinite Durchmesser von $\mathfrak{A}$ mit τ, das zu $\mathfrak{A}$ gehörige Tschebyscheffsche Polynom n-ten Grades[2] mit $T_n(z)$ bezeichnet. Die analogen, mit einer anderen Punktmenge $\mathfrak{A}^*$ von derselben Natur verbundenen Objekte seien mit $\mathfrak{G}^*$, τ^*, $T_n^*(z)$ bezeichnet. — Wenn z eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ durchläuft, durchlaufen cz, $cz + d$, $z^{\frac{1}{m}}$ Punktmengen, die bzw. mit $c\mathfrak{M}$, $c\mathfrak{M} + d$, $\mathfrak{M}^{\frac{1}{m}}$ bezeichnet werden; c, d sind komplexe Konstanten, $c \neq 0$, m ist eine positive ganze Zahl. $\mathfrak{M}^{\frac{1}{m}}$ ist so verstanden, daß wenn z zu $\mathfrak{M}$ gehört, alle m verschiedenen Werte von $z^{\frac{1}{m}}$ zu $\mathfrak{M}^{\frac{1}{m}}$ gehören.

---

[1] Vgl. z. B. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin 1925), Bd. I, Nr. II 68, S. 48 und S. 208.

[2] Vgl. die Definition bei M. Fekete, a. a. O. S. 232.

Ia. Es sei c konstant, $c \neq 0$, und

$$f^*(z) = f\left(\frac{z}{c}\right) = \frac{c a_0}{z} + \frac{c^2 a_1}{z^2} + \frac{c^3 a_2}{z^3} + \cdots$$

gesetzt. Dann ist offenbar

$$a_n^* = c^{n+1} a_n , \quad A_n^* = c^{n^2} A_n ,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| A_n^* \right|^{\frac{1}{n^2}} = |c| \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| A_n \right|^{\frac{1}{n^2}} . \tag{7a}$$

Wenn $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ regulär und eindeutig ist, so ist $f^*(z)$ in $\mathfrak{G}^* = c\mathfrak{G}$ regulär und eindeutig.

Ib. Wenn $\mathfrak{A}^* = c\mathfrak{A}$ ist, so ist ersichtlicherweise

$$T_n^*(z) = c^n T_n\left(\frac{z}{c}\right) = z^n + \cdots ,$$

und folglich, gemäß der Definition des transfiniten Durchmessers,

$$\tau^* = |c| \tau . \tag{7b}$$

IIa. Es sei

$$f^*(z) = f(z+1) = \frac{a_0}{z+1} + \frac{a_1}{(z+1)^2} + \cdots = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1 - a_0}{z^2} + \cdots .$$

Dann ist

$$a_n^* = a_n - \binom{n}{1} a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0 = \Delta^n a_0 ,$$

und somit, nach einer bekannten Determinantenformel[1]

$$A_n^* = A_n ,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| A_n^* \right|^{\frac{1}{n^2}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| A_n \right|^{\frac{1}{n^2}} . \tag{8a}$$

Wenn $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ regulär und eindeutig ist, so ist $f^*(z)$ in $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G} - 1$ regulär und eindeutig.

IIb. Wenn $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} - 1$ ist, so ist ersichtlicherweise

$$T_n^*(z) = T_n(z+1) ,$$

$$\tau^* = \tau . \tag{8b}$$

Aus den unter I und II betrachteten linearen Transformationen kann man die allgemeinere $z^* = cz + d = d(cd^{-1}z + 1)$ zusammensetzen. Das Resultat läßt sich so zusammenfassen: Bei linearen Transformationen der z-Ebene, die den Punkt $z = \infty$ fest lassen, transformieren sich die beiden Seiten von (3) wie Distanzen.

---

[1] Vgl. z. B. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie (Leipzig 1909) S. 112—114.

IIIa. Es sei m eine natürliche ganze Zahl und

$$f^*(z) = f(z^m) = \frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{2m}} + \frac{a_2}{z^{3m}} + \cdots .$$

Dann ist offenbar

$$a_n^* = 0, \quad \text{wenn} \quad n \not\equiv -1 \pmod{m},$$
$$a_{m\nu+m-1}^* = a_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots .$$

Indem man durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen A_n^* auf ein Produkt von Diagonalminoren reduziert, erhält man

$$A_n^* = 0, \quad \text{wenn} \quad n \not\equiv 0 \pmod{m},$$
$$A_{m\nu}^* = \pm A_\nu^m \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots$$

und folglich

$$(9a) \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \mid A_n^* \mid^{\frac{1}{n^2}} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \mid A_{m\nu}^* \mid^{\frac{1}{m^2\nu^2}} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \mid A_\nu \mid^{\frac{1}{m\nu^2}} = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \mid A_n \mid^{\frac{1}{n^2}} \right)^{\frac{1}{m}} .$$

Wenn $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ regulär und eindeutig ist, so ist $f^*(z)$ in $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^{\frac{1}{m}}$ regulär und eindeutig.

IIIb. Wenn $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$ ist, so ist $\mathfrak{A}^*$ rotationssymmetrisch, d. h. es ist, $e^{\frac{2\pi i}{m}} = \omega$ gesetzt,

$$\mathfrak{A}^* = \omega \mathfrak{A}^* .$$

Mit Rücksicht hierauf folgt aus der Eindeutigkeit des Tschebyscheffschen Polynoms, daß

$$T_n^*(z) = \omega^{-n} T_n^*(\omega z) = z^n + \cdots$$

ist, also daß in der Entwicklung von $T_n^*(z)$ nach Potenzen von z nur solche Potenzen auftreten, deren Exponenten $\equiv n \pmod{m}$ sind. Insbesondere ist, für ganzzahliges ν, $T_{m\nu}^*(z)$ ein Polynom in z^m. Nun beschreibt z^m, während z die Punktmenge $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$ beschreibt, die Punktmenge $\mathfrak{A}$ (und zwar m-mal). Hieraus schließt man gemäß der Definition des Tschebyscheffschen Polynoms, daß

$$T_{m\nu}^*(z) = T_\nu(z^m) = z^{m\nu} + \cdots$$

$$\operatorname{Max}_{z \text{ in } \mathfrak{A}^*} \mid T_{m\nu}^*(z) \mid^{\frac{1}{m\nu}} = \left(\operatorname{Max}_{\zeta \text{ in } \mathfrak{A}} \mid T_\nu(\zeta) \mid^{\frac{1}{\nu}} \right)^{\frac{1}{m}}$$

ist, und hieraus folgt weiter, gemäß der Definition des transfiniten Durchmessers, daß

$$(9b) \quad \tau^* = \tau^{\frac{1}{m}}$$

ist[1].

[1] Der Spezialfall, in dem $\mathfrak{A}$ den Nullpunkt enthält und das Komplement von $\mathfrak{A}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, war bekannt. Vgl. G. Pólya und G. Szegö, a. a. O. Bd. 2, Nr. IV, 115, S. 20 und S. 193.

4. Ich will jetzt die in Nr. 1 geschilderte Minimumaufgabe in einer noch etwas allgemeineren Fassung angreifen.

Es seien fest gegeben $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ Punkte der z-Ebene

$$(10) \qquad c_{11}, c_{12}, \cdots c_{1\mu_1}; c_{21}, c_{22}, \cdots c_{2\mu_2}; \cdots; c_{k1}, c_{k2}, \cdots c_{k\mu_k}.$$

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge, die k (nicht notwendigerweise punktfremde) Teilkontinua enthält, von denen das $\varkappa$-te Teilkontinuum die $\mu_\varkappa$ Punkte $c_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 2}, \cdots c_{\varkappa\mu_\varkappa}$ enthält, $\varkappa = 1, 2, \cdots k$; sonst sei $\mathfrak{A}$ beliebig. Man betrachte $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ Konstanten

$$C_{11}, C_{12}, \cdots C_{1\mu_1}; C_{21}, C_{22}, \cdots C_{2\mu_2}; \cdots; C_{k1}, C_{k2}, \cdots C_{k\mu_k},$$

und zwar sei

$$C_{\varkappa 1} + C_{\varkappa 2} + \cdots + C_{\varkappa\mu_\varkappa} = 0, \quad \varkappa = 1, 2, \cdots k.$$

Die Funktion

$$(11) \qquad f(z) = \sum_{\varkappa=1}^{k} [C_{\varkappa 1} \log (z - c_{\varkappa 1}) + C_{\varkappa 2} \log (z - c_{\varkappa 2}) + \cdots + C_{\varkappa\mu_\varkappa} \log (z - c_{\varkappa\mu_\varkappa})]$$

hat nur die Punkte (10) *zu singulären Punkten und ist regulär und eindeutig im Komplementärgebiet* $\mathfrak{G}$ *der Punktmenge* $\mathfrak{A}$, *auch im Punkte* $z = \infty$, wo ein gewisser Zweig den Wert 0 annimmt. Versteht man unter (1) die Entwicklung dieses Zweiges, so ergibt die linke Seite der Ungleichung (3) eine *feste* untere Schranke für den transfiniten Durchmesser τ der *variablen* Punktmenge $\mathfrak{A}$, die die gestellten Forderungen erfüllt. Offenbar kommt es bei dieser Überlegung nicht auf die spezielle Funktion (11) an, sondern bloß auf ihre hervorgehobenen Eigenschaften.

Der hiemit gemachte Ansatz ist so allgemein, daß man »erwarten« kann, daß er mit einer passenden Funktion, mit (11) oder mit einer anderen, die die wesentlichen Eigenschaften von (11) besitzt, die bestmögliche untere Schranke ergibt. Merkwürdiger scheint mir zu sein, daß die Berechnung des Determinantengrenzwertes links in (3) in einigen Fällen tatsächlich durchführbar ist.

Für die Funktion[1]

$$(12) \qquad f(z) = \log \frac{z-1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \cdots$$

ist der links in (3) auftretende Determinantengrenzwert $= \frac{1}{4}$; der transfinite Durchmesser der geraden Verbindungsstrecke der beiden singulären Punkte von (12), der Punkte $z = 0$ und $z = 1$, ist ebenfalls $= \frac{1}{4}$.

[1] Vgl. G. Pólya, a. a. O. S. 697—699.

Die Funktion

$$\log \frac{z - a^m}{z + b^m} \tag{13}$$

($a > 0$, $b \geqq 0$, $m \geqq 1$, m ganz) geht aus (12) mittels einer linearen Transformation hervor. Daher kann man die Überlegungen der Nr. 3 anwenden, um aus den für (12) berechneten Resultaten die entsprechenden für (13) herzuleiten: Die Kombination von Ia und IIa ergibt, daß der zu (13) gehörige Determinantengrenzwert

$$= \frac{a^m + b^m}{4}$$

ist, und dieselbe Zahl mißt den transfiniten Durchmesser der Verbindungsstrecke von a^m und $-b^m$, der beiden singulären Punkte von (13), vgl. Ib, IIb.

Hieraus folgt weiter für die Funktion

$$\log \frac{z^m - a^m}{z^m + b^m}, \tag{14}$$

daß der zugehörige durch die linke Seite von (3) angegebene Determinantengrenzwert

$$= \left(\frac{a^m + b^m}{4} \right)^{\frac{1}{m}}$$

ist (auf Grund von Nr. 3, IIIa) und daß dieselbe Zahl (auf Grund von Nr. 3, IIIb) den transfiniten Durchmesser der abgeschlossenen Punktmenge mißt, die aus den $2m$ geradlinigen Verbindungsstrecken der $2m$ Punkte

$$a, b\eta, a\eta^2, b\eta^3, \cdots a\eta^{2m-2}, b\eta^{2m-1} \tag{15}$$

mit dem Punkt $z = 0$ besteht $\left(\eta = e^{\frac{\pi i}{m}}\right)$.

Die Funktion (14) ist sicherlich regulär und eindeutig in jedem *einfach* zusammenhängenden Gebiet, das die $2m$ Punkte (15) nicht enthält, und so geht aus dem am Anfang dieser Nummer erörterten, auf der Ungleichung (3) des Hauptsatzes beruhenden Ansatz folgendes hervor:

Wird ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$, *das den Punkt* $z = \infty$ *enthält und die* $2m$ *Punkte* (15) *nicht enthält, so auf das Äußere eines Kreises abgebildet, daß der Punkt* $z = \infty$ *und das Linienelement daselbst fest bleiben, so ist der Radius des betreffenden Kreises* $\geqq \left(\frac{a^m + b^m}{4} \right)^{\frac{1}{m}}$. *Das Gleichheitszeichen wird erreicht, wenn* $\mathfrak{G}$ *zu demjenigen Schlitzgebiet spezialisiert wird, das aus der vollen Ebene nach Wegnahme der* $2m$ *geradlinigen Verbindungsstrecken der* $2m$ *Punkte* (15) *mit dem Nullpunkt übrigbleibt.*

Ich habe in dieser Aussage mich auf den Fall des einfachen Zusammenhanges beschränkt, um den Vergleich mit vorhandenen Resultaten zu er-

leichtern[1]. Aber die Methode trägt etwas weiter und ergibt auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete bestimmte Resultate, insbesondere das folgende:

Es seien a und b zwei verschiedene komplexe Zahlen, m eine natürliche ganze Zahl, so beschaffen, daß

$$0 \leqq \arg \frac{b}{a} < \frac{\pi}{m}, \quad |a| > 0, \ |b| > 0, \quad \text{und} \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

Es sei $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Punktmenge, die k (nicht notwendigerweise verschiedene) Teilkontinua enthält, von welchen das $\varkappa$-te Teilkontinuum die beiden Punkte $a\omega^{\varkappa-1}$ und $b\omega^{\varkappa-1}$ enthält, $\varkappa = 1, 2, \cdots k$. Dann ist der transfinite Durchmesser von $\mathfrak{A}$

$$\geqq \left| \frac{a^m - b^m}{4} \right|^{\frac{1}{m}},$$

und zwar wird das Gleichheitszeichen von einer Punktmenge $\mathfrak{A}$ erreicht, die aus m kongruenten (für $m \geqq 2$ nicht geraden) Linien besteht.

Der Beweis geht mittels der erläuterten Überlegungen daraus hervor, daß die Funktion

$$\log \frac{z^m - a^m}{z^m - b^m}$$

im Außenraum von $\mathfrak{A}$ eindeutig ist.

---

[1] Würde es im voraus feststehen, daß die Minimumaufgabe eine und nur eine Lösung hat, so müßte dieselbe rotationssymmetrisch sein. Daß unter allen *rotationssymmetrischen* Gebieten das erwähnte Schlitzgebiet das Minimum des Abbildungsradius liefert, folgt ohne weiteres aus dem bekannten Fall $m = 1$, worauf sich der öfters genannte Koebe-Bieberbachsche Satz bezieht. — Der Spezialfall $b = 0$ läßt sich noch anders behandeln, durch Anwendung einer Bemerkung von G. Szegö auf die ganzzahlige Potenzreihe

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 4z^m}} = 1 + \binom{2}{1} z^m + \binom{4}{2} z^{2m} + \binom{6}{3} z^{3m} + \cdots$$

und auf Grund von einem früheren Resultate des Verfassers; vgl. G. Pólya, Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. 31 (1922) S. 107—115, Fußnote 2 auf S. 110. Diese Behandlung wäre nicht sehr verschieden von der im Text gegebenen. — Der Satz im Text hat Berührungspunkte mit einer von G. Szegö gestellten Aufgabe, jedoch scheint er zu deren Lösung noch nicht ohne weiteres hinzureichen; vgl. Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. 31 (1922) S. *42* und 32 (1923) S. *45*, Aufgabe 2, ferner G. Pólya und G. Szegö, a. a. O. Bd. 2, Nr. IV, 149, S. 26 und S. 201.

Ausgegeben am 5. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 V

AUG 7 1929
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 14. Februar. (S. 63)
Ludendorff: Untersuchungen über die δ Cephei-Sterne. (S. 64)
A. Marx: Zwei Sätze über schlichte Funktionen. (Mitteilung vom 31. Januar.) (S. 96)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

V. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 14. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Ludendorff sprach über Untersuchungen über die δ Cephei-Sterne.

Die bisher bestimmten spektroskopischen Bahnelemente von langperiodischen δ Cephei-Sternen genügen einer empirischen Formel, nach der es z. B. möglich ist, K aus P, e, ω zu berechnen. Die Elemente von l Carinae und X Cygni zeigen indessen ein abweichendes Verhalten; es entsteht dadurch die Vermutung, daß es zwei verschiedene Arten von langperiodischen δ Cephei-Sternen gibt. Für diese Vermutung spricht auch der Verlauf der Perioden-Häufigkeitskurve dieser Sterne und die starke Streuung der Periodenwerte. Vor allem aber scheint jene Annahme eine Bestätigung in den Beziehungen zu finden, die zwischen der Form der Lichtkurve und der Länge der Periode bestehen. Die langperiodischen δ Cephei-Sterne der ersten Art, die man als »gewöhnliche δ Cephei-Sterne« bezeichnen kann, haben Perioden von weniger als 10 bis 11 Tagen, die der zweiten Art (»X Cygni-Sterne«) dagegen längere Perioden; doch ist die Abgrenzung noch nicht ganz klar, und die Periodenwerte beider Gruppen scheinen sich etwas zu überdecken. Die X Cygni-Sterne haben in ihrem Lichtwechsel große Ähnlichkeit mit den Mira-Sternen.

Auf dem absteigenden Aste der Lichtkurven der gewöhnlichen δ Cephei-Sterne zeigen sich oft Buckel oder Wellen, für deren Lage sich ein äußerst einfaches Gesetz angeben läßt.

Auch die Lichtkurven der kurzperiodischen δ Cephei-Sterne ($P < 1^d$) werden untersucht, und es werden dabei einige neue Tatsachen festgestellt.

Untersuchungen über die δ Cephei-Sterne.

Von H. Ludendorff.

In den »Astronomischen Nachrichten« Bd. 203, S. 361 (1916) habe ich eine Arbeit »Untersuchungen über die δ Cephei- und ζ Geminorum-Sterne« veröffentlicht, in der ich u. a. darauf hingewiesen habe, daß die damals bekannten spektroskopischen Bahnelemente dieser Veränderlichen einer empirischen Gleichung von der Form

$$e \cos \omega = a + bf$$

genügen. Hierin ist

$$f = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2},$$

und a und b sind zwei Konstanten; die Konstante b hat für die typischen δ Cephei-Sterne (d. h. diejenigen mit stark asymmetrischen Lichtkurven) und die ζ Geminorum-Sterne (d. h. diejenigen mit ungefähr symmetrischen Lichtkurven) innerhalb der Genauigkeit ihrer Berechnung denselben Wert, während a für die beiden genannten Gruppen von Sternen verschiedene Werte hat. Wie ich in der zitierten Abhandlung näher ausgeführt habe, würde das Bestehen einer solchen Gleichung den Schluß nahelegen, daß die periodischen Linienverschiebungen in den Spektren der δ Cephei-Sterne durch eine andere Ursache als durch elliptische Bahnbewegung zustande kommen, oder daß sie mindestens nicht allein auf eine solche zurückzuführen sind. Gegenwärtig geben wenigstens letzteres wohl auch die Verfechter der Doppelsterntheorie der δ Cephei-Sterne aus verschiedenen Gründen allgemein zu.

An der Realität der obigen Beziehung wurde ich indessen zweifelhaft, als ich bemerkte, daß die später veröffentlichten Bahnbestimmungen von l Carinae und X Cygni ihr nicht genügen, und ich habe daher im »Handbuch der Astrophysik« Bd. VI, S. 208 f. jener Gleichung jede Bedeutung abgesprochen. Auf Grund weiteren Materiales scheint es indessen, daß ich darin zu weit gegangen bin. Daher soll die Sachlage aufs neue geprüft werden.

In der folgenden Tabelle I sind die hier in Betracht kommenden Bahnelemente der langperiodischen δ Cephei-Sterne, soweit sie gegenwärtig bekannt sind, zusammengestellt. Die Sterne sind in drei Gruppen eingeordnet. Die Gruppe I umfaßt die beiden Sterne l Carinae und X Cygni, die, was den Wert von f angeht, ganz aus der Reihe der übrigen herausfallen, wie ein Blick auf die Tabelle lehrt. Die Sterne der Gruppe II haben (wie übrigens auch die beiden eben genannten) typische δ Cephei-Lichtkurven

mit steilem Helligkeitsaufstieg; eine Ausnahme bildet nur der Veränderliche Y Ophiuchi, der zwar eine fast symmetrische Lichtkurve hat, sich aber von den gewöhnlichen ζ Geminorum-Sternen durch seine verhältnismäßig sehr lange Periode unterscheidet[1]. Für U Vulpeculae liegen sich widersprechende Lichtkurven vor: Nach Luizet (A.N. 175, S. 87), Wendell (A.N. 149, S. 171), Wilkens (A.N. 172, S. 332), Yendell (A.J. 22, S. 75) und Hellerich (unveröffentlicht) besitzt dieser Veränderliche eine Lichtkurve mit steilem Aufstieg, während Müller und Kempf (A.N. 146, S. 37) sowie Seares (Laws Bull Nr. 10) mehr symmetrische Lichtkurven gefunden haben. Es bedürfte einer genaueren Untersuchung, um festzustellen, ob die Lichtkurve vielleicht besonders stark veränderlich ist.

Die Gruppe III endlich umfaßt nur typische ζ Geminorum-Sterne.

Statt des Elementes ω ist in der Tabelle gleich $e\cos\omega$ gegeben, statt f die Größe $100\,f$. Die mit $\Delta e\cos\omega$ überschriebene Kolumne wird später erklärt werden. Die letzte Kolumne gibt einen Nachweis für eine möglichst zuverlässige Lichtkurve jedes Sternes.

Die Elemente der meisten Sterne sind der Tabelle im »Handbuch der Astrophysik« Bd. VI, S. 205 entnommen, woselbst sich die Literaturnachweise finden. Indessen entstammen die Elemente der folgenden Sterne anderen Quellen:

U Vulpeculae: Elemente nach R.F. Sanford, ApJ 67 S. 326 (1928).
S Sagittae: » » T. S. Jacobsen, Lick Bull Nr. 393 (1928).
β Doradus: » » Miss D. Applegate, Lick Bull Nr. 386 (1927).
η Aquilae, W Sagittarii, ζ Geminorum: Elemente nach J. Hellerich, Dissertation, Berlin 1913 (Hellerich hat diese Elemente nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet, während die ursprünglichen Berechner sich mit Näherungsmethoden begnügt hatten).

Für RT Aurigae, Y Sagittarii und α Ursae minoris, deren Bahnelemente sich als veränderlich erwiesen haben, sind je zwei voneinander unabhängige Elementensysteme vorhanden, die in der Tabelle I mit a und b bezeichnet sind.

Innerhalb jeder der drei Gruppen sind die Sterne nach der Größe $e\cos\omega$ geordnet.

Die Sterne SU Cassiopeiae, SU Cygni und R Trianguli australis, deren Elemente nur in roher Annäherung bekannt sind, sind fortgelassen.

In Fig. 1 sind für die Sterne der Gruppen II und III die Werte $e\cos\omega$ als Abszissen und die von $100f$ als Ordinaten eingetragen. Die der Gruppe III entsprechenden Punkte sind durch Kreuze gekennzeichnet; α Ursae minoris ist in der Figur nicht berücksichtigt, da (infolge der Kleinheit von K) e und ω bei diesem Stern erheblich unsicher sind. Man sieht nun, daß, entsprechend dem Befunde in meiner früheren Abhandlung, sowohl die Punkte wie die Kreuze ziemlich nahe je einer geraden Linie liegen, und daß diese beiden Linien nahezu parallel sind.

Eine Ausgleichung für Gruppe II ergibt

$$A) \qquad e\cos\omega = -0.239 + 102.85\,f.$$

[1] Wir kommen auf diesen Fall später noch zurück.

Tabelle I.

	P	K	e	$e\cos\omega$	$100f$	$\Delta e\cos\omega$	Lichtkurve
Gruppe I.							
l Carinae	$35^d.523$	18.9 km	0.36	−0.059	2.02	—	M. N. 84 S. 623
X Cygni	16.3854	28.0	0.25	−0.048	3.39	—	Recherches Astr. de l'Obs. d'Utrecht VIII S. 128
Gruppe II.							
RT Aurigae b ...	3.7281	12.0	0.43	−0.184	0.05	+0.004	Recherches Astr. de l'Obs. d'Utrecht VIII S. 75
Y Ophiuchi	17.1207	7.7	0.16	−0.149	0.08	+0.008	Lembang Annalen II 2, Plate VII
T Vulpeculae ...	4.4358	17.6	0.44	−0.106	0.18	−0.052	Recherches Astr. de l'Obs. d'Utrecht VIII S. 247
RT Aurigae a ...	3.7282	18.0	0.37	−0.032	0.18	+0.022	Recherches Astr. de l'Obs. d'Utrecht VIII S. 75
X Sagittarii.....	7.0118	15.2	0.40	−0.025	0.20	+0.008	Lembang Annalen II 2, Plate II
δ Cephei	5.3664	19.7	0.48	+0.038	0.29	−0.021	Handb. d. Astroph. VI S. 189
Y Sagittarii b ...	5.7733	20.6	0.42	+0.112	0.39	−0.050	Harvard Circ 236
Y Sagittarii a ...	5.7733	19.3	0.21	+0.154	0.40	−0.018	Harvard Circ 236
η Aquilae.....	7.1764	20.0	0.47	+0.194	0.40	+0.022	Handb. d. Astroph. VI S. 189
U Vulpeculae ...	7.9915	18.8	0.45	+0.238	0.39	+0.076	A. N. 4181
W Sagittarii	7.5944	20.4	0.36	+0 262	0.55	−0.064	Lembang Annalen II 2, Plate II
S Sagittae	8.3821	20.5	0.48	+0.348	0.51	+0.063	Handb. d. Astroph. VI S 189
Gruppe III.							
α Ursae minoris a	3.9681	3.03	0.09	+0.031	0.0011	(+0.015)	A. N. 4518
SZ Tauri	3.1484	10.9	0.24	+0.055	0.04	+0.006	A. N. 4532
α Ursae minoris b	3.9681	2.74	0.19	+0.129	0.0008	(+0.113)	A. N. 4518
ζ Geminorum ...	10.1546	13.3	0.20	+0.186	0.23	−0.022	Handb. d. Astroph. VI S. 190
β Doradus	9.8417	15.4	0.3	+0.300	0.32	+0.016	Harvard Circ No. 316

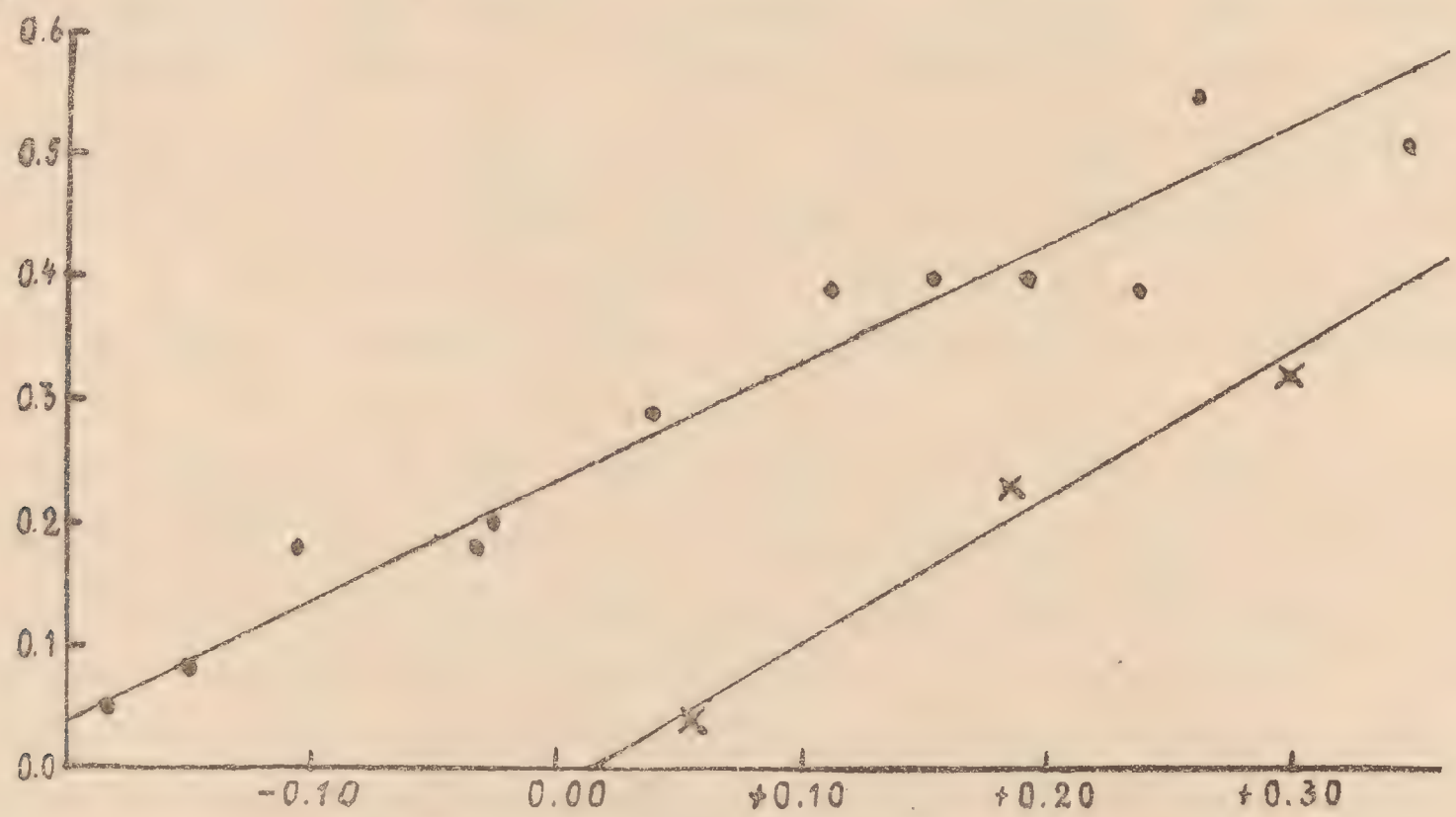


Fig. 1.

Der m. F. des ersten Gliedes auf der rechten Seite ist ±0.029, der des Koeffizienten von f ist ±8.45.

Für Gruppe III kann man folgenden genäherten Ansatz machen:

B) $$e\cos\omega = +0.015 + 84.0f,$$

bei dessen Ableitung α Ursae minoris aus dem oben angegebenen Grunde außer Betracht gelassen wurde. Mittlere Fehler können hier bei der gerin-

gen Zahl der Sterne nicht angegeben werden. Es ist aber klar, daß der Unterschied zwischen den Koeffizienten von f in A) und B) nicht reell zu sein braucht. In der früheren Abhandlung haben sich als Konstanten der dort in etwas anderer Form geschriebenen Gleichungen ergeben für A) -0.218 bzw. $+92.7$, für B) $+0.024$ bzw. $+70$. Damals beruhte die Gleichung A) auf 8 Elementen-Systemen von 8 Sternen, B) auf 3 Elementen-Systemen von 3 Sternen (einschließlich α Ursae minoris). Jetzt beruht A) auf 12 Elementen-Systemen von 10 Sternen, B) auf 3 Elementen-Systemen von 3 Sternen (ausschließlich α Ursae minoris). Die numerischen Werte haben sich nur wenig geändert[1].

In der vorletzten Kolumne der Tabelle I sind unter $\Delta e \cos\omega$ die Differenzen zwischen den aus den Elementen abgeleiteten und den nach A) bzw. B) berechneten $e\cos\omega$ gegeben. In Gruppe II treten die größten Werte von $\Delta e\cos\omega$ bei U Vulpeculae, W Sagittarii und S Sagittae auf. Die Bahnbestimmung von U Vulpeculae ist nicht sehr genau, die Elemente sind nicht nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. Bei S Sagittae lassen sich die Radialgeschwindigkeiten nicht durch einfache elliptische Bahnelemente darstellen, zudem ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes veränderlich. Auch bei W Sagittarii tritt eine erhebliche sekundäre Welle in der Geschwindigkeitskurve auf. Die stärkeren Abweichungen bei diesen Sternen sind also wohl verständlich. Es ist auch zu beachten, daß bei den δ Cephei-Sternen die Auswahl der zur Messung der Radialgeschwindigkeiten benutzten Linien von Einfluß auf die Geschwindigkeitskurve ist.

In Gruppe III ist $\Delta e\cos\omega$ bei dem Elementen-System b von α Ursae minoris sehr groß; auf die vermutliche Ursache ist schon hingewiesen worden.

Mit Hilfe der Formeln A) und B) kann man, wenn drei von den Elementen P, K, e, ω gegeben sind, das vierte berechnen. Besonders interessant ist die gute Darstellung, die man erhält, wenn man K aus P, e, ω berechnet. Es ist:

$$f = [3.0164 - 10]\,(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\,K^3P.$$

Man erhält daher aus A):

$$A_1)\qquad K^3 = \frac{e\cos\omega + 0.239}{[5.0286-10]\,(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\,P}$$

und aus B):

$$B_1)\qquad K^3 = \frac{e\cos\omega - 0.015}{[4.9407-10]\,(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\,P}.$$

In der folgenden Tabelle II sind die beobachteten K und die Differenzen ΔK zwischen ihnen und den nach A_1) bzw. B_1) berechneten K gegeben (im Sinne

[1] Die erst in roher Annäherung bekannten Elemente von SU Cassiopeiae, SU Cygni und R Trianguli australis scheinen ebenfalls innerhalb der recht weiten Grenzen ihrer Genauigkeit den Gleichungen A) bzw. B) zu genügen. Auch die sehr unsichere mittlere Geschwindigkeitskurve von TU Cassiopeiae (Ap. J. 68, S. 169 [1928]) scheint der Gleichung A) nicht zu widersprechen.

Beobachtung—Rechnung). Die ΔK dürften, außer vielleicht bei T Vulpeculae, nirgends größer sein als die Unsicherheit von K; man vergleiche hierzu die Ausführungen in meiner zitierten Abhandlung. Bei α Ursae minoris versagt die Formel B_1) allerdings ganz; der Grund hierfür dürfte, wie gesagt, in der Unsicherheit von e und ω liegen.

Tabelle II.

	K	ΔK		K	ΔK
Gruppe II.			Gruppe III.		
η Aquilae	20.0km	− 0.2km	β Doradus	15.4km	− 0.2km
RT Aurigae a . . .	18.0	− 0.6	ζ Geminorum . . .	13.3	+ 0.6
RT Aurigae b . . .	12.0	− 0.3	SZ Tauri	10.9	− 0.8
δ Cephei	19.7	+ 0.4			
Y Ophiuchi	7.7	− 0.3			
S Sagittae	20.5	− 0.8			
W Sagittarii	20.4	+ 0.7			
X Sagittarii	15.2	− 0.3			
Y Sagittarii a . . .	19.3	+ 0.3			
Y Sagittarii b . . .	20.6	+ 0.9			
T Vulpeculae . . .	17.6	+ 1.9			
U Vulpeculae . . .	18.8	− 1.1			

Besonders auffällig ist es, daß die beiden Elementensysteme von RT Aurigae, die recht stark voneinander verschieden sind, der Gleichung A) bzw. A_1) mit großer Genauigkeit genügen. Auch bei den beiden Elementensystemen von Y Sagittarii ist dies in durchaus befriedigendem Maße der Fall.

Wir haben uns bisher nur mit den langperiodischen δ Cephei-Sternen beschäftigt; es sind aber auch für einen kurzperiodischen, nämlich RR Lyrae, die Bahnelemente bekannt, und zwar zwei unabhängige Systeme:

	ω	e	$e \cos \omega$	f	
a)	110°.8	0.25	−0.089	0.0006	R. Prager, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1916, S. 216,
b)	120.6	0.30	−0.153	0.0015	R. F. Sanford, Ap J 67, S. 319 (1928).

Setzt man diese Zahlen in A) ein (RR Lyrae hat einen steilen Helligkeitsanstieg, es kann also nur A) in Betracht kommen), so ergibt sich

a) $\Delta e \cos \omega = +0.088$
b) $\quad\quad\quad\quad -0.068.$

Die beiden RR Lyrae entsprechenden Punkte würden also zu beiden Seiten der oberen Geraden in der Figur 1 liegen. Die $\Delta e \cos \omega$ sind zwar ziemlich groß, aber es ist sehr wohl möglich, daß die Ungenauigkeit der Bahnelemente die Ursache hiervon ist. (Bei den Elementen a beträgt z. B. der mittlere Fehler von $\omega \pm 11°.1$. Nehmen wir $\omega = 122°$ statt 110°.8, so wird $e \cos \omega = -0.132$ und $\Delta e \cos \omega$ würde auf +0.045 herabsinken. Die Elemente b sind nicht nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt). Es scheint also, als ob auch der kurzperiodische δ Cephei-Veränderliche RR Lyrae die Gleichung A)

erfüllt, ebenso wie bei ihm auch die Beziehung zwischen der Amplitude der Helligkeiten und der der Radialgeschwindigkeiten dieselbe ist wie bei den langperiodischen δ Cephei-Sternen (vgl. meine zitierte Abhandlung S. 374). Ob man aus dem Verhalten von RR Lyrae Schlüsse auf das der übrigen kurzperiodischen δ Cephei-Sterne machen darf, ist natürlich fraglich.

In dem Umstande, daß zwar sowohl für die typischen δ Cephei- wie für die ζ Geminorum-Sterne eine Gleichung von der Form

$$e \cos \omega = a + b \cdot f$$

besteht, daß aber die Konstante a merklich verschieden für die beiden Arten von Veränderlichen ist, scheint eine Verschiedenheit der letzteren angedeutet zu sein. Andererseits ist hervorzuheben, daß sich auf Grund der Lichtkurven eine scharfe Grenze zwischen den typischen δ Cephei- und den ζ Geminorum-Sternen nicht ziehen läßt, da Übergangsformen, wenn auch ziemlich selten, vorkommen. Es besteht also hier eine einstweilen noch nicht zu beseitigende Unklarheit.

Die hier auseinandergesetzten Ergebnisse würden recht befriedigend sein, wenn nicht die Sterne der Gruppe I, l Carinae und X Cygni, zu ihnen im Widerspruch ständen. Diese beiden Sterne weisen Werte von f auf, die viel größer sind als die bei allen anderen bisher spektrographisch näher untersuchten δ Cephei- und ζ Geminorum-Sternen. Welcher Deutung der bei diesen Veränderlichen beobachteten Erscheinungen man auch beipflichten mag, man wird annehmen müssen, daß sich l Carinae und X Cygni in irgendeiner Beziehung (z. B. durch ihre Masse) von den übrigen stark unterscheiden. Es ist mir indessen nicht gelungen, in der Lichtkurve oder im Spektralcharakter der beiden genannten Sterne prinzipielle Unterschiede von den anderen zu erkennen. Auffällig ist aber bei beiden die lange Periode[1], nämlich 35^d bzw. 16^d, jedoch fügt sich Y Ophiuchi ($P = 17^d$) gut in die Gruppe II ein, so daß die Länge der Periode allein nicht das Maßgebende zu sein scheint. Es wäre nun denkbar — diese Vermutung ist allerdings zunächst sehr hypothetisch —, daß unter den δ Cephei-Sternen mit verhältnismäßig langen Perioden eine neue Art von solchen Veränderlichen auftritt[2], die von den übrigen verschieden sind und deren Repräsentanten l Carinae und X Cygni sein würden. Das Vorhandensein dieser neuen Art von δ Cephei-Sternen (ich will sie »X Cygni-Sterne« nennen) könnte sich — so kann man in weiterem, ebenfalls hypothetischen Gedankengange vermuten — in der von der Perioden-

[1] Auch RU Camelopardalis ($P = 22^d$), T Monocerotis ($P = 27^d$), WZ Sagittarii ($P = 22^d$) und W Virginis ($P = 17^d$) gehören, wie man aus der Amplitude ihrer Radialgeschwindigkeiten schließen kann, zu den δ Cephei-Sternen mit ungewöhnlich großen f-Werten.

[2] Dieser Gedanke ist auf Grund anderer Betrachtungen auch schon von J. SCHILT [Ap J 64 S. 149 (1926)] ausgesprochen worden. Auf eine neuere Arbeit dieses Autors über denselben Gegenstand werden wir am Schlusse dieser Abhandlung näher eingehen. Auch T. ARAKI (Japanese Journal of Astronomy and Astrophysis 5, Nr. 3, 1928) hat auf Grund des Verlaufes der Periodenhäufigkeitskurve und auf Grund der eigentümlichen Abhängigkeit der Werte $\varepsilon = \frac{M-m}{P}$ von der Periode die Ansicht ausgesprochen, daß die langperiodischen δ Cephei-Sterne in zwei Gruppen zerfallen. Meine obigen Ausführungen sind durch diese Arbeit nicht beeinflußt worden, da ich erst nachträglich darauf aufmerksam wurde.

länge abhängigen Häufigkeitsverteilung der δ Cephei-Sterne zeigen. Es müßte sich, wenn z. B. die X Cygni-Sterne ein Häufigkeitsmaximum bei $P = 16^d$ haben, in der Gesamthäufigkeitskurve der δ Cephei-Sterne ein sekundäres Maximum bei $P = 16^d$ angedeutet finden. Dieses Maximum braucht natürlich nicht sehr deutlich zu sein, wenn die Zahl der X Cygni-Sterne relativ gering ist. Wir wollen nun sehen, ob eine derartige Erscheinung festzustellen ist.

Um eine dem gegenwärtigen Stand der Kenntnis entsprechende Häufigkeitskurve der langperiodischen δ Cephei-Sterne abzuleiten, wurde die Tabelle II in R. Pragers »Katalog und Ephemeriden veränderlicher Sterne für 1928«[1] benutzt. In dieser Tabelle wurden zunächst alle RV Tauri-Sterne, ferner UU Herculis[2] und S Scuti[3] gestrichen, und alsdann wurden die Perioden aller langperiodischen δ Cephei-Sterne ($P > 1^d$) auf 2 Dezimalen herausgeschrieben. Die Sterne mit $P > 50^d$ wurden weggelassen, da ihre Zugehörigkeit zur δ Cephei-Klasse zweifelhaft ist. Da die langperiodischen δ Cephei-Sterne ein sehr großes Periodenintervall (von $1^d.58$ bis $45^d.15$, also etwa 1 : 29) umfassen, so wurden von den abgekürzten Periodenwerten die zweistelligen Logarithmen genommen, und auch diese wurden abgezählt. Das Resultat der Abzählung nach P und nach $\log P$ ist in folgender Tabelle enthalten:

Tabelle III.

P	n	P	n	$\log P$	n
$1^d.0$– $2^d.0$	2	$20^d.0$–$22^d.0$	3	0.00–0.09	0
2.0– 3.0	4	22.0–24.0	3	0.10–0.19	0
3.0– 4.0	12	24.0–26.0	3	0.20–0.29	2
4.0– 5.0	23	26.0–28.0	2	0.30–0.39	1
5.0– 6.0	17	28.0–30.0	2	0.40–0.49	3
6.0– 7.0	16	30.0–32.0	0	0.50–0.59	11
7.0– 8.0	15	32.0–34.0	1	0.60–0.69	23
8.0– 9.0	4	34.0–36.0	2	0.70–0.79	21
9.0–10.0	6	36.0–38.0	0	0.80–0.89	24
10.0–11.0	11	38.0–40.0	1	0.90–0.99	14
11.0–12.0	3	40.0–42.0	1	1.00–1.09	17
12.0–13.0	5	42.0–44.0	0	1.10–1.19	14
13.0–14.0	3	44.0–46.0	1	1.20–1.29	16
14.0–15.0	5	46.0–48.0	0	1.30–1.39	7
15.0–16.0	5	48.0–50.0	0	1.40–1.49	6
16.0–17.0	5			1.50–1.59	4
17.0–18.0	5			1.60–1.69	2
18.0–19.0	4				
19.0–20.0	1				

Die Häufigkeitskurve[4] der P sowohl wie der $\log P$ ist nach diesen Zahlen also sehr unsymmetrisch, einem steilen Anstieg folgt ein weit langsamerer Abfall. Beide Kurven weisen deutlich einen Stillstand im absteі-

[1] Kleinere Veröffentlichungen der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg Nr. 3.
[2] Vgl. Harvard Bull Nr. 857.
[3] AN 231 S. 370.
[4] Graphische Darstellungen beider Kurven auf Grund eines etwas anderen Materials siehe bei E. Hertzsprung, BAN Nr. 96, S. 117.

genden Aste auf, der in der Häufigkeitskurve der log P besonders klar hervortritt und den Werten log $P = 0.90$ bis 1.29 entspricht. Man könnte hierin nach dem oben Gesagten vielleicht in der Tat ein Anzeichen für das Auftreten der hypothetischen X Cygni-Sterne sehen.

Interessant ist es, die Häufigkeitskurve der langperiodischen δ Cephei-Sterne mit der der kurzperiodischen und mit der der Mira-Sterne zu vergleichen. Für die Verteilung der kurzperiodischen δ Cephei-Sterne erhält man nach R. Pragers Ephemeriden für 1928 folgende Tabelle:

Tabelle IV.

P	n
$0^d.00-0^d.10$	0
0.10—0.20	1
0.20—0.30	3
0.30—0.40	19
0.40—0.50	32
0.50—0.60	37
0.60—0.70	14
0.70—0.80	1
0.80—0.90	1

Die Häufigkeitskurve ist hiernach ziemlich symmetrisch; vielleicht ist der absteigende Ast etwas steiler als der aufsteigende. (Auffällig ist übrigens bei weiterer Spezialisierung der Periodenwerte, daß in das Intervall $P = 0^d.400$ bis $0^d.450$ nur 7 Sterne, in das Intervall $P = 0^d.450$ bis $0^d.500$ dagegen 25 Sterne fallen.)

Die Häufigkeitskurve der Mira-Sterne der Spektralklasse Me ist symmetrisch[1]. Für die Gesamtheit der Mira-Sterne ohne Rücksicht auf das Spektrum[2] ist dagegen die Häufigkeitskurve ein wenig unsymmetrisch in dem Sinne, daß der absteigende Ast etwas weniger steil als der aufsteigende ist. Vielleicht kommt diese Erscheinung vorwiegend dadurch zustande, daß die Mira-Sterne der Spektralklasse N meist lange Perioden haben. Jedenfalls ist aber die Asymmetrie nicht annähernd so groß wie bei den langperiodischen δ Cephei-Sternen. Letztere nehmen also hinsichtlich der Form ihrer Häufigkeitskurve durchaus eine Sonderstellung ein, und eine solche besitzen sie auch hinsichtlich des Perioden-Intervalles, das sie umfassen. Nach dem augenblicklichen Stande der Kenntnis liegen nämlich die Perioden der kurzperiodischen δ Cephei-Sterne zwischen $0^d.135$ (XX Cygni) und $0^d.81$ (UZ Cassiopeiae), die der langperiodischen zwischen $1^d.58$ (SW Tauri) und $45^d.15$ (SV Vulpeculae) oder gar 64^d (CG Sagittarii, vgl. Harv. Bull 846). Die Perioden der Mira-Sterne mit Me-Spektrum liegen zwischen 63^d und 731^d (RU Velorum und VX Sagittarii, vgl. Harv. Bull 861). Berechnet man für die drei genannten Klassen von Veränderlichen den Mittelwert P_m der Perioden und aus den Abweichungen der einzelnen Periodenwerte von diesem Mittelwerte

[1] Vgl. Handbuch der Astrophysik, Bd. VI (im folgenden mit Hdb. VI zitiert), S. 117f.
[2] Hdb. VI, S. 118, zweite Tabelle.

den mittleren Fehler σ der einzelnen Perioden sowie den Wert σ/P_m, so findet man (n = Zahl der Sterne):

	P_m	σ	σ/P_m	n
Kurzper. δ Cephei-Sterne	$0^d.494$	$\pm 0^d.110$	± 0.22	108
Langper. » »	10.7	± 8.15	± 0.76	165
Me-Sterne	303	± 91.5	± 0.30	323

Für die Ableitung der Zahlen in den beiden ersten Zeilen wurden dieselben Sterne benutzt, die weiter oben zur Ableitung der Perioden-Häufigkeitskurven dienten, für die der Zahlen in der letzten Zeile die in Hdb. VI, Tab. I (S. 103—108) zusammengestellten Me-Sterne; zu ihnen wurden noch die beiden obengenannten Sterne RU Velorum und VX Sagittarii hinzugenommen, durch die das Periodenintervall der Me-Sterne nicht unerheblich erweitert wird. Bei den langperiodischen δ Cephei-Sternen wurde CG Sagittarii nicht mitbenutzt, denn dieser Veränderliche liegt sehr nahe einem kugelförmigen Sternhaufen, und es ist nicht unmöglich, daß er zu diesem in Beziehung steht.

Die obigen Zahlen zeigen, daß σ/P_m, d. h. der in Einheiten der mittleren Periode ausgedrückte mittlere Fehler der einzelnen Periode, für die kurzperiodischen δ Cephei-Sterne und die Me-Sterne nicht sehr verschieden und viel kleiner ist als für die langperiodischen δ Cephei-Sterne. (Würde man bei diesen CG Sagittarii mitnehmen, so würde σ/P_m noch etwas größer.) Auch diese Erscheinung kann man vielleicht als Anzeichen dafür auffassen, daß die langperiodischen δ Cephei-Sterne in zwei Gruppen zerfallen. Natürlich kann man aber auch die Ansicht vertreten, daß sich diese Klasse von Veränderlichen eben wirklich in dem erörterten Punkte anders verhält als die beiden anderen.

Noch eine Bemerkung ist hinsichtlich der obigen Vergleichung zu machen: Um sicher zu gehen, daß die für die Untersuchung zur Verwendung kommenden Mira-Sterne wirklich eine Einheit darstellen, wurden nur die der Spektralklasse Me benutzt, denn es ist bekannt, daß sich die Mira-Sterne der anderen Spektralklassen in ihrem Lichtwechsel systematisch von denen der Klasse Me unterscheiden.

Es soll nun weiter untersucht werden, ob sich in den Lichtkurven der langperiodischen δ Cephei-Sterne irgendwie eine Zweiteilung dieser Klasse von Veränderlichen angedeutet findet. Nachdem ich selbst vor längerer Zeit eine merkwürdige Abhängigkeit der Form der Lichtkurven von der Länge der Periode angedeutet gefunden hatte[1], hat E. Hertzsprung[2] die Frage auf Grund eines sehr viel zuverlässigeren Materiales untersucht und ist zu sehr bemerkenswerten Ergebnissen gelangt. Er stellt 37 besonders gut bestimmte Lichtkurven, nach der Periode geordnet, zusammen und zieht daraus folgende Schlüsse, die hier wörtlich wiedergegeben seien:

> »At the shorter periods up to about 6^d the curves show the characteristic regular δ Cephei form with quick rise and slow decrease, without additional peculiarities. Above 6^d a secondary wave on the

[1] AN 209, S. 217 (1919).
[2] BAN Nr. 96 (1926).

descending branch of the lightcurve makes its appearance. This secondary wave is a very characteristic feature of the next following periods. It is well marked on the very accurate lightcurve of η Aquilae (period $7^d.18$). On the lightcurve of S Sagittae ($8^d.38$) the secondary wave appears shortly after maximum and has the character of a secondary maximum. For periods between 10^d and 13^d the secondary wave is, when present, situated on top of the suppressed ordinary maximum, the form of the lightcurve being nearly symmetrical. Characteristic curves of this kind are those of AQ Carinae ($9^d.77$) and Z Lacertae ($10^d.89$). The secondary wave has thus superseded the maximum shown at shorter periods. At periods of about 14^d or 15^d the new superposed maximum occurs earlier, giving the lightcurve again an unsymmetrical shape with a hesitation in the increase of the brightness about midway between minimum and maximum. This hesitation is persistent at the periods mentioned and not found at any other period materially different from them. For still longer periods the number of well known curves is not sufficient to give a definite description of the changes in their form with the period. At periods longer than 16^d several curves are found rather similar to that of δ Cephei, showing quick rise and slow decrease apparently without complications.«

Da das Material an guten Lichtkurven in letzter Zeit sehr gewachsen ist, und da auch noch einige ältere Lichtkurven herangezogen werden können, so schien es mir am Platze, die Untersuchung von Hertzsprung zu wiederholen, denn auch ganz abgesehen von der Frage einer etwaigen Zweiteilung der langperiodischen δ Cephei-Sterne besitzt die Frage der Abhängigkeit der Form der Lichtkurve von der Periode ein großes Interesse. Es möge von vornherein gesagt werden, das sich Hertzsprungs Ergebnisse fast in vollem Umfange bestätigt haben, unter der Hypothese jener Zweiteilung aber auch zum Teil verständlicher werden, als sie es vorher waren.

Es wurden zunächst die Lichtkurven möglichst vieler langperiodischer δ Cephei-Sterne aus der Literatur zusammengetragen. Für die älteren Lichtkurven war mir hierbei die Dissertation von Frl. M. Güssow[1] von großem Nutzen, aus der ich auch manche Zahlenwerte in die folgenden Tabellen V und VI übernommen habe. In der Regel wurde für die nachfolgende Klassifizierung der Lichtkurven nur diejenige eines jeden Sternes benutzt, die mir am zuverlässigsten schien, in einigen Fällen auch verschiedene. Sterne, deren Lichtkurven mir nicht hinreichend sicher zu sein schienen, wurden weggelassen.

Für jeden Veränderlichen wurden die Größe $\varepsilon = \frac{M-m}{P}$ (Zeit vom Minimum bis zum folgenden Maximum, ausgedrückt in Teilen der Periode) und nach Möglichkeit die photographische und die visuelle Amplitude (Aph und Av)

[1] M. Güssow, Kritische Zusammenstellung sämtlicher Beobachtungsergebnisse der Veränderlichen vom δ Cephei-Typus und Kritik der Eddingtonschen Pulsationstheorie. Berlin 1924 (Nur autographisch vervielfältigt).

abgeleitet. Bei der Festlegung dieser Größen wurden häufig nicht nur die ausgewählten Lichtkurven, sondern auch das sonstige vorhandene Material benutzt, u. a. auch unveröffentliche Werte von ε und Aph, die mir Herr Hellerich für einige Sterne freundlichst mitgeteilt hat.

In den folgenden Tabellen V und VI sind nun die Ergebnisse zusammengestellt. Die Sterne sind nach abnehmender Periode geordnet, und in der letzten Kolumne ist die Quelle für die besten Lichtkurven angegeben[1]. Außer den allgemein üblichen Abkürzungen (AN = Astronomische Nachrichten, Ap J = Astronomical Journal, MN = Monthly Notices of the Royal Astronomical Society) sind dabei folgende Bezeichnungen zur Anwendung gekommen:

Allegh. = Publications of the Allegheny Observatory, Vol. VII, No. 1.
BAN = Bulletins of the Astronomical Institutes of the Netherlands.
Enebo = Enebo, Beobachtungen veränderlicher Sterne.
Harv. Ann, Harv. Bull, Harv. Circ = Annals, Bulletins, Circulars of the Harvard College Observatory.
Henr. = Henroteau, The Cepheid Problem (Publications of the Dominion Observatory, Ottawa, Vol. IX, No. 1).
Jap. J = Japanese Journal of Astronomy and Geophysics.
Laws Bull = Bulletins of the Laws Observatory.
Lbg = Annalen v. d. Bosscha-Sterrenwacht Lembang, Vol. II, 2^{e} Gedeelte, 1st Part.
Lyon Bull = Bulletins de l'Observatoire de Lyon.
Nl = Nijland, Beobachtungen von Cepheiden (Recherches Astronomiques de l'Observatoire d'Utrecht, VIII).
Uccle = Annales de l'Observatoire Royal de Belgique, Nouvelle Série, XIII.
Washburn Publ = Publications of the Washburn Observatory.

Zur Kennzeichnung der Form der Lichtkurven mußte ein ziemlich kompliziertes System von Bezeichnungen eingeführt werden, das in der folgenden Übersicht erläutert wird. (Es bedeutet darin M = Maximum, m = Minimum, Lk = Lichtkurve.) Kleinere Unregelmäßigkeiten der Lichtkurve blieben bei der Klassifizierung unbeachtet, wenn ihre Realität nicht einigermaßen sicher erschien. Wollte man den Verschiedenheiten der Lichtkurven in vollem Umfange gerecht werden, so müßte man das System der Bezeichnungen noch verwickelter gestalten. Im allgemeinen wird aber die Angabe der Klasse der Lichtkurve (in der vorletzten Kolumne der Tabellen V und VI) im Verein mit der Größe ε (dritte Kolumne) ein leidlich gutes Bild von der Beschaffenheit der Lichtkurve liefern. Auf die Übersicht über die Art der Bezeichnung der Lichtkurven folgen dann die beiden Tabellen; Tabelle V enthält die langperiodischen δ Cephei-Sterne, deren Perioden größer als 9^{d} sind, Tabelle VI die mit kürzeren Perioden (soweit hinreichend sicher bestimmte Lichtkurven vorliegen).

[1] Soweit die Lichtkurven in der oben zitierten Arbeit von Hertzsprung (BAN 96) reproduziert sind, ist diese als Quelle angegeben; man findet dort nähere Auskunft über die betreffenden Originalveröffentlichungen.

Übersicht über die Art der Bezeichnung der Lichtkurven.

a: Anstieg der Lk bedeutend steiler als Abstieg (stark unsymmetrische Lk).

b: Anstieg nur wenig steiler als Abstieg oder ebenso steil wie dieser (nahezu oder völlig symmetrische Lk).

Unterer Index: 1: *M* relativ zu *m* sehr spitz.
2: *M* spitzer als *m*, doch ist der Unterschied kleiner als bei 1.
3: *M* und *m* ungefähr gleich spitz.
4: *M* flacher als *m*.

Erste Zahl neben *a*.

0: Glatter Aufstieg.
(1): Erst langsamer, dann steiler Aufstieg.
1: Flacher Buckel im unteren Teil des Aufstiegs.
2: Kräftiger Buckel im unteren Teil des Aufstiegs.

Zweite Zahl neben *a*.

0: Glatter Abstieg.
(1): Ganz flacher Buckel im unteren Teil des Abstiegs.
1: Flacher Buckel in der Mitte des Abstiegs oder mehr nach oben.
2: Kräftiger, meist ziemlich scharf abgesetzter Buckel in der Mitte des Abstiegs oder mehr nach oben.

Sind die erste und die zweite Zahl neben *a* beide = 0, so sind sie fortgelassen (glatte Lk).

p neben b_4: Auf das breite *M* ist ein ziemlich spitzer Buckel aufgesetzt, sehr nahe der Mitte des *M*.

Wenn eine Lk nicht ganz in dieses Schema paßt, so ist in einer Anmerkung auf ihre besondere Eigentümlichkeit hingewiesen. Die Anmerkungen zeigen auch sonstige besondere Eigentümlichkeiten an.

Tabelle V.

Langperiodische δ Cephei-Sterne. $P > 9^d$.

	P	ε	Aph	Av	Lk	
SV Vul	$45^d.15$	0.22	$1^m.4$	$1^m.1$	a_3	Harv. Bull 846
RS Pup	41.34	.25	2.1	—	a_4	Harv. Bull 848
U Car	38.75	.22	1.8	—	a_2	BAN 96
l Car	35.52	.34	—	0.8	a_2	MN 84 S. 623
RY Vel	28.14	.30	—	—	a_3	BAN 63
T Mon	27.00	.23	1.6	1.0	a_1	BAN 96 — Nl
X Pup	25.95	.21	—	—	a_2	BAN 146; Anm. 1
FK Car	23.25	.14	1.3	—	a_1	BAN 96
WZ Car ...	23.00	.20	2.2	—	a_1	BAN 96 u. 146

Anm. 1. Wahrscheinlich kleiner, sehr scharfer Buckel direkt vor dem Minimum.

	P	ε	Aph	Av	Lk	
RU Cam	$22^{d}.13$	0.45	—	$1^{m}.0$	b_4	Laws Bull 21
VX Cyg	20.14	.33	$1^{m}.6$	1.3	a_1	AN 4010 — Henr.
RU Sct	19.70	.28	—	1.5	a_1 01	AN 5053
VY Car	18.98	.34	1.4	—	a_2 10	BAN 109
YZ Car.....	18.16	.37	1.7	—	a_1	BAN 109
CT Car.....	18.08	.36	—	—	a_1	BAN 109
W Vir	17.27	.37	1.3	1.1	a_2 12	Harv. Ann 80 No. 12
Y Oph	17.12	.41	0.9	0.6	b_1	Lbg.
XZ Car.....	16.64	.35	2.1	—	a_1 20	BAN 109
RW Cam ...	16.40	.41	—	0.7	a_3	Enebo II
X Cyg.....	16.38	.35	1.4	0.8	a_1, a_2	Nl — Henr.
FF Car.....	16.33	.35	1.4	—	a_1 (1) 0	BAN 96
XX Car	15.72	.32	2.1	—	a_1	BAN 146
AV Sgr.....	15.39	.29	—	—	a_2	AN 5228
SV Mon	15.23	.37	—	—	a_2	AN 5133
SZ Cyg.....	15.11	.33	1.3	0.8	a_1	Nl; Anm. 2
RW Cas	14.80	.32	1.9	1.0	a_2 20	BAN 96
TX Cyg	14.71	.34	1.4	1.2	a_2 20, a_2 (1) 0	BAN 96 — Henr.
SV Vel	14.10	.35	2.0	—	a_2 10	BAN 96
TT Aql.....	13.75	.34	1.4	0.8	a_2	Ap J 50 S. 174
SZ Cas	13.61	.44	0.8	0.4	b_2	AN 5531
FI Car	13.45	.40	1.2	—	b_1	BAN 96
Z Sct.....	12.90	.38	—	—	a_2–b_2	AN 5026, 5112
SU Cru.....	12.83	.38	1.4	—	a_2	BAN 148
U Nor.....	12.64	.44	—	—	b_1	BAN 146; Anm. 3
RY Cas.....	12.14	.47	—	1.3	b_1	BAN 96
UU Mus	11.64	.40	1.3	—	a_2–b_2	BAN 148
RX Aur	11.63	.44	1.2	0.6	b_1	Allegh.
SV Per.....	11.13	.41	—	1.0	b_1	Enebo II, III, VIII
TY Sct.....	11.06	.45	—	1.0	$b_4\,p$	AN 5223; Anm. 4
VX Per	10.89	.50	—	—	b_4	AN 4843
Z Lac	10.89	.43	1.6	—	$b_4\,p$	BAN 96
FR Car.....	10.72	.48	0.6	—	b_1	BAN 96
AP Her.....	10.38	.41	—	0.7	b_1	AN 5420, 5569
FO Car.....	10.36	.47	0.6	—	b_3	BAN 96
FQ Car.....	10.27	.46	1.1	—	$b_4\,p$	BAN 96
ζ Gem.....	10.15	.48	0.9	0.4	b_3	BAN 96 — Nl; Anm. 5
SY Aur.....	10.14	.46	1.1	0.5	b_4	Allegh.
CR Car.....	10.0	.47	—	—	b_3	BAN 56
β Dor	9.84	.43	1.4	—	b_4	Harv. Circ 316
AQ Car.....	9.77	.48	0.9	—	$b_4\,p$	BAN 96
S Nor	9.76	.50	1.6	—	$b_4\,p$	Lbg.; Anm. 6
YZ Sgr.....	9.55	.52	1.3	0.6	$b_4\,p$	Lbg.; Anm. 7
x Pav	9.09	.47	—	0.8	a_2–b_2	MN 88 S. 108

Anm. 2. Nach Henroteau starker Buckel im unteren Teile des Aufstieges.

Anm. 3. Wahrscheinlich kleiner, sehr scharfer Buckel direkt vor dem Minimum.

Anm. 4. Lichtkurve wohl veränderlich.

Anm. 5. Nach der lichtelektrischen Kurve von Guthnick (Jubiläumsnummer der AN) wohl kleiner Buckel im oberen Teile des Aufstieges.

Anm. 6. Lichtkurve scheint stark veränderlich. Buckel im Aufstieg, Maximum wohl meist sehr spitz.

Anm. 7. Außer dem Buckel im Maximum noch kleiner, scharfer Buckel im absteigenden Ast.

Tabelle VI.

Langperiodische δ Cephei-Sterne. $P < 9^d$.

	P	ε	Aph	Av	Lk.	
S Sge	$8^d.38$	0.29	$1^m.2$	$0^m.7$	a_2 02	BAN 96
RU Dor	8.35	.28	1.3	—	a_2 02	BAN 52
U Vul	7.99	.25	1.1	0.7	a_3 01	AN 4181
W Gem	7.91	.27	1.3	0.8	a_1 02	BAN 146
RX Cam	7.91	.33	—	—	a_2 02	BAN 146
VY Cyg	7.85	.30	1.4	0.5	a_1 02	Henr.
ER Car	7.72	.35	1.0	—	a_3 02	BAN 96
FM Car	7.64	.30	1.0	—	a_1 02	BAN 96
W Sgr	7.60	.32	1.5	0.9	a_2 02	Lbg.
RS Ori	7.56	.29	1.5	0.8	a_2 01	BAN 146 — Allegh.
R Mus.....	7.51	.32	—	—	a_2 02	BAN 146
η Aql	7.18	.30	1.1	0.5	a_2 02	BAN 96 — Nl
UX Mus....	7.14	.31	—	—	a_1	BAN 148; Anm. 1
U Aql	7.02	.31	—	0.7	a_2 02	AN 4097
SV Cru	7.01	.30	1.2	—	a_3	BAN 148; Anm. 2
X Sgr	7.01	.35	1.2	0.7	a_2	Lbg.
XX Vel	7.0	.35	—	—	a_2 02	BAN 56
U Sgr	6.74	.29	1.5	0.8	a_3 02	Lbg.
CS Car	6.66	.35	1.0	—	a_1 02	BAN 96
RR Lac.....	6.41	.29	1.4	—	a_2	BAN 96 — Allegh.
X Vul	6.32	.31	—	0.8	a_2	AN 4195
RS Cas	6.30	.17	1.3	—	a_2	Allegh.
AB Vel	6.25	.29	1.2	—	a_1	BAN 96
VV Cas.....	6.21	.38	1.5	—	a_1	AN 5228
RV Sco	6.06	.29	1.6	0.6	a_2 0 (1)	Lbg.
Y Sgr	5.77	.34	1.1	0.8	a_2	Harv. Circ 236
FH Car	5.66	.31	1.2	—	a_2	BAN 96
VY Per	5.53	.24	1.4	—	a_2	AN 5228
RZ Gem	5.53	.21	0.9	0.7	a_3 0 (1)	Allegh.
V Cen	5.49	.28	1.6	—	a_3 0 (1)	Lbg.
SW Cas	5.44	.21	1.1	1.0	a_3 0 (1)	Allegh.
X Lac	5.44	.38	0.6	0.4	a_2	BAN 96 — Allegh.; Anm. 3
δ Cep	5.37	.26	1.1	0.7	a_2	BAN 96 — Nl
UY Per.....	5.36	.28	1.7	—	a_2	Lyon Bull 5 S 184
UW Car....	5.35	.31	0.9	—	a_2 0 (1)	BAN 156
AY Cen	5.30	.29	0.9	—	a_2	BAN 96
CQ Car.....	5.3	.27	—	—	a_2 0 (1)	BAN 56
UZ Car.....	5.20	.28	0.9	—	a_2	BAN 156
AP Sgr.....	5.06	.30	—	—	a_1	Jap. Journ. 1 S 207
V Lac	4.98	.23	1.4	1.0	a_2	BAN 96 — Allegh.
TZ Mus	4.94	.30	0.9	—	a_2 0 (1)	BAN 148; Anm. 4
CN Car.....	4.91	.26	—	—	a_1	BAN 56
SX Car.....	4.86	.31	—	—	a_2	BAN 106
VZ Cyg	4.86	.22	1.2	0.4	a_2	Allegh.
WW Car ...	4.68	.28	1.1	—	a_1	BAN 106

Anm. 1. Kleiner, scharfer Buckel am Ende des Abstiegs. Anm. 2. Dgl.
Anm. 3. Lichtkurve im Abstieg etwas veränderlich.
Anm. 4. Flacher Buckel im unteren Teil des Abstiegs und kleiner scharfer Buckel direkt vor Minimum.

	P	ε	Aph	Av	Lk.	
DY Car	$4^{d}.67$	0.31	—	—	a_2	BAN 63
FN Car.....	4.59	.28	$0^{m}.8$	—	a_1	BAN 96
UX Per	4.56	.18	1.4	$1^{m}.3$	a_1	Lyon Bull 5 S 151
T Vul.....	4.44	.28	1.1	0.6	a_2, a_1	Washburn Publ 15 S 128 — Nl
Y Lac.....	4.32	.27	1.2	0.5	a_2	Allegh.
SX Per.....	4.29	.27	—	0.7	a_2 0 (1)	Nl
CY Car.....	4.25	.31	—	—	a_1	BAN 56
EW Car	4.24	.18	0.7	—	a_1	BAN 96
BF Oph	4.07	.31	—	—	a_2 0 (1)	BAN 135; Anm. 5
SY Cas.....	4.07	.26	1.4	0.9	a_2	Allegh.
ST Tau	4.04	.30	—	—	a_2	AN 4985
α U Mi	3.97	.50	0.2	0.1	b_3	AN 4518
Y Aur.....	3.86	.28	1.4	0.9	a_1	Allegh. — Nl
SU Cyg	3.85	.25	1.1	0.7	a_2	AN 4141
RT Aur	3.73	.26	1.2	0.9	a_1	BAN 96 — Nl
AZ Cen.....	3.21	.44	0.4	—	b_3	BAN 96
BK Cen	3.17	.47	0.9	—	a_1 02	BAN 148
SZ Tau.....	3.15	.48	0.5	—	b_3	BAN 96
ET Car.....	2.91	.21	1.3	—	a_1	BAN 96
EY Car.....	2.88	.40	0.4	—	a_2	BAN 96
DT Cyg	2.50	.50	—	—	b_4	Washburn Publ. 15 S 152
TU Cas	2.14	.25	—	1.3	a_1	Uccle
SU Cas.....	1.95	.43	0.5	0.4	b_3, b_2	BAN 96 — Nl.
SW Tau....	1.58	.37	—	—	a_3	BAN 146

Anm. 5. Flacher Buckel im unteren Teil des Abstiegs und kleiner scharfer Buckel direkt vor Minimum.

Nehmen wir an, daß die hypothetische Zweiteilung der langperiodischen δ Cephei-Sterne wirklich zutrifft, so ist nach unseren früheren Betrachtungen zu vermuten, daß die Tabelle V vorwiegend »X Cygni-Sterne« enthält. Erst unter den Sternen gegen Ende der Tabelle werden gewöhnliche δ Cephei-Sterne in größerer Zahl auftreten. Wir wollen aber die Diskussion zunächst so führen, als ob Tabelle V nur X Cygni-Sterne, Tabelle VI nur gewöhnliche δ Cephei-Sterne enthielte. Zur vorläufigen Orientierung sei bemerkt, daß diese Annahme, wenigstens was Tabelle V angeht, später gewisse Einschränkungen erfahren wird.

Zunächst fällt es auf, daß bei den in Tabelle V enthaltenen Lichtkurven der Form *a* Buckel im absteigenden Aste nur sehr selten auftreten (in diesem Falle ist die zweite Zahl hinter *a* von 0 verschieden). Es ist dies nämlich nur bei RU Scuti (a_1 01) und W Virginis (a_2 12) der Fall. (Nach Anm. 1 ist allerdings ein kleiner, sehr scharfer Buckel kurz vor dem Minimum bei X Puppis angedeutet, aber es handelt sich hier um eine ganz unbedeutende Nebenerscheinung.) RU Scuti besitzt ein abnormes Spektrum[1], und zudem dürfte der Buckel kaum als reell zu gewährleisten sein, da die Lichtkurve nur auf relativ wenigen (etwa 80) visuellen Schätzungen beruht; W Virginis aber ist

[1] Harv. Circ 313.

ein ganz abnormer Stern, sowohl was seine hohe galaktische Breite als auch was sein Spektrum betrifft. Von den Sternen mit *b*-Kurven hat U Normae, ähnlich wie der schon erwähnte X Puppis, einen kleinen scharfen Buckel kurz vor dem Minimum. Bei ζ Geminorum besteht eine kleine Ungleichmäßigkeit im Aufstiege (Anm. 5). Die anderen *b*-Kurven verlaufen glatt außer den mit b_4p bezeichneten, bei denen ein starker Buckel im Maximum oder unmittelbar nachher auftritt. Wir werden aber später sehen, daß gerade die Sterne mit b_4p-Kurven wahrscheinlich nicht zu den X Cygni-, sondern zu den gewöhnlichen δ Cephei-Sternen zu rechnen sind.

Wir können also sagen, daß sich die Sterne in Tabelle V, was das Vorkommen von Buckeln im absteigenden Aste betrifft, sehr ähnlich verhalten wie die Mira-Sterne, bei denen solche Buckel in den mittleren Lichtkurven nicht auftreten.

Buckel und Ungleichmäßigkeiten im aufsteigenden Aste kommen bei den Mira-Sternen ziemlich häufig vor, und dasselbe trifft auch bei den Sternen der Tabelle V zu. (Bei den Symbolen für die betreffenden Lichtkurven ist die erste Zahl hinter *a* von o verschieden.) In allen diesen Fällen liegt der Buckel in der unteren Hälfte des Aufstieges (manchmal ist kein eigentlicher Buckel vorhanden, sondern der Aufstieg ist nur zuerst langsam und wird dann erst steiler). Auch bei den betreffenden Mira-Sternen hat der Buckel die eben geschilderte Lage, sofern die Lichtkurve merklich unsymmetrisch ist. Buckel oder Stufen im oberen Teil des Aufstieges scheinen bei den Mira-Sternen nur dann vorzukommen, wenn der Gesamtaufstieg nicht steiler ist als der Abstieg; die Lichtkurven haben dann mitunter eine gewisse Ähnlichkeit mit denen der Form b_4p in Tabelle V. (Die Lichtkurven von Mira-Sternen mit Buckel im Aufstieg sind in den Tabellen Hdb. VI S. 103 ff. mit $\alpha - \gamma_1$ und γ_1 bezeichnet.)

Auch betreffs der Buckel im aufsteigenden Aste besteht also eine große Ähnlichkeit zwischen den Sternen der Tabelle V und den Mira-Sternen. Ein Unterschied zeigt sich allerdings in der Verteilung der hier in Rede stehenden Lichtkurven auf die verschiedenen Periodenwerte. In Tabelle V beschränken sich Lichtkurven mit Buckel im Aufstieg auf Perioden von 14^d bis 19^d, während sie sich bei den Mira-Sternen auf alle Perioden verteilen, unter den langen Perioden aber am häufigsten sind.

Betrachten wir nun die Abhängigkeit der allgemeinen Form der Lichtkurve von der Periode. Bei den Mira-Sternen der Klasse Me nimmt ε mit abnehmender Periode im Mittel zu (vgl. Hdb. VI S. 117). Die Amplitude der Helligkeitsschwankungen nimmt dagegen bei den Me-Sternen mit abnehmender Periode ab (vgl. Hdb. VI S. 120). Genau dasselbe Verhalten zeigen die Sterne in Tabelle V. Bilden wir gruppenweise Mittel der ε, Aph und Av, wobei wir die Sterne RU Camelopardalis und W Virginis aus später anzuführenden Gründen ausschließen, so erhalten wir folgende Zahlen, wenn wir die Aph noch durch 1.7 dividieren[1], um sie mit den Av vergleichbar zu

[1] Diese Zahl ist nach M. Güssow das mittlere Verhältnis Aph : Av.

machen (die eingeklammerten Zahlen bedeuten die Zahl der Sterne, auf denen der betreffende Mittelwert beruht):

Tabelle VII.

Perioden-Intervall	Mittel von ε	Aph: 1.7	Av
$45^{d}.15$—$20^{d}.14$	0.24 (10)	$1^{m}.01$ (7)	$1^{m}.05$ (4)
19.70—15.72	0.35 (10)	0.92 (7)	0.90 (4)
15.39—12.83	0.36 (11)	0.84 (8)	0.84 (5)
12.64—10.38	0.44 (10)	0.69 (4)	0.92 (5)
10.36— 9.09	0.47 (10)	0.65 (8)	0.58 (4)

Die Zunahme[1] von ε und die Abnahme von A mit abnehmender Periode gehen aus dieser Tabelle deutlich hervor. Die Zunahme von ε ist viel größer als bei den Me-Sternen. Dies hat seinen Grund wohl darin, daß bei letzteren mit einem sehr steilen Helligkeitsanstieg stets ein sehr breites Minimum verbunden ist, so daß der Wert von ε relativ groß wird, wenn man die Mitte des Minimums zur Berechnung von $\frac{M-m}{P}$ verwendet. Bei den Sternen der Tabelle V ist dagegen häufig steiler Helligkeitsanstieg mit einem sehr spitzen Minimum verbunden, z. B. bei SV Vulpeculae, und sehr flache Minima kommen nur selten vor, z. B. bei WZ Carinae, der eine fast »antalgolartige« Lichtkurve besitzt.

Die Zunahme von ε mit abnehmender Periode äußert sich auch darin, daß mit abnehmender Periode die Zahl der *b*-Kurven immer mehr zunimmt, genau wie bei den Me-Sternen die Zahl der *β*-Kurven (vgl. Hdb. VI S. 113f.), die den *b*-Kurven entsprechen. In der Tat kommt in Tabelle V unter den Sternen mit $P > 20^{d}$ nur ein einziger mit *b*-Kurve vor, nämlich RU Camelopardalis ($P = 22,^{d}$ b_4). Das Spektrum dieses Sternes ist aber abnorm, nämlich R mit im Maximum hellen Wasserstofflinien. Auch bei den Mira-Sternen haben die mit R- und N-Spektren vorwiegend symmetrische Lichtkurven mit breitem Maximum. Es liegt also hier eine ganz erstaunliche Ähnlichkeit zwischen den Mira-Sternen und denen der Tabelle V vor. Wir haben wegen des abnormen Spektrums RU Camelopardalis oben bei der Mittelbildung ausgeschlossen und aus dem gleichen Grunde auch W Virginis, der ebenfalls helle Wasserstofflinien (über einem G-Spektrum) zeigt, und der außerdem eine für einen langperiodischen δ Cephei-Stern ganz ungewöhnlich hohe galaktische Breite besitzt.

Noch eine weitere Parallele zwischen den Me-Sternen und denen in Tabelle V ist vorhanden. Bei ersteren haben die Sterne mit symmetrischer Lichtkurve und relativ langer Periode vorwiegend relativ spitze Maxima (Kurvenform β_1), die mit kurzen Perioden relativ breite Maxima (Kurvenform β_3). Ganz genau so liegen die Dinge hier mit den entsprechenden Kurvenformen b_1 und b_2 einerseits und b_4 andererseits. Namentlich hat

[1] Vgl. hierzu Araki, l. c.

Y Ophiuchi ($P = 17^d$), derjenige unter den Sternen mit *b*-Kurven, der die längste Periode hat, wenn wir von dem abnormen Veränderlichen RU Camelopardalis absehen, ein sehr spitzes Maximum. Übrigens hat vielleicht TX Aquilae, dessen Lichtkurve noch nicht hinreichend sicher bekannt ist, bei noch längerer Periode ($P = 34^d.8$) eine ähnliche Lichtkurve.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß bei den Sternen in Tabelle V der Helligkeitsanstieg niemals länger dauert als der Abstieg, außer vielleicht in geringem Grade bei YZ Sagittarii ($P = 9^d.55$). Genau dasselbe ist bei den Me-Sternen der Fall[1], abgesehen von einigen wenigen mit Lichtkurven der Form γ, d. h. mit einem starken Buckel im Aufstieg oder mit doppeltem Maximum.

Wir können die vorstehenden Betrachtungen wie folgt zusammenfassen: Die in Tabelle V enthaltenen Veränderlichen weisen in ihren Lichtkurven und in deren Abhängigkeit von der Periodenlänge zwar gewisse Unterschiede gegen die Mira-Sterne der Klasse Me auf, aber im ganzen ist die Übereinstimmung mit diesen doch erstaunlich groß und geht in manchen Punkten bis in Einzelheiten. Es liegt nahe, zu vermuten, daß diese Übereinstimmung ihren Grund in verwandten Ursachen des Lichtwechsels bei den beiden Klassen von Sternen hat, eine Vermutung, die ja keineswegs neu ist, die aber hier wesentlich verstärkt wird. Dadurch, daß man bisher bei solchen Betrachtungen die Me-Sterne immer mit der Gesamtheit der langperiodischen δ Cephei-Sterne verglich, wurden die Ähnlichkeiten stark verwischt. Sie treten viel mehr hervor, wenn man die Vergleichung auf die δ Cephei-Sterne mit $P > 9^d$ beschränkt, wie wir es oben getan haben. (Weiteres über die Beziehungen zwischen den δ Cephei- und den Mira-Sternen vgl. Hdb. VI S. 247 ff.)

Wir gehen nun dazu über, die in Tabelle VI zusammengestellten langperiodischen δ Cephei-Sterne, deren Perioden $< 9^d$ sind, zu betrachten. Wir bilden zunächst gruppenweise Mittel von ε, Aph: 1.7 und Av. Ausgeschlossen wird dabei nur α Ursae minoris; die Entdeckung der Veränderlichkeit dieses Sternes ist durch so besondere Umstände herbeigeführt, daß es besser erscheint, ihn bei statistischen Untersuchungen außer acht zu lassen. Es ergeben sich folgende Zahlen:

Tabelle VIII.

Perioden-Intervall	Mittel von ε	Aph: 1.7	Av
$8^d.38$—$7^d.18$	0.30 (12)	$0^m.73$ (10)	$0^m.70$ (7)
7.14—6.21	0.31 (12)	0.76 (8)	0.75 (4)
6.06—5.35	0.28 (11)	0.71 (11)	0.70 (6)
5.30—4.67	0.28 (11)	0.63 (6)	0.70 (2)
4.59—3.86	0.27 (11)	0.67 (7)	0.82 (6)
3.85—1.58	0.37 (11)	0.46 (8)	0.82 (4)

Hier sind kaum noch Abhängigkeiten der ε und A von der Periode angedeutet, nur in der letzten Zeile treten etwas abweichende Werte auf, die

[1] Der Stern S Cygni, der von der Regel abweicht, hat nach neueren Untersuchungen nicht ein Me-, sondern ein Se-Spektrum.

durch das Vorkommen einiger *b*-Kurven bei Sternen sehr kurzer Periode bedingt werden. Die Sterne in Tabelle VI verhalten sich also ganz anders wie die in Tabelle V und wie die Me-Sterne. Ein weiterer Unterschied zwischen ihnen und den beiden letztgenannten Gruppen besteht darin, daß Buckel im Aufstieg der Lichtkurven in Tabelle VI nicht auftreten; andererseits kommen dafür in Tabelle VI sehr oft Buckel oder Wellen im Abstieg vor, die in Tabelle V (wenigstens bei normalen Sternen) und bei den Mira-Sternen ganz fehlen. Bei den Sternen von mehr als $6^d.5$ Periode ist in Tabelle VI der Buckel im Abstieg geradezu die Regel. Erst bei Sternen mit Perioden von weniger als $4^d.9$ Periode kommen Buckel oder Wellen im Abstieg nur noch selten vor.

Die Lage des Buckels im absteigenden Aste der Lichtkurven in Tabelle VI zeigt nun eine höchst merkwürdige, wie es scheint streng gesetzmäßige Abhängigkeit von der Periode. Es sei Δ der in Teilen der Periode ausgedrückte, vom vorangehenden Maximum aus gerechnete Abstand der höchsten Erhebung des Buckels oder der Welle über die glatt durchgezogene Lichtkurve. Für Δ ergeben sich die in der Tabelle IX zusammengestellten Zahlen:

Tabelle IX.

	P	Δ	v	
S Sge	$8^d.38$	0.24	+0.02	Scharfer Buckel
RU Dor	8.35	0.24	+0.02	Scharfer Buckel
U Vul	7.99	(0.19)	(−0.07)	Flacher Buckel
W Gem	7.91	0.29	+0.03	Scharfer Buckel
RX Cam....	7.91	0.25	−0.01	Scharfer Buckel
VY Cyg	7.85	0.27	0.00	Hoher, scharfer Buckel
ER Car	7.72	0.29	+0.01	Leidlich scharfer Buckel
FM Car	7.64	0.29	0.00	Scharfer Buckel
W Sgr	7.60	0.29	0.00	Scharfer Buckel
RS Ori	7.56	0.29	−0.01	Flacher Buckel
R Mus.....	7.51	0.31	+0.01	Scharfer Buckel
η Aql	7.18	0.33	0.00	Scharfer Buckel [1])
U Aql	7.02	(0.24)	(−0.11)	Leidlich scharfer Buckel
XX Vel	7.0	(0.28)	(−0.07)	Leidlich scharfer Buckel
U Sgr	6.74	0.36	−0.01	Leidlich scharfer Buckel
CS Car	6.66	0.36	−0.02	Leidlich scharfer Buckel
RV Sco.....	6.06	0.41	−0.03	Flache Welle
RZ Gem	5.53	(0.56)	(+0.07)	Flache Welle
V Cen.....	5.49	0.45	−0.04	Flache Welle
SW Cas	5.44	(0.55)	(+0.06)	Sehr flache Welle
UW Car....	5.35	0.45	−0.05	Sehr kleiner Buckel
CQ Car.....	5.3	0.51	0.00	Flache Welle
TZ Mus	4.94	0.60	+0.06	Kleiner, scharfer Buckel
SX Per.....	4.29	0.64	+0.04	Flache Welle
BF Oph	4.07	0.63	+0.01	Kleine Welle

[1] Bei η Aquilae hat man eine Veränderlichkeit der Lage und Form des Buckels wahrgenommen (vgl. z. B. Fr. Becker, AN 5377). Wie dies mit den nachfolgenden Resultaten vereinbar ist, bleibt eine offene Frage. Die hier benutzte (photoelektrische) Lichtkurve von Wylie ist entschieden die genaueste, die wir für diesen Stern besitzen.

Einige unsichere Werte von Δ sind eingeklammert: Für U Vulpeculae und U Aquilae sind die benutzten Lichtkurven visuelle (alle sonst benutzten sind photographische oder lichtelektrische mit Ausnahme von der von SX Persei, für den eine sehr zuverlässige visuelle Kurve von Nijland vorliegt); bei XX Velorum und RZ Geminorum sind die photographischen Lichtkurven an der kritischen Stelle noch unsicher; bei SW Cassiopeiae ist die Welle außerordentlich flach. Überhaupt ist zu bemerken, daß für die Sterne mit längeren Perioden die Buckel durchschnittlich weit schärfer und stärker sind als für die mit kürzeren Perioden, wie man schon aus der symbolischen Bezeichnung der Lichtkurven in Tabelle VI ersehen kann.

Die Tabelle IX verrät sofort eine sehr starke Korrelation zwischen P und Δ. Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Ausschluß der eingeklammerten Werte ergibt:

C) $$\Delta = -0.093\,P + 1.00$$
$$\text{m. F.} \pm 0.004 \quad \pm 0.03.$$

Unter v stehen in der Tabelle die Differenzen zwischen den gemessenen und den nach dieser Formel berechneten Δ. Wenn auch die Zeichenfolgen etwas zu wünschen übriglassen, so ist die Darstellung doch ganz erstaunlich genau und liegt wohl fast innerhalb der Genauigkeit der Beobachtungen. Man darf nicht vergessen, daß die Δ sich namentlich für die untere Hälfte der Tabelle in manchen Fällen nicht sehr scharf bestimmen lassen.

Die Formel C) stellt alle Buckel und Wellen, die im Abstieg der in Tabelle VI zusammengestellten Lichtkurven vorkommen, mit folgenden Ausnahmen dar (ich bemerke, daß die Zusammenstellung und Kritik der Lichtkurven erfolgte, ehe ich von dem obigen Gesetz eine Ahnung hatte):

UX Muscae ($P = 7^{d}.14$) und SV Crucis ($P = 7^{d}.01$). Die Lichtkurven zeigen kleine, scharfe Buckel bei $\Delta = 0.43$ bzw. 0.57. Die Rechnung nach der Formel ergibt $\Delta = 0.34$ bzw. 0.35, im ersten Falle also wenigstens noch eine genäherte Darstellung.

X Lacertae ($P = 5^{d}.44$). Hertzsprung (BAN 13) findet eine glatte Lichtkurve, Jordan (Allegh. Publ. VII, S. 100) findet mehrere merkwürdige Wellen im Abstieg, die nach seiner Ansicht auf Veränderungen der Lichtkurve zurückzuführen sind.

TZ Muscae ($P = 4^{d}.94$). Dem durch die Formel leidlich dargestellten scharfen Buckel (s. Tabelle IX) geht eine flachere Welle voran.

BF Ophiuchi ($P = 4^{d}.07$). Ebenso.

BK Centauri ($P = 3^{d}.17$). Auf dem Abstieg der Lichtkurve befindet sich ein weit ausgedehnter starker Buckel, der nicht der Formel entspricht. Das Minimum ist sehr breit.

Es ist auffällig, daß von den 6 hier besprochenen Sternen 4 zu den in BAN 148 behandelten gehören; die dort abgeleiteten Lichtkurven haben zum Teil einen ungewöhnlich unruhigen Verlauf.

Man kann hiernach also sagen, daß die Gleichung C) das bezügliche Beobachtungsmaterial in ganz überraschender Weise darstellt. Der Gültigkeits-

bereich der Formel geht aber noch weiter und erstreckt sich auch auf die in Tabelle V mit $b_4 p$ bezeichneten Lichtkurven. Diese kann man als symmetrische Kurven auffassen, auf deren breites Maximum ein scharfer Buckel aufgesetzt ist (vgl. Fig. 2). Den Abstand Δ dieses Buckels von dem Maximum

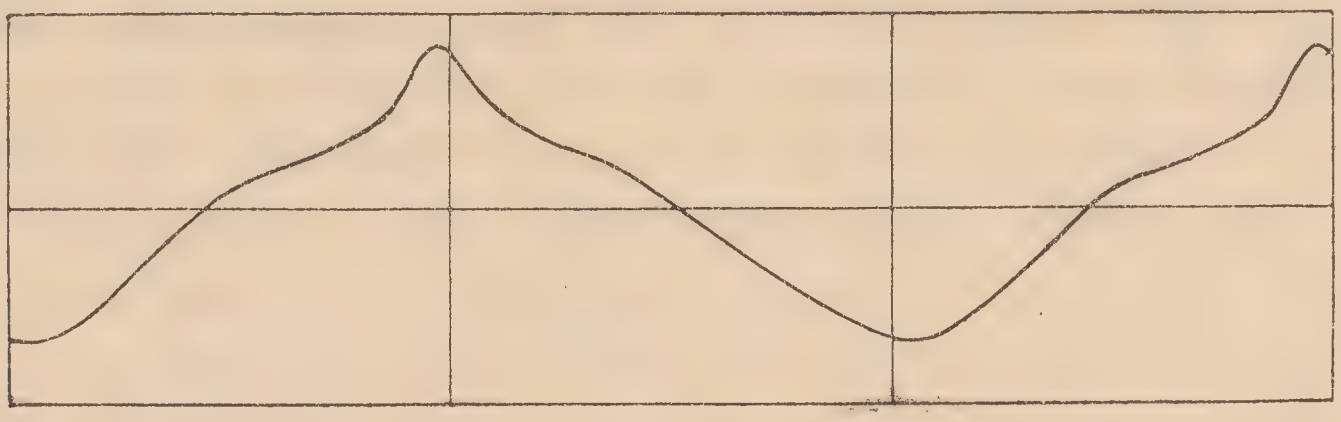


Fig. 2. Lichtkurve von FQ Carinae ($P = 10^{d}.27$) nach E. Hertzsprung.

der glatt durchgezogenen Lichtkurve kann man nun leider nur ziemlich unsicher bestimmen. Ich habe dafür folgende Zahlen erhalten, neben die wieder die Differenzen v gegen die nach der Formel C) berechneten Werte von Δ gesetzt sind:

Tabelle IXa.

	P	Δ	v
TY Sct	$11^{d}.06$	— 0.04	— 0.01
Z Lac	10.89	— 0.02	— 0.01
FQ Car	10.27	0.00	— 0.04
AQ Car	9.77	+ 0.06	— 0.03
S Nor	9.76	+ 0.03	— 0.06
YZ Sgr	9.55	+ 0.07	— 0.04

Die Darstellung ist weit besser, als man bei der Unsicherheit der Δ erwarten konnte. Die v besitzen systematisch negative Werte; wollte man durch kleine Änderungen in den Zahlen der Formel C) diese systematische Abweichung zum Verschwinden bringen, so würde man die sonstige Darstellung etwas verschlechtern. Ich habe daher darauf verzichtet, zumal es sich ja um eine sehr kleine Differenz handelt.

TY Scuti und Z Lacertae weisen einen negativen Wert von Δ auf, der Buckel liegt mit seiner höchsten Erhebung etwas vor dem Maximum der glatten Kurve. Bei Z Lacertae ist der geringe Betrag $\Delta = -0.02$ kaum zu verbürgen. Bei TY Scuti ist die benutzte Lichtkurve von Graff (A N 5223) keineswegs sehr sicher; Leiner (A N 5213) findet sogar eine glatte Lichtkurve für diesen Stern, und es ist zu vermuten, daß dieselbe veränderlich ist. Auffällig ist allerdings, daß auch die Formel C) negative Werte von Δ für diese beiden Sterne ergibt.

Bei ζ Geminorum ist der Buckel im Maximum durch eine kleine Einbiegung der lichtelektrischen Kurve von Guthnick angedeutet [es ist nach C) bei diesem Stern $\Delta = +0.06$ zu erwarten]. Der kleine Buckel im Abstieg der Lichtkurve von YZ Sagittarii wird durch die Formel C) nicht erfaßt.

Mit den genannten Sternen, also ungefähr bei $\Delta = 0.00$, hört der Gültigkeitsbereich der Formel auf. Die Buckel im aufsteigenden Aste der

Lichtkurven einiger der Sterne in Tabelle V werden nicht mehr durch sie dargestellt. Immerhin erstreckt sich der Bereich der Formel C) von $P = 11^{d}.0$ bis $P = 4^{d}.0$ und von $\Delta = 0.0$ bis $\Delta = 0.6$.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei der Formel C). Δ ist in Teilen der Periode, P in Tagen ausgedrückt. Es ist nun sehr auffällig, daß das konstante Glied auf der rechten Seite gerade gleich der Einheit (mit einem mittleren Fehler von ± 0.03) ist. $1 - \Delta = d$ ist offenbar der Abstand des Buckels vom folgenden Maximum, und es wird

$$d = +0.093\ P.$$

Der entsprechende Abstand in Tagen sei D, so ist

$$D = dP$$

$$C') \qquad D = +0.093\ P^2 = \frac{P^2}{10.75}.$$

$10^{d}.75$ ist die Periode, für die $\Delta = 0$, also $d = 1$ wird. Merkwürdig ist, daß dieser Periodenwert dem Mittel aller Perioden der bekannten langperiodischen δ Cephei-Sterne entspricht; dieser Mittelwert ist $10^{d}.7$, mit einem mittleren Fehler von $\pm 0^{d}.63$ (165 Sterne).

Eine vollkommene Theorie der δ Cephei-Sterne wird die hier abgeleitete Formel zu erklären haben.

Die enge Beziehung, die durch die Gleichung C) zwischen den Sternen der Tabelle VI und den Sternen mit Lichtkurven der Form $b_4 p$ in Tabelle V hergestellt wird, läßt die starke Vermutung entstehen, daß die letztgenannten Sterne nicht zu den »X Cygni-Sternen« gehören, also nicht in Tabelle V, sondern an die Spitze von Tabelle VI gehören. Es fragt sich nun, ob dies nicht vielleicht für alle Sterne mit *b*-Kurven in Tabelle V gilt. Zunächst wissen wir aus den Untersuchungen am Eingange dieser Abhandlung, daß in der Tat ε Doradus (Lichtkurve b_4) und ζ Geminorum (b_3) nach dem Verhalten ihrer der Gleichung B) genügenden *f*-Werte den gewöhnlichen δ Cephei-Sternen beizuzählen sind, also eigentlich in die Tabelle VI gehören. Man wird daher wahrscheinlich alle Sterne mit b_3- und b_4-Kurven nach Tabelle VI zu überführen haben. (Alle diese Sterne haben, von dem abnormen und in Anbetracht der großen Amplitude der Radialgeschwindigkeit sicher zu den X Cygni-Sternen gehörigen R U Camelopardalis abgesehen, Perioden von weniger als $11^{d}.1$.) Schwieriger ist die Entscheidung für die Sterne mit b_1- und b_2-Kurven. Den Verlauf der periodischen Linienverschiebungen kennen wir nur für einen von ihnen, nämlich Y Ophiuchi ($P = 17^{d}.12$, Lk $= b_1$). Die spektroskopischen Bahnelemente dieses Veränderlichen genügen, obwohl die Lichtkurve symmetrisch ist, der Gleichung A), die sonst nur für Sterne mit unsymmetrischen Lichtkurven gilt. Es scheint also, als wäre Y Ophiuchi trotz seiner langen Periode nicht zu den »X Cygni-Sternen« zu rechnen, sondern von Tabelle V nach Tabelle VI zu überführen. Es ist aber folgendes zu bedenken: Wir sahen, daß für die ζ Geminorum-Sterne mit kürzeren Perioden für gleiche Werte von $e \cos \omega$ die Massenfunktion *f* bedeutend kleiner ist als bei Sternen mit unsymmetrischen Lichtkurven. Ganz entsprechend könnten sehr wohl unter den

X Cygni-Sternen die mit symmetrischen Lichtkurven, also z. B. Y Ophiuchi, kleinere Werte von f aufweisen als die mit unsymmetrischen Kurven. So könnte Y Ophiuchi trotz seines kleinen f-Wertes zu den X Cygni-Sternen zu rechnen sein. Allerdings müßten wir es dann zunächst als einen Zufall ansehen, daß der f-Wert dieses Sternes der Gleichung A) genügt; aber merkwürdig bleibt ja wegen der symmetrischen Form der Lichtkurve diese Tatsache auch dann, wenn wir Y Ophiuchi zu den gewöhnlichen δ Cephei-Sternen rechnen.

Wir wollen also die Sterne mit Lichtkurven der Form b_1 und b_2 in Tabelle V belassen. Ob mit dieser Entscheidung das Richtige getroffen ist, muß allerdings als sehr zweifelhaft bezeichnet werden.

Wenn wir uns nun die Sterne mit b_3-, b_4- und b_4p-Kurven in die Tabelle VI übergeführt denken und den am Ende der Tabelle V befindlichen Stern $\varkappa$ Pavonis, der seiner Kurvenform nach überhaupt etwas isoliert dasteht, ganz weglassen, so ändern sich natürlich die Tabellen VII und VIII. In ersterer fällt die letzte Zeile ganz fort und die vorletzte wird:

$P = 12^d.64$ bis $10^d.38$ $\varepsilon = 0.44\,(7)$ Aph : $1.7 = 0^m.61\,(3)$ Av $= 0^m.90\,(4)$.

Das früher über die Vergleichung der Lichtkurven mit denen der Me-Sterne Gesagte bleibt im wesentlichen bestehen, nur wird der Gang in den ε und A durch den Fortfall der letzten Zeile kleiner als früher.

An den Anfang von Tabelle VIII kommt folgende Zeile:

$P = 11^d.06$ bis $9^d.55$ $\varepsilon = 0.47\,(12)$ Aph : $17 = 0^m.69\,(9)$ Av $= 0^m.63\,(4)$.

Die A schließen sich gut an die übrigen Werte in der Tabelle VIII an, in ε aber besteht ein großer Sprung von der hinzugekommenen ersten Zeile zu den anderen Werten. Bei den b_4p-Kurven scheint mit dem Abwandern des Buckels vom Maximum nach dem Abstieg hin, wie es mit abnehmender Periode erfolgt, zugleich der Anstieg der Lichtkurve steiler zu werden, so daß für diese Kurven die starke Änderung von ε vorstellbar wird. Es sei aber mit allem Nachdruck hervorgehoben, daß diese Betrachtungen naturgemäß nur ganz vorläufiger Natur sein können. Ebenso betone ich nochmals, daß ich die hier angenommene Zweiteilung der langperiodischen δ Cephei-Sterne keineswegs für erwiesen erachte. Es handelt sich vielmehr nur um eine Arbeitshypothese, die einige Beobachtungstatsachen, wie die verwickelte Abhängigkeit der Form der Lichtkurve von der Periode, die eigentümliche Form der Perioden-Häufigkeitskurve u. a. m., verständlicher erscheinen läßt, als sie es vorher waren.

Noch ein Punkt verdient erwähnt zu werden: Wenn man auf Grund des Gesagten in Tabelle I, Gruppe II, den Stern Y Ophiuchi wegläßt, zo zeigen die Werte $100\,f$ einen freilich nicht sehr starken Gang mit der Periode. Es wäre daher denkbar, daß, wenn dieser Gang mit wachsendem P stärker wird, die großen f-Werte für die »X Cygni-Sterne« entstehen, ohne daß irgendwo ein Sprung stattfindet, d. h. es würde ein allmählicher Übergang von den Sternen der Gruppe II zu denen der Gruppe I bestehen. Dagegen spricht aber, daß $100\,f$ für l Carinae ($P = 35^d$) kleiner ist als für X Cygni ($P = 16^d$), und daß bei den ζ Geminorum-Sternen Y Ophiuchi ($P = 17^d$) einen kleineren

Wert von $100f$ aufweist als ζ Geminorum und β Doradus ($P = 10^d$). Auch hier bleiben also die Verhältnisse unklar.

Schließlich sollen nun auch die kurzperiodischen δ Cephei-Sterne ($P < 1^d$) in bezug auf die Abhängigkeit ihrer Lichtkurven von der Periodenlänge untersucht werden. Es wurde daher zunächst eine den Tabellen V und VI entsprechende Tabelle dieser Veränderlichen aufgestellt (Tabelle X). Für die Quellenangaben sind die früheren Abkürzungen verwandt worden, zu denen noch die folgenden hinzukommen:

BA = Bulletin Astronomique.
Bull Ac. Prag = Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême.
Fabra Bol = Boletin del Observatorio Fabra.
G. u. Pr. = Guthnick und Prager, Kleinere Veröffentlichungen der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg Nr. 4.
Hamb. Mitt. = Mitteilungen der Hamburger Sternwarte in Bergedorf.
R. A. J. = Russisches Astronomisches Journal.

Zur Kennzeichnung der Lichtkurven wurde das folgende System von Bezeichnungen gewählt, welches, um Verwechslungen zu vermeiden, absichtlich ganz anders gestaltet ist als das für die langperiodischen δ Cephei-Sterne:

I: Glatte Lichtkurve mit längerer konstanter Phase im *m*, steilem Aufstieg und relativ zum *m* spitzen *M* (typische »Antalgol-Kurven«).
I*a*: Ebenso, aber mit einer Welle oder einem Buckel während der konstanten Phase im *m*.
I*b*: Ebenso wie I, aber mit Welle oder Buckel im Abstieg.
I*ab*: Ebenso wie I, aber mit Welle oder Buckel im Abstieg und während der konstanten Phase im *m*.
II: Der Abstieg dauert bis unmittelbar vor dem im allgemeinen steilen Aufstieg bei glattem Verlauf der Lichtkurve. Das *M* ist relativ zum *m* im allgemeinen spitz.
II*a*: Welle oder Buckel unmittelbar vor dem *m*, wodurch dieses oft spitz wird; sonst wie II.
II*b*: Wie IIa, doch liegt die Welle oder der Buckel etwas höher.
II*ab*: Wie II, mit Welle oder Buckel im Verlaufe des Abstieges und unmittelbar vor dem *m*.
III_1: ziemlich symmetrische, glatte Lichtkurve, *M* spitzer als *m*.
III_2: ebenso, aber *M* und *m* gleich spitz.
III_3: ebenso, aber *M* flacher als *m*.

Besondere Eigentümlichkeiten der Lichtkurven sind in der letzten Kolumne der Tabelle oder in den Anmerkungen am Ende der letzteren hervorgehoben.

Bei den Lichtkurven mit sehr flachem Minimum ist bei der Berechnung von

$$\varepsilon = \frac{M - m}{P}$$

für *m* die Zeit des Endes des Minimums, also des Beginnes des Helligkeitsanstieges, angesetzt.

Tabelle X.

Kurzperiodische δ Cephei-Sterne. $P < 1^d$.

	P	ε	Aph	Av	Lk.	
UZ Cas	$0^d.810$	0.28	—	$0^m.5$	II	AN 5228. *M* nicht sehr spitz
XX And	.723	.18	—	—	II*a*	AN 5376
EE Car	.679	.13	—	—	II*a*	BAN 63
SU Dra	.660	.23	$1^m.2$	—	II*ab*	Allegh.
Z CVe	.654	.30	1.1	—	II	Allegh.
RX Leo	.653	.23	—	0.5	II	AN 5228
X Ari	.651	.11	—	1.2	II*a*	AN 4985
TX Car	.601	.43	0.7	—	II–III_1	BAN 52
RZ Lib	.596	.08	—	1.5	I*b*	BAN 52
WY Dra	.589	.17	1.4	—	II*a*	AN 5551
S Com	.587	.13	1.6	—	II*a*	Allegh.
U Lep	.581	.30	—	0.7	II*b*	BAN 43
RU CVe	.573	.12	1.5	—	I*ab*–II*ab*	Allegh.
SW Dra	.570	.16	1.4	—	II*a*	Allegh. Welle im Abstieg sehr breit
RR Lyr	.567	.19	1.1	—	I	BAN 24. Kleine Einsenkung direkt vor Aufstieg
UY Cyg	.561	.14	1.1	—	II*ab*	Allegh.
RR Cet	.553	.16	1.2	—	II*a*	Allegh.
W CVe	.552	.15	1.0	—	I*a*–II*a*	Allegh.
RW Cnc	.547	.09	—	1.1	I–II	AN 4985
V LMi	.544	.13	1.7	—	II*a*	AN 5503
RV Leo	.515	.13	—	0.9	I*ab*–II*ab*	AN 5228; Anm. 1
AX Cen	.514	.14	—	—	I*a*	BAN 95
SW Boo	.513	.09	—	1.5	II*ab*	AN 5228
RZ Lyr	.511	.13	—	1.2	I	Nl
VX Vel	.510	.19	0.8	—	I	BAN 56
Y Lyr	.503	.14	—	1.0	II	MN 62 S 200, 65 S 588
SW Her	.493	.35	1.9	—	II	BA 29 S 167. Aufstieg langsam, *m* scharf
CV Cyg	.492	.48	—	0.4	III_3	AN 5588
RT Dor	.483	.20	0.8	—	I	BAN 56
RZ Cam	.480	.15	—	1.0	I	Nl
ST Leo	.478	.10	—	0.9	I*b*	AN 5545
TX Mus	.473	.20	0.4	—	II	BAN 148
SU Aur	.470	.48	—	0.6	III_2	Bull Ac Prag 1912
V Com	.469	.13	—	0.8	I	AN 5228
RY Com	.469	.24	1.4	—	I	G. u. Pr.
RV UMa ...	.468	.17	1.3	—	I–II	Allegh.
XZ Cyg	.467	.18	1.1	—	I*a*	Allegh.
AT Cen	.456	.14	0.8	—	I	BAN 56
VX Her	.455	.12	—	—	I*a*	AN 5094
BI Cen	.453	.23	1.7	—	I*ab*–II*ab*	BAN 148
RR Leo	.452	.12	1.3	—	I*a*–II*a*	Allegh.
S Ara	.452	.14	1.9	—	I*a*	BAN 88
ST Oph	.450	.10	—	1.5	I	Laws Bull 17
RW Dra	.443	.13	—	1.0	I	R. A. J. 1 Nr. 2
SW And	.442	.21	1.4	—	II*a*	Allegh.
VZ Her	.440	.09	—	—	II	AN 5077

Anm. 1. Nach den Beobachtungen von Hoffmeister hat die Lichtkurve drei Wellen im Abstieg; doch bedarf dies wohl noch der Bestätigung.

	P	ε	Aph	Av	Lk.	
ST Vir	$0^d.411$	0.13	—	$1^m.1$	I	AN 4284
T Men	.41	.25	$1^m.0$	—	I*a*	BAN 52
TW Her	.400	.14	1.5	—	I—II	AN 5503
RR Gem	.397	.12	—	1.2	II	AN 4207
TZ Aur.....	.392	.18	—	1.2	I*a*—II*a*	AN 4687
RS Boo.....	.377	.18	1.4	—	II*a*	Allegh.
SS Tau	.370	.19	—	0.9	II*a*	AN 4985
SS Cnc	.367	.16	1.6	1.1	II	Hamb. Mitt. 5, Nr. 14, Lk. veränderlich
AA Aql.....	.362	.15	—	1.2	I—II	AN 5457. Lk. veränderlich
SW Cru	.328	.19	0.8	—	II	BAN 148
TV Boo	.312	.32	1.1	—	II	G. u. Pr. Aufstieg langsam, *M* nur wenig spitzer als *m*.
RZ Cep.....	.309	.38	0.7	—	II	Allegh. Aufstieg langsam, *M* und *m* gleich spitz.
SX UMa....	.307	.34	0.7	—	II	Allegh. Aufstieg langsam, *M* abgeflacht, flacher als *m*.
U Com	.293	.41	0.6	—	*pec*	G. u. Pr.; Anm. 2.
TV Lib.....	.270	.15	1.5	—	I*a*	Fabra Bol 10
XX Cyg	.135	.20	1.1	—	II	Allegh.

Anm. 2. Die Lichtkurve ist von besonderer Form, insofern als das Maximum doppelt ist; die erste Erhebung ist nicht ganz so hoch wie die zweite. ε ist mit letzterer gerechnet.

Es soll nun zunächst die Abhängigkeit der ε und A von der Periode untersucht werden. Zu diesem Zwecke bilden wir gruppenweise Mittel von ε, Aph und Av. Da nach M. Güssow für die kurzperiodischen δ Cephei-Sterne im Mittel Aph: Av = 1.3 ist, so dividieren wir die Mittelwerte von Aph noch durch 1.3, um sie mit den Av vergleichbar zu machen. Die Resultate dieser Rechnungen sind in der folgenden Tabelle XI zusammengestellt, die ganz so angeordnet ist, wie die entsprechenden Tabellen VII und VIII für die langperiodischen δ Cephei-Sterne:

Tabelle XI.

Perioden-Intervall	Mittel von		
	ε	Aph: 1.3	Av
$0^d.810$—$0^d.573$	0.21 (13)	$0^m.96$ (6)	$0^m.88$ (5)
0.570—0.510	0.14 (12)	0.92 (7)	1.18 (4)
0.503—0.456	0.23 (13)	0.85 (7)	0.78 (6)
0.455—0.397	0.15 (12)	1.13 (6)	1.20 (4)
0.392—0.135	0.24 (12)	0.82 (9)	1.10 (4)

Es zeigt sich, wie bei den langperiodischen δ Cephei-Sternen von weniger als 9^d Periode (Tab. VIII), keine deutliche Abhängigkeit der ε und A von der Periode. Die Werte von ε zeigen starke Verschiedenheiten, und man hat den Eindruck, daß sich an einem reicheren Materiale, als bisher hier vorliegt, vielleicht Gesetzmäßigkeiten nicht ganz einfacher Art zeigen würden. Auffällig ist in der Tat, daß in dem dritten Periodenintervall zwei Sterne mit symmetrischen Lichtkurven auftreten, nämlich CV Cygni ($P = 0^d.492$) und SU Aurigae ($P = 0^d.470$). Man wird aber die Möglichkeit nicht von der Hand weisen können, daß diese beiden Objekte Bedeckungsveränderliche sind.

Schließt man sie aus, so wird das betreffende Mittel von $\varepsilon = 0.18$, und der Verlauf der Mittelwerte von ε wäre dann bedeutend glatter. Im ersten, namentlich aber auch im letzten Periodenintervall befinden sich einige Sterne mit auffallend großen Werten von ε. Das Auftreten von Lichtkurven mit großen Werten von ε im letzten Periodenintervall erinnert an das Auftreten symmetrischer Lichtkurven bei langperiodischen δ Cephei-Sternen mit Perioden von weniger als 4^d (vgl. Tab. VI).

Die verschiedenen Formen I, II, III der Lichtkurven sind auf die einzelnen Perioden-Intervalle überhaupt ungleichmäßig verteilt. Teilen wir diesen Formen die Zahlenwerte 1, 2, 3, den Übergangsformen I—II und II—III die Zahlenwerte 1.5 und 2.5 zu, so erhalten wir folgende Werte für die mittlere Lichtkurve:

Tabelle XII.

Perioden-Intervall	Mittlere Lichtkurve
$0^d.810-0^d.573$	1.9
0.570—0.510	1.5
0.503—0.456	1.9 (1.3)
0.455—0.397	1.4
0.392—0.135	1.9

wobei die besondere Lichtkurve von U Comae mit 2.5 angesetzt ist. Falls CV Cygni und SU Aurigae Bedeckungsveränderliche sind, gilt in der dritten Zeile der eingeklammerte Wert.

Schließlich wurden für die einzelnen Kurvenformen die Werte von ε, Aph: 1.3 und Av gemittelt; das Ergebnis ist (A ist das Mittel von Aph und Av, wobei die Zahl der benutzten Sterne als Gewicht angesetzt ist):

Tabelle XIII.

Lichtkurve	ε	Aph: 1.3	Av	A
I	0.15 (19)	$0^m.89$ (9)	$1^m.12$ (8)	$1^m.00$
I—II	0.15 (10)	1.06 (6)	1.10 (4)	1.08
II	0.20 (29)	0.93 (18)	0.96 (9)	0.94
II—III, III, pec	0.45 (4)	0.50 (2)	0.50 (2)	0.50

Betrachten wir nun die Eigentümlichkeiten der Lichtkurven noch näher, so sehen wir, daß Buckel oder Wellen im aufsteigenden Aste nicht vorkommen, ebensowenig wie dies bei den langperiodischen δ Cephei-Sternen mit $P < 9^d$ der Fall ist. (In einzelnen Perioden mögen solche Wellen auch im aufsteigenden Aste vorhanden sein, wie es Prager z. B. bei RR Lyrae beobachtet hat[1]. In den mittleren Lichtkurven scheinen sie sich aber nicht mehr zu verraten.) Häufig sind dagegen Buckel und Wellen im absteigenden Aste, besonders bei Sternen mit relativ langen Perioden. Hier bilden sie sogar die Regel, ganz entsprechend wie bei den langperiodischen δ Cephei-

[1] Veröffentlichungen der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg Bd. V, Heft 4.

Sternen mit $P < 9^d$ (Tab. VI) gerade die mit den längsten Perioden in der Regel Buckel im Abstiege der Lichtkurven aufweisen. Bei den kurzperiodischen δ Cephei-Sternen treten aber häufig zwei Wellen im Abstiege auf (die betreffenden Lichtkurven sind mit *ab* bezeichnet), aber fast ausschließlich nur, wenn $P > 0^d.51$ ist. (Bei den Sternen in Tab. VI kommen solche doppelten Wellen nur zweimal vor, bei TZ Muscae und bei BF Ophiuchi.)

Es soll nun, wie es für die Sterne der Tabelle VI schon geschehen ist, auch für die der Tabelle X die Lage jener Ungleichmäßigkeiten im Abstiege näher untersucht werden, um zu sehen, ob auch hier eine Abhängigkeit von der Periode vorhanden ist. Es wurde daher für alle jene Buckel und Wellen der in Teilen der Periode ausgedrückte Abstand Δ vom vorangehenden Maximum bestimmt, und die Δ wurden mit den P als Abszissen in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingetragen. Es zeigte sich nun, daß die Sachlage hier viel komplizierter ist als bei den langperiodischen δ Cephei-Sternen, wie schon von vornherein auf Grund des Auftretens zweier Wellen bei einigen Sternen zu erwarten war. Die Punkte ordnen sich nämlich längs zweier Geraden an, von denen die eine gegen die Abszissenachse geneigt, die andere aber ihr parallel ist, ungefähr bei $\Delta = 0.72$. Für $P > 0^d.45$ sind die beiden Geraden soweit getrennt, daß kein Zweifel darüber besteht, zu welcher von ihnen jeder einzelne Punkt zu rechnen ist; für kleinere P ist man über die Zugehörigkeit in einigen Fällen im Unsichern, aber diese Unsicherheit beschränkt sich, wenn man für die geneigte Gerade nur Punkte benutzt, die $P > 0^d.36$ entsprechen, auf drei Fälle (SW Andromedae, T Mensae, RS Bootis), und man kann dabei mit einiger Wahrscheinlichkeit sagen, daß diese drei Punkte zur der geneigten Geraden gehören, zu der sie denn auch gerechnet wurden.

In der folgenden Tabelle sind nun die der geneigten Geraden zugerechneten Punkte zusammengestellt. Die Sterne mit Lichtkurven I*ab* — II*ab* und II*ab* (I*ab* kommt nicht vor) sind durch das Zeichen * hervorgehoben; zu der geneigten Geraden gehört stets der erste von den beiden Buckeln, vom vorangehenden Maximum aus gerechnet.

Tabelle XIV.

	P	Δ	v	
SU Dra* ...	$0^d.660$	0.35	+ 0.06	Flache Welle
RZ Lib	.596	.34	− 0.02	Scharfer Buckel
U Lep	.581	.28	− 0.10	Scharfer Buckel
RU CVe*...	.573	.40	+ 0.01	Flache Welle
UY Cyg*...	.561	.36	− 0.04	Flache Welle
RV Leo* ...	.515	.52	+ 0.07	Gut definierte Welle
SW Boo*...	.513	.41	− 0.04	Flache Welle
BI Cen *....	.453	.44	− 0.08	Scharfer Buckel
SW And....	.442	.62	+ 0.09	Flache Welle
T Men	.410	.61	+ 0.05	Flache Welle
TZ Aur.....	.392	.56	− 0.02	Flache Welle
RS Boo.....	.377	.66	+ 0.06	Flache Welle
SS Tau.....	.370	.57	− 0.03	Flache Welle

Die Ausgleichung ergibt für diese Wellen, die ich als solche erster Art bezeichne:

$$\Delta = -1.17\,P + 1.05.$$

Das konstante Glied rechts weicht nur wenig (innerhalb seines mittleren Fehlers) von der Einheit ab, und wir haben hier genau dasselbe Ergebnis wie bei den langperiodischen δ Cephei-Sternen, wo die betreffende Zahl ebenfalls gleich der Einheit war. Wir wollen nun das konstante Glied gleich der Einheit setzen und den Koeffizienten von P erneut bestimmen. Es wird dann

D) $$\Delta = -1.07\,P + 1.00.$$

Die Summe der Fehlerquadrate wächst infolge dieser Festsetzung von 0.0429 auf 0.0441, also nur ganz unmerklich. Die mit der zweiten Formel berechneten Differenzen v = Beob.—Rechn. sind in der Tabelle XIV gegeben. Der mittlere Fehler des Koeffizienten von P ist ± 0.03.

Die Darstellung der einzelnen Werte ist schlechter als die entsprechende bei den langperiodischen δ Cephei-Sternen, und man hat hier den Eindruck, daß es sich nur um ein statistisches Gesetz handelt. Allerdings sind hier infolge der Kleinheit des Materials zum Teil ungenauere Lichtkurven benutzt als für die langperiodischen δ Cephei-Sterne, und die Wellen sind zum Teil auch schlechter ausgeprägt, als es bei den letzteren durchschnittlich der Fall ist, so daß die Δ unsicher werden.

Analog wie früher können wir schreiben

$$d = 1 - \Delta = 1.07\,P$$

oder wenn wir den Abstand vom folgenden Maximum in Tagen ausdrücken:

$$D = 1.07\,P^2 = \frac{P^2}{0.935}.$$

Die Zahl im Nenner rechts ($0^d.935$) liegt etwas oberhalb der jetzt gültigen Periodengrenze für die kurzperiodischen δ Cephei-Sterne ($0^d.810$). Es ist vielleicht sehr kühn, darauf hinzuweisen, daß die entsprechende Zahl für die langperiodischen δ Cephei-Sterne ($10^d.75$) jedenfalls nahe der Grenze liegt, wo nach unseren früheren Betrachtungen die gewöhnlichen langperiodischen δ Cephei-Sterne im wesentlichen aufhören und die hypothetischen »X Cygni-Sterne« beginnen.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der Wellen zweiter Art zu, die für alle Perioden in ungefähr konstantem Abstand Δ vom vorangehenden Maximum liegen; sie sind in der nachstehenden Tabelle XV zusammengestellt.

Das Mittel der Δ ist

$$\Delta_m = 0.72.$$

Die $\Delta - \Delta_m$ sind in der letzten Kolumne der Tabelle gegeben. Als m. F. des einzelnen Δ ergibt sich $\pm$ 0.04, als m. F. von $\Delta_m \pm$ 0.008. Wenn auch die Zeichenfolgen bei den $\Delta - \Delta_m$ nicht ganz befriedigend verlaufen, so

Tabelle XV.

	P	Δ	$\Delta - \Delta_m$	
XX And....	$0^d.723$	0.66	−0.06	Scharfer Buckel
EE Car.....	.679	.70	−0.02	Scharfer Buckel
SU Dra* ...	.660	.62	−0.10	Gut definierte Welle
X Ari	.651	.74	+0.02	Gut definierte Welle
WY Dra....	.589	.70	−0.02	Gut definierte Welle
S Com.....	.587	.73	+0.01	Flache Welle
RU CVe*...	.573	.70	−0.02	Gut definierte Welle
UY Cyg*...	.561	.73	+0.01	Gut definierte Welle
RR Cet.....	.553	.68	−0.04	Gut definierte Welle
W CVe.....	.552	.74	+0.02	Gut definierte Welle
V L Mi	.544	.78	+0.06	Gut definierte Welle
RV Leo* ...	.515	.74	+0.02	Gut definierte Welle
AX Cen	.514	.72	0.00	Flache Welle
SW Boo*...	.513	.75	+0.03	Flache Welle
XZ Cyg	.467	.73	+0.01	Flache Welle
VX Her	.455	.76	+0.04	Gut definierte Welle
BI Cen*....	.453	.68	−0.04	Scharfer Buckel
RR Leo.....	.452	.75	+0.03	Sehr flache Welle
S Ara	.452	.70	−0.02	Kleiner Buckel
TV Lib.....	.270	.70	−0.02	Flache Welle

kommt die Annahme eines konstanten Wertes von Δ der Wahrheit jedenfalls ziemlich nahe.

Die Welle in der Lichtkurve von TV Librae ($P = 0^d.270$, $\Delta = 0.70$) kann sehr wohl auch eine Welle der ersten Art sein; denn die Rechnung nach D) ergibt $\Delta = 0.71$.

Nicht durch die vorstehende Darstellung erfaßt werden die folgenden Ungleichmäßigkeiten in den Lichtkurven kurzperiodischer δ Cephei-Sterne:

SW Draconis ($P = 0^d.570$). Im Abstieg befindet sich eine sehr breite Welle, die die ganze untere Hälfte des absteigenden Astes einnimmt; sie könnte vielleicht durch ein Zusammenfließen einer Welle der ersten und einer solchen der zweiten Art entstanden sein.

RR Lyrae ($P = 0^d.567$). Die kleine Einsenkung vor dem Anstieg der Helligkeit kommt wohl durch eine ihm unmittelbar vorangehende flache Welle der zweiten Art zustande.

RV Leonis ($P = 0^d.515$). Bei $\Delta = 0.21$ befindet sich eine dritte Welle; es handelt sich aber um eine visuelle Lichtkurve, und es bleibt daher wohl noch eine Bestätigung abzuwarten.

ST Leonis ($P = 0^d.478$). Bei $\Delta = 0.30$ befindet sich eine Welle; auch hier handelt es sich um eine visuelle Lichtkurve.

U Comae ($P = 0^d.293$). Das sekundäre Maximum im Aufstieg liegt bei $\Delta = 0.82$. Die Formel D) für Wellen erster Art ergibt $\Delta = 0.69$, für eine Welle der zweiten Art wäre $\Delta = 0.72$ anzunehmen. Die Darstellung ist also in beiden Fällen schlecht. Aber es kann sich hier offenbar um eine ganz andere Erscheinung handeln.

Die vorstehenden Betrachtungen haben bemerkenswerte Ähnlichkeiten zwischen dem Lichtwechsel der kurzperiodischen δ Cephei-Sterne und dem der langperiodischen δ Cephei-Sterne in Tabelle VI ($P < 9^d$) ergeben. Die wesentlichsten Unterschiede bestehen darin, daß bei ersteren im Abstiege Wellen von zwei verschiedenen Arten auftreten, und daß ferner unter den Lichtkurven der kurzperiodischen δ Cephei-Sterne solche mit konstanter Phase im Minimum häufig sind, die in den Tabellen V und VI höchstens in ziemlich wenig ausgeprägter Form als Ausnahmefälle vorkommen (WZ Carinae, $P = 23^d.00$, AB Velorum, $P = 6^d.25$, FN Carinae, $P = 4^d.59$).

Auf ein Bedenken gegenüber den in dieser Arbeit gemachten Ausführungen möchte ich noch hinweisen. Es sind, namentlich in den Tabellen V und VI, die δ Cephei-Sterne im Sternbilde Carina und in dessen Umgebung sehr stark zur Geltung gekommen, da ihre Lichtkurven durch die Bemühungen Hertzsprungs und seiner Mitarbeiter sehr genau bekannt sind. Wenn nun etwa die δ Cephei-Sterne gerade in dieser Gegend des Himmels andere Eigenschaften haben sollten, als die am übrigen Himmel verteilten, so würden unsere Folgerungen dadurch beeinflußt worden sein. Es liegt aber zunächst kein Grund zu einer solchen Befürchtung vor; die genannten Sterne scheinen sich vielmehr ungezwungen unter die übrigen einzuordnen.

Die vorliegende Arbeit war in ihren Grundzügen (bis auf die Untersuchung über die Lage der Buckel und Wellen in den Lichtkuren und bis auf die Ausarbeitung für den Druck) im wesentlichen fertig, als eine Abhandlung von Hrn. J. Schilt im Astronomical Journal Nr. 910 (datiert 1928, Oktober 16) erschien, in der der Verfasser, von gänzlich anderen Gesichtspunkten ausgehend, ebenfalls zu dem Schlusse kommt, daß die langperiodischen δ Cephei-Sterne in zwei Gruppen zerfallen, deren Grenze er auf $P = 10^d$ festlegt. (Ich habe für die Grenze $P = 10^d$ bis 11^d gefunden unter der Voraussetzung, daß die Sterne mit b_3- und b_4-Lichtkurven zu den gewöhnlichen δ Cephei-Sternen gehören.) Die Ausführungen von Hrn. Schilt und die meinigen ergänzen sich in glücklicher Weise und haben nur äußerst wenige Berührungspunkte. Leider kann ich aber gegen einen Teil von Schilts Betrachtungen ein gewisses Bedenken nicht unterdrücken. Er geht aus von dem Umstande, daß den Spektren gewisser δ Cephei-Sterne der c-Charakter beigelegt worden ist, denen anderer nicht, und ordnet die Sterne nach diesem Unterscheidungsmerkmal in zwei Tabellen ein. Seine Tabelle I (δ Cephei-Sterne mit c-Charakter) enthält nun, was ihm auch nicht entgangen ist, Sterne von durchschnittlich bedeutend größerer scheinbarer Helligkeit als seine Tabelle II (Sterne ohne c-Charakter). Es ist nun wohl möglich — und das ist mein erstes Bedenken —, daß der c-Charakter bei Sternen der Tabelle II oft nur deswegen nicht bemerkt worden ist, weil die zur Klassifizierung benutzten photographischen Aufnahmen der Spektren zu schwach waren, während für die helleren Sterne in Tabelle I diese Fehlerquelle weniger in Betracht gekommen ist. Zum mindesten wäre diese Frage noch näher zu prüfen.

Ein zweites Bedenken ist folgendes: Nach einer Abhandlung von Hrn. Schilt in BAN Nr. 48 umfassen die c-Sterne, von denen er ein handschriftliches

Verzeichnis angelegt hat, den Spektralbereich von B0 bis G5. Für Spektra über G5 hinaus scheint also der c-Charakter nicht mehr erkennbar zu sein oder nicht mehr vorzukommen. (Dementsprechend enthält auch Schilts Tabelle I in A. J. Nr. 910 nur 2 Spektren über G5 hinaus, nämlich G6.5 und G7, Abweichungen von G5, die durch Schätzungsfehler entstanden sein können.) Nach H. Shapley und Margaret L. Walton (Harvard Circ 313) ist nun für δ Cephei-Sterne mit Perioden von etwa 14^d an ein mittleres Spektrum von G5 und darüber hinaus zu erwarten. Der c-Charakter ist also für δ Cephei-Sterne mit sehr langen Perioden von vornherein unwahrscheinlich (Schilts Tabelle II enthält unter den 19 Sternen mit mehr als 12^d Periode in der Tat auch 12, die Spektra über G5 hinaus haben, und außerdem 3 G5-Sterne), und es ist daher eigentlich selbstverständlich, daß die Sterne mit sehr langen Perioden ganz vorwiegend in die Tabelle II kommen.

Abgesehen von diesen Bedenken belegt indessen Hr. Schilt seine Ansicht über die Zweiteilung der langperiodischen δ Cephei-Sterne mit sehr bemerkenswerten Gründen, und wenn man zu diesen die von mir in gleichem Sinne vorgebrachten hinzufügt, so wird man die Anschauung, daß die langperiodischen δ Cephei-Sterne in zwei Gruppen zerfallen, zunächst nicht ganz abweisen können. Die wichtige Frage, ob damit Shapleys Gesetz über die Beziehung zwischen absoluter Helligkeit und Periode in irgendeiner Weise erschüttert wird, braucht nicht erörtert zu werden, ehe die Verhältnisse klarer liegen. Von vornherein bedingt das Bestehen jener zwei Gruppen nicht notwendig die Ungültigkeit dieses Gesetzes.

Ganz besonders wichtig wäre für die weitere Behandlung der in der vorliegenden Abhandlung diskutierten Fragen die Bestimmung der spektroskopischen Bahnelemente weiterer δ Cephei-Sterne, namentlich von solchen mit Perioden von mehr als zehn Tagen.

Zwei Sätze über schlichte Funktionen.

Von A. Marx
in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 31. Januar 1929 [s. oben S. 13].)

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$ die Klasse der im Einheitskreise $|z| < 1$ regulären und schlichten Funktionen der Form

$$(1) \qquad f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots + c_n z^n + \cdots .$$

Bekanntlich[1] gibt es eine feste Kreisscheibe um den Koordinatenanfangspunkt, die durch jede Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$ auf ein konvexes Gebiet abgebildet wird; es ist auch die Existenz einer festen Kreisscheibe um den Koordinatenanfangspunkt bekannt, welche durch jede Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$ auf ein in bezug auf den Nullpunkt sternförmiges Gebiet abgebildet wird. Wir bezeichnen die obere Grenze der Radien dieser Kreisscheiben bzw. mit R_k und R_s. Während die Zahl R_k, die sogenannte Rundungsschranke, bereits bekannt ist (sie ist gleich $2 - \sqrt{3} = 0.26\cdots$)[2], ist die Bestimmung der Sternschranke R_s bis heute nicht gelungen. Hr. R. Nevanlinna[3] fand die Abschätzung

$$R_s > 0.47 .$$

Es ist freilich $R_s < 1$.

Nach einem bekannten Kriterium für die Sternförmigkeit des Bildes einer Kreislinie um den Nullpunkt bei der durch (1) vermittelten Abbildung kann die Sternschranke folgendermaßen charakterisiert werden. R_s ist die obere Grenze der Radien der Kreise $|z| < r$, in denen für sämtliche Funktionen der Klasse $\mathfrak{S}$

$$\Re\, z \frac{f'(z)}{f(z)} > 0$$

gilt.

Wir zeigen im § 1 (Satz I) mit Hilfe eines oft benutzten einfachen Kunstgriffes, daß man R_s auch als die obere Grenze der Radien der Kreise

[1] Vgl. z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. II (Leipzig und Berlin 1927), S. 92/93.

[2] R. Nevanlinna: Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises (Oeversikt av Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar 1919/20, Avd. A. No. 7).

[3] Über die konforme Abbildung von Sterngebieten. (Oeversikt av Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar 1920/21. Avd. A. No. 6).

$|z| < r$ kennzeichnen kann, in denen für sämtliche Funktionen der Klasse $\mathfrak{S}$ die Ungleichung

$$\Re \frac{f(z)}{z} > 0$$

erfüllt ist.

Als Anwendung beweisen wir im § 3 die Abschätzung

$$0.64 < R_s \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70\cdots . \tag{2}$$

Die untere Abschätzung kann hier präziser durch $R_s \geq r$ ersetzt werden, wobei r die im Intervall $0 < r < 1$ gelegene Wurzel der transzendenten Gleichung

$$r \log \frac{1+r}{1-r} = 2\left(\frac{r^2}{1} + \frac{r^4}{3} + \frac{r^6}{5} + \cdots\right) = 1 \tag{3}$$

bedeutet. Der Beweis beruht außer dem erwähnten Satz I auf einer Abschätzung des Argumentes von $\frac{f(z)}{z}$ (§ 2, Satz II), die an sich nicht ohne Interesse sein dürfte. Hierbei erweist sich, wie so oft, der Bieberbachsche Flächensatz als sehr nützlich.

§ 1. Eine neue Charakterisierung der Sternschranke.

Satz I. Es sei z eine Stelle im Innern des Einheitskreises $|z| < 1$ von der Eigenschaft, daß für alle Funktionen der Klasse $\mathfrak{S}$

$$\Re z \frac{f'(z)}{f(z)} > 0$$

gilt. Dann hat man ebenfalls für alle Funktionen der Klasse $\mathfrak{S}$

$$\Re \frac{f(z)}{z} > 0.$$

Das Umgekehrte ist auch richtig.

Wir bilden bei festem z die Funktion

$$g(\zeta) = -\frac{f\left(\frac{-\zeta+z}{1-\bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{f'(z)(1-|z|^2)} = \zeta + \gamma_2\zeta^2 + \gamma_3\zeta^3 + \cdots, \tag{4}$$

welche offenbar auch zur Klasse $\mathfrak{S}$ gehört. Es ist

$$g(z) = \frac{f(z)}{f'(z)(1-|z|^2)}; \qquad g'(z) = \frac{1}{f'(z)(1-|z|^2)^2},$$

so daß die Formeln gelten:

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{1-|z|^2}\,\frac{1}{z\dfrac{g'(z)}{g(z)}}; \qquad z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-|z|^2}\,\frac{1}{\dfrac{g(z)}{z}}.$$

Hieraus folgt ohne weiteres die Behauptung.

§ 2. Abschätzung von $\left|\arg\dfrac{f(z)}{z}\right|$.

Satz II. Es sei r_0 die im Intervall $0 < r < 1$ gelegene Wurzel der transzendenten Gleichung

$$(5) \qquad \frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r} = \frac{r^2}{1}+\frac{r^4}{3}+\frac{r^6}{5}+\cdots = 1\,[1].$$

Dann gilt [2] für jedes z mit $0 < |z| = r < r_0$

$$(6) \qquad \left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \leqq 2\arcsin\left|\sqrt{\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}}\right|.$$

Insbesondere gilt also für jedes $r < r_0$

$$(6') \qquad \left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| < \pi.$$

Zum Beweise setzen wir $z = \dfrac{1}{\eta^2}$ und betrachten die Funktion

$$(7) \qquad k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{f\left(\dfrac{1}{\eta^2}\right)}} = \eta + \frac{b_1}{\eta} + \frac{b_3}{\eta^3} + \cdots + \frac{b_{2n-1}}{\eta^{2n-1}} + \cdots.$$

Sie bildet das Äußere des Einheitskreises, d. h. $|\eta| > 1$, schlicht ab, so daß der Flächensatz

$$(8) \qquad |b_1|^2 + 3|b_3|^2 + \cdots + (2n-1)|b_{2n-1}|^2 + \cdots \leqq 1$$

gilt. Man hat nun

$$\frac{f(z)}{z} = \left(\frac{k(\eta)}{\eta}\right)^{-2},$$

so daß

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| = 2\left|\arg\frac{k(\eta)}{\eta}\right|$$

$$= 2\left|\arg\left(1+\frac{b_1}{\eta^2}+\frac{b_3}{\eta^4}+\cdots+\frac{b_{2n-1}}{\eta^{2n}}+\cdots\right)\right|$$

$$(9) \qquad = 2\left|\arg\left(1+b_1 z+b_3 z^2+\cdots+b_{2n-1}z^n+\cdots\right)\right|$$

---

[1] Es ist $0.83 < r_0 < 0.84$.

[2] Unter $\arg x$ ist diejenige Bestimmung zu verstehen, die sich für $x = 0$ auf 0 reduziert; ebenso denken wir uns die Funktion $\arcsin x$ durch $\arcsin 0 = 0$ normiert.

ist. Nach der Schwarzschen Ungleichung gilt aber für $|z| = r$

$$|b_1 z + b_3 z^2 + \cdots + b_{2n-1} z^n + \cdots| \leqq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) |b_{2n-1}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2n-1} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

d. h. mit Rücksicht auf (8),

$$\leqq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2n-1} \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{r}{2} \log \frac{1+r}{1-r}}.$$

Für die Werte $r < r_0$ — laut Voraussetzung betrachten wir nur solche — ist der letzte Ausdruck < 1.

Nun ist, wie geometrisch einleuchtet, für $|x| < 1$

$$|\arg(1+x)| \leqq \arcsin|x|, \tag{10}$$

so daß aus (9)

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leqq 2 \arcsin \sqrt{\frac{r}{2} \log \frac{1+r}{1-r}}$$

folgt, was zu beweisen war.

Aus dem obigen Beweise von Satz I geht übrigens hervor, daß für $0 < |z| = r < r_0$ auch

$$\left| \arg z \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leqq 2 \arcsin \left| \sqrt{\frac{r}{2} \log \frac{1+r}{1-r}} \right| \tag{6''}$$

gilt.

§ 3. Abschätzung von R_s.

Die Ungleichungen (6) bzw. (6″) erlauben eine untere Abschätzung der Sternschranke R_s. Es ist in der Tat nur erforderlich, r so zu wählen, daß

$$2 \arcsin \left| \sqrt{\frac{r}{2} \log \frac{1+r}{1-r}} \right| < \frac{\pi}{2},$$

d. h.

$$r \log \frac{1+r}{1-r} < 1$$

ist. Dies ist z. B. für $r = 0.64$ der Fall, jedoch nicht mehr für $r = 0.65$. Damit ist die untere Abschätzung (2) bewiesen. Um die obere Abschätzung (2) nachzuweisen, sei bemerkt, daß die Ungleichung

$$\Re \frac{f(z)}{z} > 0 \qquad (|z| < r)$$

für $r > \frac{1}{\sqrt{2}}$ sicher nicht allgemein bestehen kann. In der Tat gilt bei der

Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

für $z = \frac{1+i}{2}$

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1-i}{2}\right)^{-2} = 2i^1.$$

§ 4. Bemerkung.

Mit der Abschätzung von $\left|\arg \frac{f(z)}{z}\right|$ für die Unterklasse der in bezug auf den Nullpunkt sternförmig abbildenden Funktionen (1) hat sich Hr. Bieberbach beschäftigt[2]. In der Tat vermittelt die Funktion $f(z)$ dann und nur dann eine derartige Abbildung, wenn man sie in der Form

$$f(z) = zF'(z)$$

schreiben kann, wobei $F(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$ bezeichnet, die den Einheitskreis auf ein konvexes Gebiet abbildet. Dann ist aber $\frac{f(z)}{z} = F'(z)$, so daß es sich um die Abschätzung der Drehung bei konvexen Abbildungen handelt. Hr. Bieberbach gelangt a. a. O. zu dem Resultat

$$(11) \qquad |\arg F'(z)| \leqq 2 \arcsin r \qquad (|z| = r < 1).$$

Diese übrigens genaue Schranke ist freilich kleiner als die in (6); der Quotient der beiden Schranken konvergiert für r 0 gegen 1.

---

[1] Einer Bemerkung von Hrn. G. Szegö zufolge gehört die Funktion

$$f(z) = \frac{z + cz^2}{(1-z)^2}$$

dann und nur dann zur Klasse $\mathfrak{S}$, wenn $|c + \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}$ ist. Wendet man unser Kriterium $\left(\text{statt auf } f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\right)$ auf diese Funktion an und wählt c passend, so ergibt sich sogar $R_s < 0.66$, genauer $R_s \leqq \varrho$, wobei ϱ die positive Wurzel der biquadratischen Gleichung

$$\varrho^4 + 12\varrho^3 + 14\varrho^2 - 4\varrho - 7 = 0$$

bezeichnet.

[2] Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen (Math. Zeitschrift Bd. 4, 1919).

Ausgegeben am 20. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 VI. VII

Library of Congress
AUG 7 1929
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 21. Februar. (S. 101)
Klassensitzung am 28. Februar. (S. 102)
K. F. Bonhoeffer und P. Harteck: Experimente über Para- und Orthowasserstoff. (S. 103)
Wagner: Plan einer Fernsprechkabelverbindung zwischen Europa und Amerika. (Mitteilung vom 23. Februar 1928.) (S. 109)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

VI. Gesamtsitzung. 21. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Penck sprach über den Gebirgsbau des Fernen Westens Nordamerikas.

Ein Deckenbau, vergleichbar mit dem alpinen, herrscht nur westlich der nördlichen Rocky Mountains und der Wasatch-Ketten. Die südlichen Rocky Mountains samt des Plateau Province und den großen Ebenen zeigen lediglich Bewegungen in der Senkrechten; in ihnen kommen Bruchstücke des kanadischen Schildes zutage.

2. Hr. Wiegand legte seinen »Zweiten vorläufigen Bericht über die von den Berliner Staatlichen Museen unternommenen Ausgrabungen auf Samos« vor. (Abh.)

3. Ferner überreichte er das 2. Heft des 2. Bandes des von den Staatlichen Museen zu Berlin herausgegebenen Werkes »Milet. Ergebnisse der Ausgrabungen und Untersuchungen seit dem Jahre 1899«: »Die Milesische Landschaft« von Theodor Wiegand, mit Beiträgen von Kurt Krause, Albert Rehm und Paul Wilski (Berlin 1929).

4. Hr. Stutz überreichte den 2. Band der »Acta Brandenburgica. Brandenburgische Regierungsakten seit der Begründung des Geheimen Rates«: »1606—1607 März« hrsg. von Melle Klinkenborg (Veröffentlichungen der Historischen Kommission für die Provinz Brandenburg und die Reichshauptstadt Berlin, III) (Berlin 1928).

5. Vorgelegt wurde der 1. Band der II. Abtlg. von »Jean Pauls Sämtlichen Werken«, hrsg. von Eduard Berend (Weimar 1928).

Die Preußische Regierung hat am 12. Februar die Wahl des ordentlichen Professors an der Universität Berlin Hrn. Dr. Erwin Schroedinger zum ordentlichen Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse bestätigt.

Ausgegeben am 26. März.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

VII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 28. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

*1. Hr. Einstein sprach über einheitliche Interpretation von Gravitation und Elektrizität.

Übersichtliche Darlegung der Überlegungen, welche unter Zugrundelegung einer Riemann-Metrik mit Fernparellelismus zu einer einheitlichen Interpretation von Gravitation und Elektrizität führen.

2. Hr. Haber legte eine Arbeit von Dr. K. F. Bonhoeffer und Dr. P. Harteck vor: »Experimente über Para- und Orthowasserstoff.«

Es wird experimentell nachgewiesen, daß der gewöhnliche Wasserstoff ein Gemisch von zwei Modifikationen ist, die als Para- und Orthowasserstoff bezeichnet werden. Die gegenseitige Umwandlungsgeschwindigkeit bei Atmosphärendruck ist klein. Eine etwaige Umwandlung durch Strahlung erfolgt jedenfalls mit einer größeren Halbwertszeit als einem Jahr. Durch Anwendung von Druck oder Katalysatoren läßt sich die Umwandlung beschleunigen. Es läßt sich dadurch der Parawasserstoff bei tiefen Temperaturen anreichern. Durch Abpumpen von Wasserstoff, der bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs an Kohle absorbiert ist, kann man praktisch reinen Parawasserstoff herstellen. Er hat bei tiefer Temperatur unter den Versuchsbedingungen ein Wärmeleitvermögen, das um den fünften Teil größer ist als das Wärmeleitvermögen des gewöhnlichen, aus beiden Modifikationen gemischten Wasserstoffs. Er ist bei Zimmertemperatur und Atmosphärendruck in Glasgefäßen ein stabiles Gas, das durch Druck, Katalysatoren oder Entladung in gewöhnlichen Wasserstoff übergeht. Der Nachweis der beiden Modifikationen bestätigt die auf Grund der Quantenmechanik von Heisenberg, Hund und insbesondere von Dennison gemachten diesbezüglichen Voraussagen.

Experimente über Para- und Orthowasserstoff.

Von Dr. K. F. Bonhoeffer und Dr. P. Harteck.

(Mitteilung aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem. Vorgelegt von Hrn. Haber.)

Einleitung.

Die Entwicklung der neuen Quantentheorie hat zu der Behauptung geführt, daß der gewöhnliche molekulare Wasserstoff ein Gemisch von zwei Komponenten ist. Diese sollen bei Zimmertemperatur im Verhältnis 3 : 1 vorhanden sein und sich, wenn überhaupt, dann nur langsam ineinander umwandeln. Die Theorie läßt Unterschiede der beiden Komponenten hinsichtlich ihres optischen Verhaltens und bei tieferen Temperaturen hinsichtlich ihrer thermischen Eigenschaften erwarten. Die gedankliche Entwicklung ist die folgende gewesen.

Heisenberg[1] hat durch seine Heliumtheorie ein Verständnis für die Existenzfähigkeit von Para- (Singulett) und Orthohelium (Triplett) auf Grund der neuen Quantenmechanik geschaffen. Analoge Überlegungen führten ihn und Hund[2] beim Wasserstoffmolekül dazu, zwei Arten zu unterscheiden. Wie Para- und Orthohelium in der Modellvorstellung dadurch verschieden sind, daß im einen Fall die Elektronenmagnete antiparallel, im anderen Falle parallel gerichtet sind, so sollen beim Wasserstoffmolekül die Kernmagnete das eine Mal antiparallel, das andere Mal parallel orientiert sein. Der Antiparallelstellung (Parhelium) entspricht ein Singulettzustand, der Parallelstellung (Orthohelium) ein Triplettzustand. Wir wollen der Kürze halber die dem Parhelium entsprechende Form mit Parawasserstoff, die dem Orthohelium entsprechende als Orthowasserstoff bezeichnen[3]. Der Parawasserstoff hat das statistische Gewicht 1, der Orthowasserstoff das statistische Gewicht 3. Gemäß dem Pauli-Prinzip rotieren die Moleküle des Parawasserstoffs nur mit geraden Rotationsquantenzahlen, die des Orthowasserstoffs nur mit ungeraden. Dennison[4] hat gezeigt, daß sich auf dem Boden dieser Anschauung der von Eucken und anderen experimentell bestimmte Rotationsabfall der spezifischen

[1] W. Heisenberg, Z. f. Phys. **38,** 411, (1926); **41,** 239 (1927).
[2] F. Hund, Z. f. Phys. **42,** 93 (1927).
[3] Die Paramodifikation entspricht den Molekülen mit symmetrischer Rotationsfunktion und antisymmetrischer Kernspinnfunktion, die Orthomodifikation mit antisymmetrischer Rotationsfunktion und symmetrischer Kernspinnfunktion.
[4] Dennison, Proc. Roy. Soc. **115,** 483 (1928).

Wärme des Wasserstoffs quantitativ berechnen läßt. Von 200° absolut aufwärts ist das Verhältnis Para- zu Orthowasserstoff praktisch 1 : 3, entsprechend den statistischen Gewichten, unterhalb dieser Temperatur verschiebt sich das Gleichgewicht zugunsten des Parawasserstoffs, der bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs im Gleichgewicht praktisch allein vorhanden ist. Nach Dennison lehrt die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme, daß die Einstellungsgeschwindigkeit des Gleichgewichts klein gegen die Versuchsdauer (einige Stunden) ist.

Die Dennisonsche Theorie behauptet, daß der bisher bei tiefen Temperaturen untersuchte Wasserstoff ein nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindliches System sei. Sie gibt dadurch den Ansporn, die Einstellungsgeschwindigkeit zu verfolgen, sie tunlichst durch passende Hilfsmittel zu erhöhen und dadurch den Parawasserstoff anzureichern. Die hier mitgeteilten Versuche beschäftigen sich mit dieser Aufgabe[1].

Versuchsmethode.

Der nächstliegende Weg ist der, nach zeitlichen Änderungen in der spez. Wärme des Wasserstoffs bei tiefen Temperaturen kalorimetrisch zu suchen. Wir haben diesen Weg nicht beschritten, da uns weder die Handlichkeit noch die Empfindlichkeit der Methode für die Entdeckung und Verfolgung kleiner Änderungen ausreichend erschien. Wir haben vielmehr die der spez. Wärme genügend proportionale Wärmeleitfähigkeit des Wasserstoffs bei tiefen Temperaturen verfolgt und damit befriedigende Resultate erzielt. Bei der Wahl dieser Methode schien es unvermeidlich, auf eine absolute Feststellung des genauen Umfangs einer eintretenden Umwandlung zu verzichten und uns mit relativen Werten zu begnügen, da die Wärmeleitfähigkeit der Einzelmodifikationen (Orthowasserstoff bzw. Parawasserstoff) weder bekannt noch genau berechenbar war. Da es uns im Laufe der Versuche gelungen ist, zum praktisch reinen Parawasserstoff zu gelangen und ihn als Eichsubstanz zu verwenden, so ist diese Beschränkung unseres Verfahrens in Wegfall gekommen.

Unsere Versuche sind nicht alle mit derselben Präzision durchgeführt. Die Methode, die sich schließlich als die genaueste herausstellte, arbeitete wie folgt: Der zu messende Wasserstoff wurde in ein Meßgefäß gefüllt, das mit flüssigem Wasserstoff gekühlt war. Das Meßgefäß enthielt einen Wollaston-Draht, der durch eine bekannte angelegte Spannung auf etwa 200° abs. erhitzt wurde. Seine Temperatur wurde durch Widerstandsmessung bestimmt. Es erwies sich als günstig, bei 40 mm Wasserstoffdruck zu arbeiten. Dieser Druck ist so niedrig, daß Konvektion nicht stört und doch so hoch, daß keine große Druckabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit besteht. Das Kühlbad aus flüssigem Wasserstoff war ausgezeichnet temperaturkonstant. Auf die

---

[1] Den gleichen Gegenstand verfolgen nach mündlicher Mitteilung die Herren Professor Eucken (Breslau) und Professor Simon (Berlin).

(Anm. zur Korr. Während des Druckes erfahren wir, daß auch Hr. Prof. Eucken positive Ergebnisse gewonnen hat, die er gleichzeitig in den »Naturwissenschaften« am 15. März 1929 mitteilt.)

Reinheit des untersuchten Wasserstoffs, die sonst bei derartigen Messungen ausschlaggebend ist, brauchte keine Rücksicht genommen zu werden, weil Verunreinigungen vollständig ausfroren. Drei ungereinigte Wasserstoffproben verschiedener Herkunft wichen in bezug auf die Wärmeleitfähigkeit nicht mehr als 0.03% vom Mittel ab. Absichtlich zugesetzte Verunreinigungen änderten an diesem Resultat nichts. Bei unseren Hauptversuchen war eine Verschiebung des Mischungsverhältnisses von 0.3333 (Parawasserstoff: Orthowasserstoff) auf 0.3325 durch einen Versuch innerhalb weniger Minuten sicher festzustellen. Bei den Vorversuchen war die Genauigkeit etwa viermal kleiner. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß Wasserstoff das am besten leitende Gas ist und daß der gesuchte Effekt seine Leitfähigkeit im fraglichen Temperaturgebiet noch erhöht. Störungen durch Verunreinigungen würden im entgegengesetzten Sinne liegen.

Ergebnisse.

A. Umwandlungsversuche bei geringem Druck.

Die mit Wasserstoff unter 200 mm bei gewöhnlicher Temperatur gefüllten Meßgefäße aus Glas waren direkt in flüssige Luft getaucht. Die Wärmeleitfähigkeit des Wasserstoffs wurde mit der Genauigkeit der Vorversuche mehr als drei Wochen lang messend verfolgt und dabei keine Änderung innerhalb der Fehlergrenzen beobachtet. Die mitgeteilten Kurven (Fig. 1)

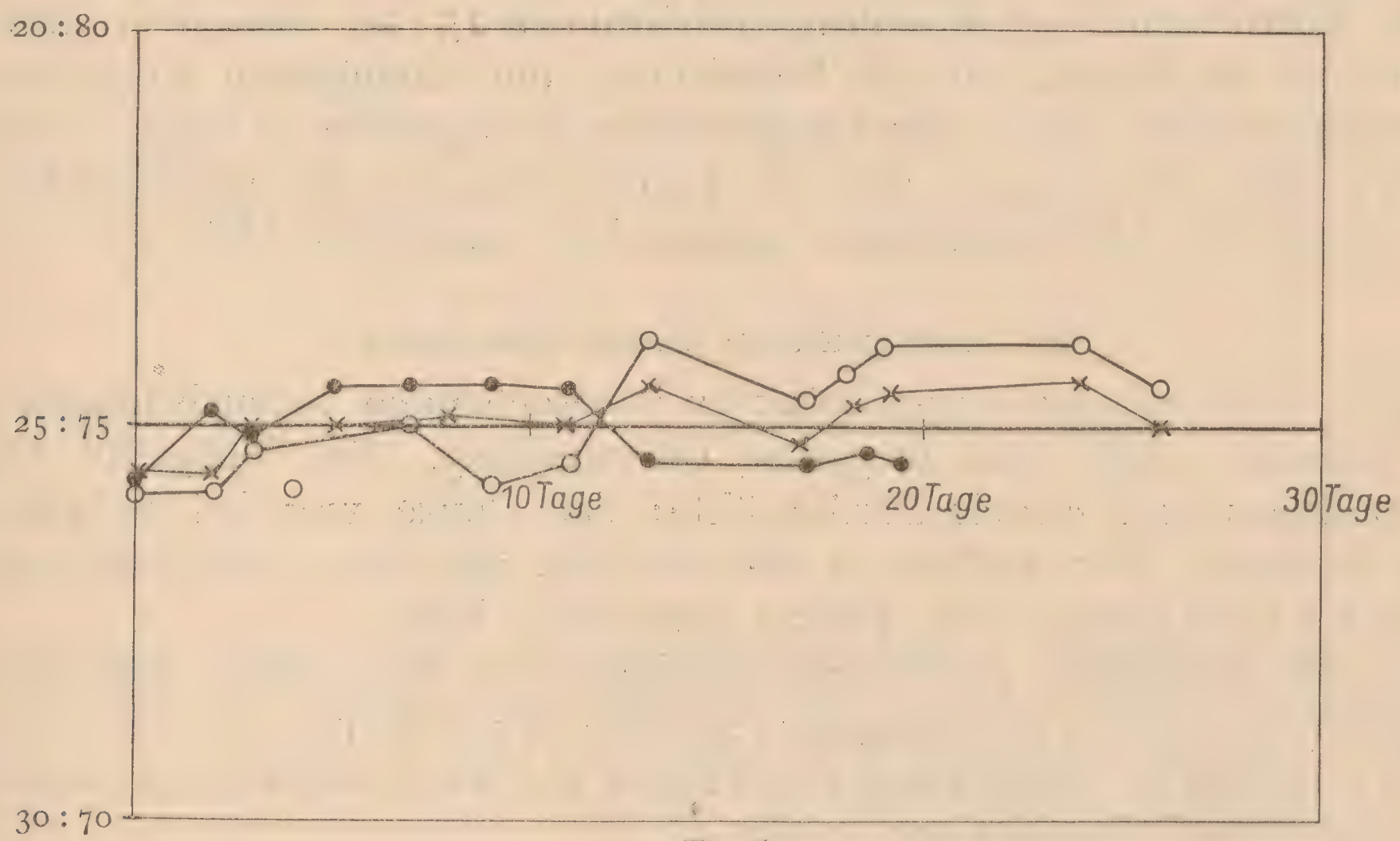


Fig. 1.

stellen die an den verschiedenen Tagen ermittelten Mischungsverhältnisse (Parawasserstoff/Orthowasserstoff) nach drei Versuchsreihen[1] zusammen. Aus diesen Versuchen schließen wir, daß die Gasreaktion, sofern sie monomolekular (durch Strahlung) verläuft, mit einer Halbwertszeit von über einem Jahr erfolgt.

[1] Ein Versuch wird hier unterdrückt und kommt weiter unten zur Besprechung.

B. Umwandlungsversuche bei hohen Drucken.

Der mit Wasserstoff unter 350 Atm. bei gewöhnlicher Temperatur gefüllte Messingzylinder wurde mehrere Tage in flüssiger Luft gehalten. Von Zeit zu Zeit wurden Proben entnommen und in einem Bade von flüssigem Wasserstoff mit der Genauigkeit der Hauptversuche auf ihre Wärmeleitfähigkeit untersucht. Hierbei fanden wir zum ersten Male einen Effekt. Nach 6 Tagen hatte sich das Mischungsverhältnis von 25 : 75 auf 45 : 55 verschoben. Ein zweiter Versuch unter annähernd ähnlichen Bedingungen gab einen ähnlichen Wert der Umwandlungsgeschwindigkeit.

C. Umwandlungsversuche in flüssiger und fester Phase.

Da bei hohem Druck im Gas ein Effekt gefunden wurde, untersuchten wir flüssigen Wasserstoff. Weder eine vorübergehende Verflüssigung noch eine vorübergehende Verfestigung ergab eine Änderung der Wärmeleitfähigkeit des Gases in einem Bade von flüssigem Wasserstoff. Dagegen zeigte etwa 5 Stunden alter flüssiger Wasserstoff eine Veränderung des Mischungsverhältnisses von 25 : 75 auf 29 : 71, etwa 30 Stunden alter Wasserstoff auf 40 : 60[1].

Die Umwandlungswärme des Ortho- in Parawasserstoff beim absoluten Nullpunkt ist 329 cal. Sie ist größer als die Verdampfungswärme, welche beim Siedepunkt 229 cal beträgt. In einem thermisch gut isolierten Gefäß darf die zusätzliche Verdampfung durch die Umwandlungswärme daher nicht vernachlässigt werden.

Der Fortbestand des Mischungsverhältnisses 25 : 75 nach dem Erstarren gibt Fowler ein Recht, bei der Berechnung der chemischen Konstante des Wasserstoffmoleküls dieses Mischungsverhältnis zugrunde zu legen. Einflüsse des Umwandlungsvorganges auf die Bestimmung des Schmelzpunktes und des Siedepunktes des Wasserstoffs mögen hier unerörtert bleiben[2].

D. Umwandlung durch Katalyse.

Unter A wurde auf einen später zu besprechenden Versuch hingewiesen. Dieser Versuch zeigte eine langsame Umwandlung. Das Meßgefäß bestand hier aus Quarz und erhielt Platindrähte; das Ganze war bei Rotglut ausgeglüht worden. Wir hielten es für möglich, daß die Vorbehandlung eine katalytische Wirksamkeit des Platins geschaffen hatte.

Bei den Messungen der Wärmeleitfähigkeit in einem Bade von flüssigem Wasserstoff trat häufig eine langsame zeitliche Veränderung ein, die ebenfalls auf eine katalytische Einwirkung des Platins auf die Umwandlung von Ortho- in Parawasserstoff hinzuweisen schien.

Die Vermutung der Katalysierbarkeit bewahrheitete sich. Läßt man Adsorptionskohle bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs sich mit Wasserstoff bei Atmosphärendruck sättigen, so stellt sich dieser in das thermo-

---

[1] Der von Mc Lennan und Mc Leod, Nature 123, 152 (1929), kürzlich beobachtete Raman-Effekt des Orthowasserstoffs sollte dementsprechend mit der Zeit verschwinden.

[2] Vgl. Giauque, J. Amer. Chem. Soc. **50**, 3221 (1928). Hr. Prof. Simon teilt uns freundlichst mit, daß er früher in der Nähe des Schmelzpunktes des Wasserstoffs thermische Anomalien gefunden habe, die vielleicht durch solche Umwandlung zu erklären seien.

dynamische Gleichgewicht, welches bei 99.7 Prozent Parawasserstoff gelegen ist. Die Einstellung erfolgt so rasch (wenige Stunden), daß an der Erreichung des Gleichgewichts kein Zweifel ist. Dieser praktisch reine Parawasserstoff übertrifft das übliche Gemenge beider Formen (1 : 3) unter den Versuchsbedingungen um $^1/_5$ in der Wärmeleitfähigkeit. Die quantitative Erörterung erfolgt an anderer Stelle. Der abgepumpte Wasserstoff ist praktisch reiner Parawasserstoff.

Graphische Darstellung einiger Meßergebnisse.

Die folgende Darstellung (Fig. 2) gibt einige Messungen graphisch wieder. Die obersten 5 Punkte lassen erkennen, mit welcher Genauigkeit die benutzte Methode das Verhältnis 1 : 3 bei Gegenwart zufälliger Verunreinigungen im

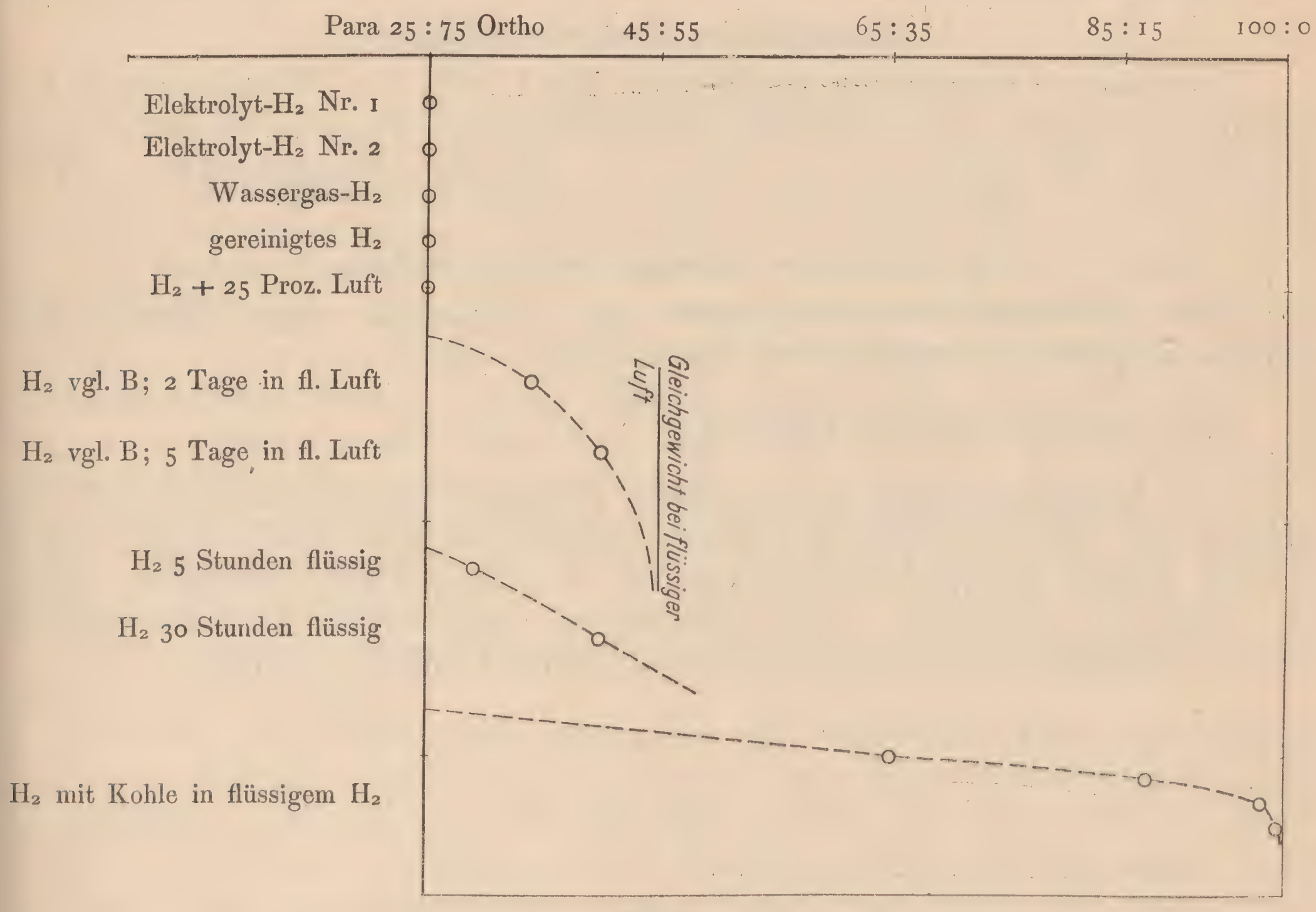


Fig. 2.

Ausgangsgas ergibt. Die nächsten beiden Punkte erläutern einen Wartevorsuch bei hohem Druck. Die Ordinate gibt (nach abwärts) Wartetage, die Abszisse die dazugehörigen beobachteten Mischungsverhältnisse. Es folgen analoge Darstellungen zuerst für die an altem flüssigen Wasserstoff ausgeführten Versuche (2 Punkte), sodann für die Wirksamkeit der Adsorptionskohle (4 Punkte).

E. Rückverwandlungsversuche bei niederem Druck.

Bei Atmosphärendruck und Zimmertemperatur ist Parawasserstoff ein Gas, das sich in einem Glaskolben im Laufe mehrerer Tage nicht merklich zurückverwandelt. Wir konnten keine sichere Veränderung im Laufe dieser Zeit feststellen. (Die Messungen erfolgen in einem Bade von flüssigem Wasserstoff.)

F. Rückverwandlungsversuche bei hohem Druck.

Bei etwa 100 Atm. verschiebt sich im Messingzylinder bei Zimmertemperatur in 5 Stunden das Mischungsverhältnis Para- zu Orthowasserstoff von 45 : 55 auf 35 : 65. (Messungen wie zuvor in einem Bade von flüssigem Wasserstoff.)

Vergleich mit dem unter B mitgeteilten Versuchen zeigt, daß der Temperaturkoeffizient im Verhältnis zu gewöhnlich chemischen Reaktionen klein ist. (Die $3^1/_2$fache absolute Temperatur liefert nur etwa zehnfache Geschwindigkeit.) Die Verschiebungen des Mischungsverhältnisses in Messingzylinder bei Hochdruck sind schwerlich als reine katalytische Wandreaktionen anzusehen.

G. Katalytische Rückverwandlung.

Mit frisch hergestellten Platinasbest kann man den Parawasserstoff bei Zimmertemperatur in kurzer Zeit in gewöhnlichen Wasserstoff überführen. (Messungen wie zuvor in einem Bade von flüssigem Wasserstoff.)

H. Rückverwandlung durch Entladung.

Eine schwache elektrische Entladung verwandelt in einigen Minuten den Parawasserstoff in gewöhnlichen Wasserstoff.

Die Versuche werden fortgesetzt.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft sind wir für die Überlassung einer hochempfindlichen Wheatestoneschen Brückenanordnung sowie für die Abgabe von flüssigem Wasserstoff zu großem Dank verpflichtet. Hrn. Dr. Meissner sowie Hrn. Giloi möchten wir noch für ihr Entgegenkommen bei der Herstellung des flüssigen Wasserstoffs besonders danken.

Plan einer Fernsprechkabelverbindung zwischen Europa und Amerika.

VON KARL WILLY WAGNER.

(Vorgetragen am 23. Februar 1928 [s. Jahrg. 1928 S. 75].)

1. Vorbemerkungen.

Während das erste Telegraphenkabel durch den Ozean bereits vor etwa 70 Jahren verlegt wurde, ist die Tiefsee bisher als ein unüberwindliches Hindernis für ein Fernsprechkabel angesehen worden. In der Tat sind die ersten Fernsprechverbindungen über den Ozean hinweg auf dem Funkwege hergestellt worden. Dessen ungeachtet kann jedoch das Problem des transozeanischen Fernsprechkabels keineswegs als überholt gelten; denn die Funkverbindung ist viel anfälliger gegen Störungen und daher weniger betriebssicher als eine Kabelverbindung; außerdem kann sie von jedermann belauscht werden; der am schwersten wiegende Grund ist aber der Umstand, daß ein gemeinsames Übertragungsmittel, der Äther, von allen Funkverbindungen zugleich benutzt wird, und daß daher in dem praktisch verfügbaren Frequenzbereich nur eine begrenzte Anzahl solcher Verbindungen gleichzeitig störungsfrei hergestellt werden kann.

Daß es überhaupt möglich geworden ist, regelmäßige Funkverbindungen auf große Entfernungen herzustellen, verdanken wir der Einführung der Elektronenröhren. Sie hat auch die Technik des Fernsprechweitverkehrs grundlegend umgestaltet. Seitdem wir die Elektronenrohrverstärker haben, kann zu Lande jede praktisch vorkommende Entfernung durch den Fernsprecher überbrückt werden, während bis zum Ausbruch des Weltkrieges eine Entfernung von etwa 1000 km die Grenze für eine technisch und wirtschaftlich befriedigende Fernsprechverbindung war.

Die Umwälzungen, die das gesamte elektrische Nachrichtenwesen durch die Elektronenröhren und andere bedeutsame Fortschritte erfahren hat, bieten hinreichend Anlaß, auch das Problem des transozeanischen Fernsprechkabels erneut zu prüfen. Es wurde bisher aus folgenden Gründen für unlösbar gehalten. Ein Kabel mit Guttaperchaisolierung, der einzige Kabeltyp, der nach den vorliegenden Erfahrungen für die Verlegung durch die Tiefsee in Betracht zu ziehen war, hat eine mit der Frequenz stark anwachsende Dämpfung, die für das Frequenzgebiet der Fernsprechströme und für Kabellängen über 1000 km unzulässig hohe Werte erreicht. Man könnte daran denken, die Dämpfung durch künstliche Vergrößerung der Induktivität, etwa durch

Einschalten von Spulen, zu vermindern. Diese Maßnahme ist jedoch nur beschränkt wirksam, weil die Ableitung der Guttapercha infolge der dielektrischen Verluste ziemlich hoch ist; auch die durch Isolierung der Ader mit Balata oder mit Mischungen von Guttapercha und Balata zu erzielende verringerte Ableitung reicht noch nicht hin. Die Ursache ist, wie man sich an Hand der bekannten Formeln für die Dämpfung leicht überzeugt, die Höhe der Kapazität der Guttaperchaader.

In Fernsprechkabeln über Land sind bekanntlich die Leiter lose mit gut getrocknetem Papier bewickelt, weil diese Art der Isolierung sich durch niedrige Kapazität und kleine Ableitung auszeichnet; zum Schutz gegen Feuchtigkeit und andere schädliche Einflüsse sind diese Kabel mit einem Bleimantel versehen. Man hat diese Bauweise wegen ihrer hervorragend günstigen elektrischen Eigenschaften auch als Flußkabel und Seekabel zunächst für geringe Wassertiefen verwendet. In größeren Tiefen muß Vorsorge getroffen werden, daß das Kabel nicht durch den Wasserdruck platt gedrückt wird. Zum ersten Male ist diese Aufgabe von der Siemens & Halske A. G. in einem 1906 durch den Bodensee in Tiefen von 250 m verlegten Fernsprechkabel gelöst worden. Die Druckfestigkeit wurde durch eine Stahldrahtspirale erreicht, mit der die Kabelseele unterhalb des Bleimantels bewickelt ist[1]. Diese Bauart ist seitdem bei zahlreichen in der Flachsee verlegten Fernsprechkabeln angewandt worden und hat sich dort sehr bewährt. Den großen Drucken, mit denen man in der Tiefsee zu rechnen hat, kann eine solche Konstruktion aber nicht widerstehen; wie Versuche gelehrt haben, wird das Blei zwischen die Windungen gepreßt; schließlich wird die Spirale seitlich zusammengedrückt.

2. Mechanischer Aufbau.

Als nach dem Weltkrieg die Vorarbeiten für die Wiederherstellung des Telegraphenkabels zwischen Deutschland und Amerika ausgeführt wurden, habe ich mich eingehend mit der Frage befaßt, ob ein Pupinkabel ausführbar und zweckmäßig sei. Die Ausführbarkeit hängt davon ab, daß es gelingt

1. Spulen herzustellen, die dem Wasserdruck am Boden der Tiefsee (bis 500 Atmosphären) widerstehen;
2. ein mit solchen Spulen ausgerüstetes Kabel zu verlegen.

Hr. Generaldirektor Dr. Zapf hat die hiermit zusammenhängenden Probleme bei der Felten & Guilleaume Carlswerk A. G. zu Köln-Mühlheim und bei den Norddeutschen Seekabelwerken zu Nordenham eingehend untersuchen lassen, mit dem Erfolg, daß dort sowohl Konstruktionen für Tiefseespulen entwickelt als auch Verfahren ausgearbeitet wurden, Spulenkabel unter den bei den großen Wassertiefen entstehenden hohen Zugkräften zu verlegen.

Gelegentlich dieser Arbeiten wurde auch die Frage gestellt, ob es möglich sei, ein zur Verlegung in der Tiefsee geeignetes Kabel mit loser Papierisolation nach Art der Landfernsprechkabel zu bauen. Die Bedeutung dieser Frage liegt

[1] ETZ 1907, S. 662, Abb. 3.

auf der Hand: durch einen solchen Kabeltyp war in Verbindung mit den vorher erwähnten Vorarbeiten für ein pupinisiertes Telegraphenkabel auch das transozeanische Fernsprechkabel in den Bereich des technisch Möglichen gerückt, zum mindesten hinsichtlich der mechanischen Ausführbarkeit. Die Lösung verdanken wir Dr. ZAPF. Er faßte den kühnen Gedanken, zur Aufnahme der Fernsprechadern ein biegsames Hohlseil zu bauen, das dem gewaltigen Wasserdruck am Boden der Tiefsee standhält. Es besteht aus Leichtmetall und es ist von einem Bleimantel überzogen, der das Hohlseil vor dem Angriff durch das Seewasser schützt und es vollkommen wasserdicht macht. Abb. 1 zeigt den Querschnitt. Das Hohlseil besteht aus keilförmigen Formdrähten; in seitlichen Aussparungen liegen Runddrähte; die hierdurch bewirkte Ver-

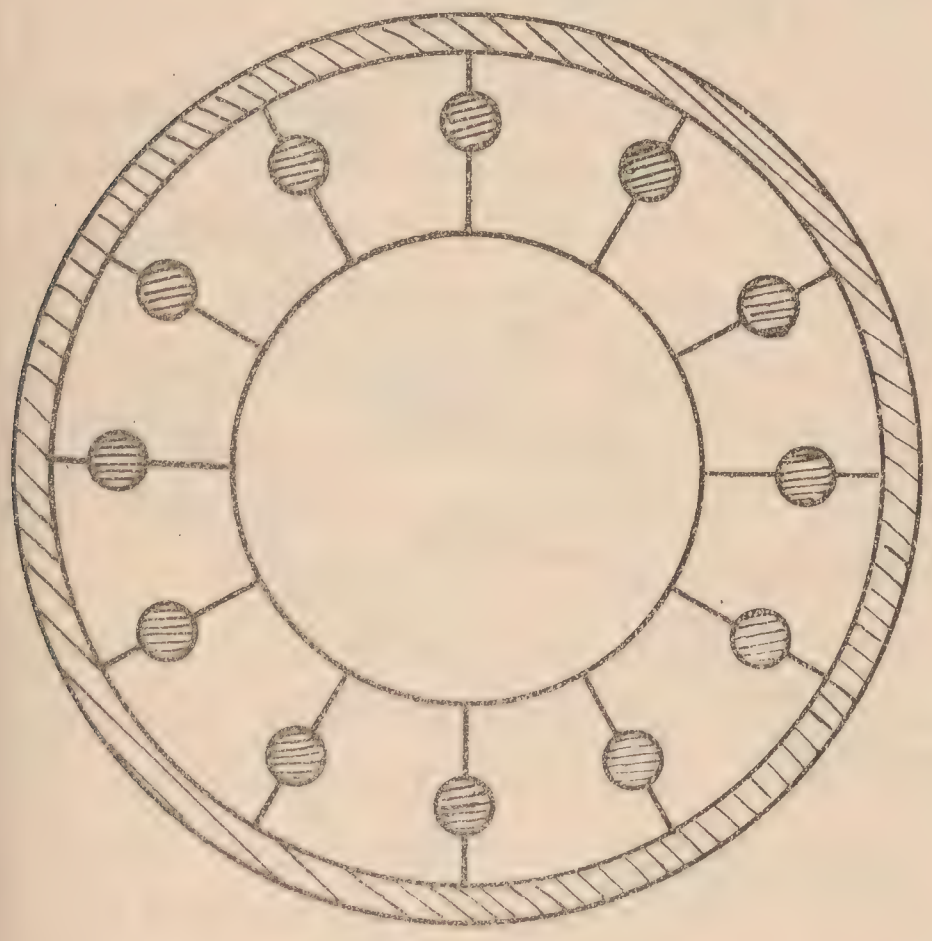


Abb. 1. Querschnitt eines druckfesten und wasserdichten Hohlseils nach Dr. ZAPF.

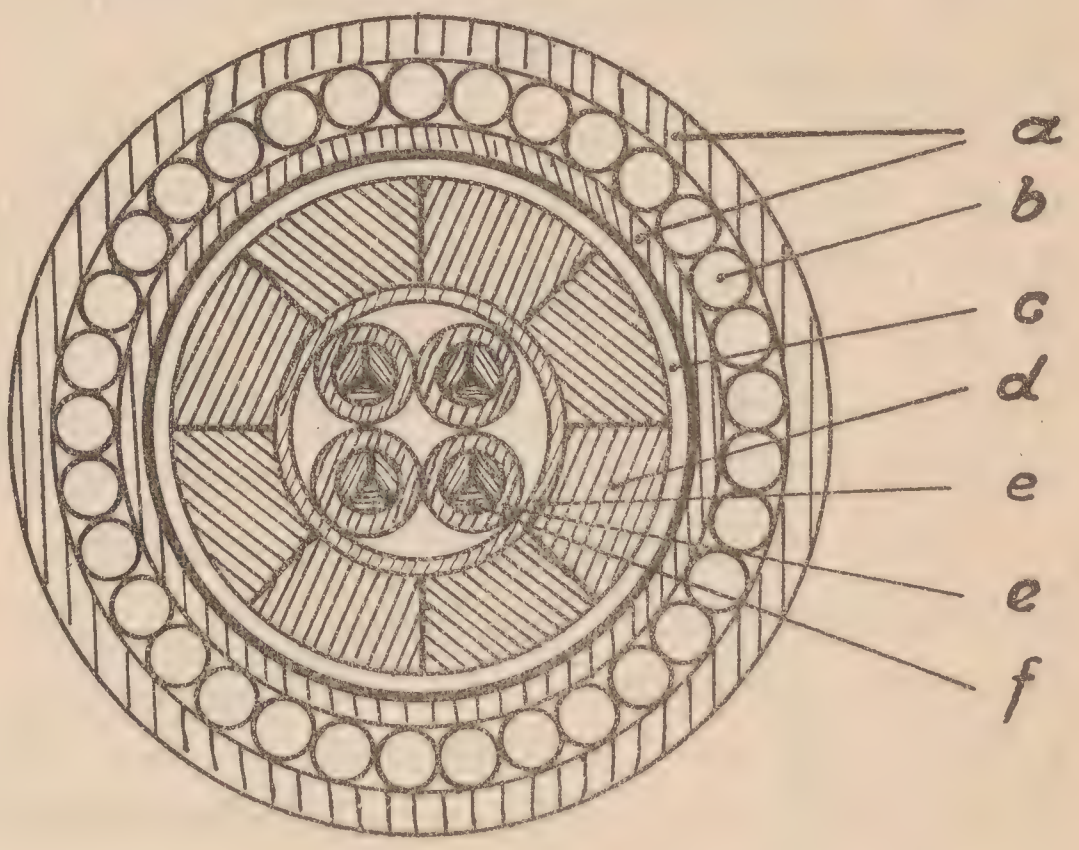


Abb. 2. Querschnitt eines Tiefsee-Fernsprechkabels. a Jutepolster. b Bewehrungsdrähte. c Bleimantel. d Hohlseil. e Papierisolierung. f Kupferleiter.

zahnung gibt dem Hohlseilgewölbe festen Halt. Die in der Fabrik ausgeführten Druckversuche haben gezeigt, daß solche Hohlseile einem Wasserdruck von 600 Atmosphären (entsprechend einer Wassertiefe von 6000 m) widerstehen, und daß man sogar auf die Verzahnung verzichten kann, wenn die lichte Weite des Rohres 60 Prozent des Außendurchmessers nicht übersteigt. Das Rohr nimmt in seinem Hohlraum die papierisolierten Kabeladern auf; außen erhält es ein Jutepolster und darüber die übliche Armierung aus Stahldrähten. Abb. 2 zeigt den Querschnitt eines solchen Kabels.

Die Pupinspulen werden in einem starren druckfesten Gehäuse untergebracht. Der Hohlraum der angeschlossenen Kabelstücke steht mit dem Hohlraum des Gehäuses nicht in Verbindung; diese Hohlräume sind vielmehr druckfest gegeneinander abgeschlossen, so daß bei einem Fehler in einem Kabelfeld oder in einer Muffe nur das betroffene Stück schadhaft wird. Bei einer Instandsetzung muß immer eine ganze Zahl von Spulenfeldern ausgewechselt werden.

Die Spulenmuffen werden so kurz gehalten, daß sie ohne besondere Maßnahmen über die Auslegescheiben des Verlegungsschiffes hinweglaufen. Bei

dem zunächst in Betracht zu ziehenden Kabeltyp mit nur einem Vierer ist das ohne weiteres möglich; bei einem Typ mit mehreren Vierern wird man die Spulen auf mehrere Muffen verteilen.

3. Bemessung und elektrische Eigenschaften.

Durch die vorstehend geschilderten Entwicklungsarbeiten sind nunmehr die Voraussetzungen für eine ernsthafte Prüfung der technischen Ausführbarkeit und der Wirtschaftlichkeit transozeanischer Fernsprechkabelverbindungen gegeben. Vom wirtschaftlichen Standpunkt erscheint natürlich die Fernsprechverbindung zwischen Europa und Nordamerika, in zweiter Linie die Verbindung zwischen Europa und Südamerika besonders reizvoll.

Da die Dämpfung jeder Teilstrecke eines Kabels mit Rücksicht auf den Störungsspiegel ein gewisses Maß nicht überschreiten soll, ist der Kabelweg der günstigste, auf dem die längste Teilstrecke noch am kürzesten ist. Für die Verbindung Europa-Nordamerika wäre hiernach der Weg über das nördliche Polargebiet, England–Island–Grönland–Labrador der günstigste. Diese Kabelroute muß aber praktisch ausscheiden, weil eine Kabelinstandsetzung in dem arktischen Gebiet nur während weniger Sommerwochen ausführbar wäre; eine am Ende des Sommers auftretende Kabelstörung würde den Betrieb auf zehn Monate oder noch länger lahmlegen.

Der nächstgünstige Weg führt von Lissabon über die westlichste Azoreninsel Flores nach St. Johns auf Neufundland; von da zweckmäßig über ein kürzeres Seekabel nach Canso auf Neuschottland, wo der Anschluß an die Landlinien des nordamerikanischen Festlandes erreicht wird. Die beiden Hauptkabelstrecken Lissabon–Flores und Flores–St. Johns sind je 2000 km lang.

Für die Verbindung von Europa nach Südamerika bietet sich folgender Weg: Cadiz–Teneriffa (Kanarische Inseln)–São Thiago (Kapverdische Inseln)–Fernando Noronha–Pernambuco. Die längste Teilstrecke auf diesem Wege, São Thiago–Fernando Noronha, mißt rd. 2400 km (siehe Abb. 3).

Maßgebend für die Bauart des Kabels ist die höchste Dämpfung, die man zulassen will. Bei den neuzeitlichen Telegraphenkabeln für hohe Arbeitsgeschwindigkeit hat sich ergeben, daß man einen zuverlässigen Betrieb noch bei einer Geschwindigkeit erzielt, für welche die Dämpfung den Wert $b = 10$ Neper erreicht. Hierbei ist zu bedenken, daß in den Telegraphenkabeln die Betriebsader durch die Armierung nur sehr unvollkommen gegen von außen kommende elektromagnetische Störungen geschützt ist. Der Störspiegel in diesem Stromkreis, der noch dazu einadrig geführt ist, liegt sehr viel höher als in einem zweiadrigen Fernsprechstromkreis, der in dem metallisch ringsum geschlossenen Druckschutzgehäuse eine vorzügliche metallische Abschirmung gegen alle äußeren elektromagnetischen Störungen besitzt. Die praktische Erfahrung über das Nebensprechen zwischen gut metallisch geschirmten Fernsprechkreisen hat gelehrt, daß die Nebensprechdämpfung leicht bis auf Werte von 13 und 14 Neper und noch höher getrieben werden kann. Man rechnet daher mit großer Sicherheit, wenn man als praktisch zulässige Dämpfung in einem Tiefseefernsprechkabel den

Abb. 3. Kabelwege der Fernsprechverbindungen von Europa nach Nord- und Südamerika.

Wert $b = 10$ Neper einsetzt. Auch der Wert $b = 12$ Neper würde aller Voraussicht nach noch genügen.

Bekanntlich wächst die Dämpfung eines induktiv belasteten Kabels mit steigender Frequenz. Der zugelassene Höchstwert 10 Neper soll für die höchste noch zu übertragende Frequenz gelten. Wenn wir diese zu 2400

Hertz festsetzen, so dürfen wir nach den Erfahrungen der praktischen Telephonie eine völlig ausreichende Sprachverständlichkeit erwarten.

Die geforderte Dämpfung läßt sich bei der gegebenen Teilstreckenlänge nur mit einem induktiv belasteten Kabel erzielen. Zur Erhöhung der Induktivität bieten sich bekanntlich zwei Wege: entweder die Umhüllung des Leiters mit einer ferromagnetischen Schicht nach Krarup oder die Einschaltung von Induktionsspulen in regelmäßigen Abständen nach Pupin. Eine besondere Untersuchung, auf deren Wiedergabe hier verzichtet wird, lehrt, daß man mit den heute bekannten ferromagnetischen Stoffen zu weniger günstigen Kabelabmessungen nach dem Kraruptyp gelangt, als wenn man Pupinspulen einschaltet. Daher soll dieser Fall der weiteren Betrachtung zugrunde gelegt werden.

Maßgebend für die Bemessung eines mit Pupinspulen belasteten Kabels sind bei gegebener Dämpfung die folgenden Größen:

a) die Grenzfrequenz,
b) die Kapazität und die Ableitung,
c) die Zeitkonstante der Spulen.

Ihr Einfluß drückt sich in den folgenden Formeln aus.
Es sei

f die Betriebsfrequenz, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz;
$f_\circ$ die Grenzfrequenz, $\omega_\circ = 2\pi f_\circ$, und

$$\eta = \frac{f}{f_\circ} = \frac{\omega}{\omega_\circ}.$$

Ferner seien die auf 1 km Kabellänge bezogenen Leitungskonstanten:

R der Ohmsche Widerstand,
L die Induktivität,
C die Kapazität,
G die Ableitung.

Weiter seien bezeichnet mit

s der Spulenabstand,
L_s die Induktivität einer Spule,
R_s der Wirkwiderstand einer Spule.

Daraus ergeben sich

$L_z = L_s/s$, die von den Spulen oder von einer Kraruphülle herrührende, auf 1 km Kabellänge bezogene Zusatzinduktivität,
$R_z = R_s/s$, der entsprechende Zusatzwiderstand.

$$\tau = \frac{L_s}{R_s} = \frac{L_z}{R_z}$$

ist die Zeitkonstante der Spulen bzw. der Kraruphülle.

Die Dämpfungskonstante β des Kabels, d. i. das Dämpfungsmaß je Kilometer, hängt unter sonst gleichen Umständen von der induktiven Belastung

des Kabels ab und hat bekanntlich für eine bestimmte Belastung ein Minimum. Bei einem Kabel mit stetig verteilter Belastung betrüge dieses Minimum

$$\mathfrak{B}_{\min} = \sqrt{\left(R - \frac{L}{\tau}\right)\left(G + \frac{C}{\tau}\right)}.$$

Ist aber, wie bei einem Spulenkabel, die Induktivität punktförmig verteilt, so gilt

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}'}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \qquad (1)$$

Das Minimum von $\mathfrak{B}'$ ist jetzt aus der Formel zu bestimmen

$$\mathfrak{B}'_{\min} = \sqrt{\left(R' - \frac{L}{\tau}\right)\left(G + \frac{C}{\tau}\right)} \qquad (2)$$

mit

$$R' = R\left(1 - \frac{2}{3}\eta^2\right). \qquad (3)$$

Die durch (2) gegebene Mindestdämpfung tritt für eine Belastung ein, die dem Kabel mit stetig verteilter Induktivität einen Wellenwiderstand vom Betrage

$$Z'_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{R - \frac{L}{\tau}}{G + \frac{C}{\tau}}} = \sqrt{\frac{L + L_z}{C}} \qquad (4)$$

erteilen würde. Der Wellenwiderstand des wirklichen Spulenkabels berechnet sich nach bekannten Regeln aus Z'_{opt} durch Multiplikation mit einem Faktor, der von dem Anlauf des Kabels abhängt und im allgemeinen komplex ist. Außerdem muß in (4) für R der Wert R' gemäß Gl. (3) eingesetzt werden.

Um nun nach diesen Formeln die Abmessungen des Kabels zu bestimmen, bedarf es der Festsetzung der vorher unter a bis c genannten Größen. Für diese Festsetzungen besteht zwar eine gewisse Bewegungsfreiheit, allerdings nur in verhältnismäßig engen Grenzen, und insoweit kommt man je nach Wahl der Größen unter a bis c zu verschiedenen Kabeltypen. Die im folgenden getroffene Wahl der genannten Größen entspricht dem, was die Technik heute im guten Durchschnitt leisten kann. Doch kommt den hier angegebenen Zahlenwerten nur der Charakter eines Beispiels zu. Bei der wirklichen Ausführung eines Kabels werden sich je nach den besonderen Bedingungen des vorliegenden Falles die Zahlenwerte und damit die Abmessungen des Kabels nach der einen oder anderen Richtung verschieben können.

a. Was nun zunächst die Grenzfrequenz f_0 angeht, so muß diese selbstverständlich oberhalb der höchsten noch zu übertragenden Frequenz, hier also oberhalb 2400 Hertz, liegen. Das Kabel wird um so leichter und billiger, je niedriger f_0 gewählt wird; eine untere Grenze wird durch die Dämpfungsverzerrung gemäß Gl. (1) bis (3) und durch die praktische Dauer T des Einschwingvorgangs bei der höchsten zu übertragenden Frequenz gesetzt.

Es ist

$$T = \frac{l}{\pi s f_\circ}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} - 1\right], \tag{5}$$

wo l die Kabellänge bedeutet. Zwischen dem Spulenabstand s und der Grenzfrequenz $f_\circ$ besteht die Beziehung

$$f_\circ = \frac{1}{\pi s \sqrt{L_z C}}. \tag{6}$$

Die Dämpfungsverzerrung kann durch einen Dämpfungsausgleich in den Verstärkern[1] aufgehoben werden. Der Verzerrung durch den Einschwingvorgang kann man entweder dadurch begegnen, daß man T genügend klein wählt, oder durch den sogenannten Phasenausgleich[2]. Was den ersten Punkt angeht, so hat die Erfahrung gelehrt, daß die Einschwingvorgänge bei 5 Millisekunden Dauer kaum merkbar und bei 10 ms Dauer noch erträglich sind, jedenfalls die Sprachverständlichkeit noch nicht meßbar beeinträchtigen.

Auf Grund dieser Überlegungen ergibt sich aus den vorstehenden Formeln, daß die Grenzfrequenz im vorliegenden Falle zweckmäßig zu

$$f_\circ = 4800 \text{ Hertz} \tag{7}$$

zu wählen ist. Dann wird für die höchste zu übertragende Frequenz[3] von 2400 Hertz das Frequenzverhältnis $\eta = 0.5$.

b. Zur guten Raumausnutzung im Hohlseil und auch aus den noch zu erörternden Gründen ist es zweckmäßig, mindestens einen Vierer vorzusehen, entsprechend der Querschnittszeichnung Abb. 2. Bei der sich ergebenden Leiterstärke in der Größenordnung von 3 mm Durchmesser und der vorgesehenen Papierisolation wird die Kapazität einer Doppelleitung etwa

$$C = 0{,}045\ \mu F/\text{km}, \tag{8}$$

Die Ableitung ist durch die dielektrischen Verluste im Isoliermaterial bestimmt und mittels der Formel

$$G = \omega C \operatorname{tg} \delta \tag{9}$$

zu berechnen. Der dielektrische Verlustfaktor tg δ hängt etwas von der Frequenz ab; er beträgt für die Papierisolation von Fernsprechkabeln für

$$\left.\begin{aligned} f &= 200 \text{ Hertz} & \operatorname{tg}\delta &= 2.2 \cdot 10^{-3} \\ f &= 2400 \text{ Hertz} & \operatorname{tg}\delta &= 3.1 \cdot 10^{-3} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

c. Die Zeitkonstante τ der Spulen wird um so günstiger, d. h. größer, je größer man die Spulen baut, d. h. je mehr Eisen und Kupfer man auf-

---

[1] D. i. eine künstliche Verzerrung in der Verstärkerschaltung mit einer der Kabelverzerrung entgegengesetzten Frequenzabhängigkeit.

[2] K. Küpfmüller und H. F. Mayer, »Über Einschwingvorgänge in Pupinleitungen und ihre Verminderung«, Wissenschaftl. Veröff. a. d. Siemens-Konzern Bd. 5 (1926), S. 51.

[3] Die höheren Frequenzen der Sprachlaute, die erfahrungsgemäß zur Sprachverständlichkeit nichts Wesentliches mehr beitragen, werden durch Frequenzsiebe unterdrückt, damit die in diesem Frequenzgebiet unvermeidlichen Unvollkommenheiten der Übertragung (Einschwingvorgänge, Rückkopplung, Pfeifneigung der Verstärker) nicht stören.

wendet. Im Falle des Seekabels möchte man die Spulen möglichst klein wählen, weil die Schwierigkeiten der Verlegung mit der Größe der Spulenmuffen wachsen. Außerdem hängt die Zeitkonstante natürlich in hohem Maße von den Eigenschaften des verwendeten Eisens ab; diese bestimmen namentlich auch die Abhängigkeit der Zeitkonstante von der Frequenz, auf die es hier sehr ankommt. Aus diesen Erwägungen und unter Benutzung der vorhandenen Baustoffe gelangt man etwa zu folgenden Werten der Zeitkonstante

$$\left.\begin{aligned} \text{für } f = \;& 200 \text{ Hertz} \quad \tau = 0.023 \\ f = \;& 2400 \text{ Hertz} \quad \tau = 0.015 \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Hiermit sind nun die Unterlagen für eine Berechnung der günstigsten Kabelabmessungen gegeben.

Wir schreiben für die Dämpfung bei 2400 Hertz den Wert $b = 10$ Neper vor. Dann wird für die beiden längsten Teilstrecken des Kabels Europa–Nordamerika die spezifische Dämpfung

$$\beta = 0.005$$

und, nach Gl. (1),

$$\beta' = 4.33 \cdot 10^{-3}.$$

Die Induktivität L des unbelasteten Kabels beträgt rd. $7 \cdot 10^{-4}$ Henry/km; auf den genauen Betrag kommt es nicht an, da die natürliche Induktivität L neben der Zusatzinduktivität L_z nur die Rolle einer geringen Korrektion spielt.

Mit den angegebenen Zahlenwerten erhalten wir aus (2) den Wert $R' = 3.776$ und weiter aus (3) den Leitungswiderstand

$$R = 4.52 \text{ Ohm/km}. \tag{12}$$

Dem entspricht eine Drahtstärke von 3.06 mm, wenn wir, entsprechend der am Meeresboden herrschenden Durchschnittstemperatur von etwa 4° C, die Leitfähigkeit des Kupfers mit 60 m/mm² Ω annehmen.

Aus (4) ergibt sich unter Benutzung des ersten und zweiten Ausdrucks

$$Z'_{\text{opt}} = 742 \text{ Ohm}$$

und hiermit aus dem dritten Ausdruck

$$L_z = 0.0241 \text{ Henry/km}. \tag{13}$$

Die Gl. (6) bestimmt den Spulenabstand:

$$s = 2.025 \text{ km}. \tag{14}$$

Man hat also Spulen zu verwenden mit

der Induktivität $L_s = 0.0241 \cdot 2.025 = 0.049$ Henry

und dem Wirkwiderstand bei 2400 Hertz $R_s = \dfrac{0.049}{0.015} = 3.2$ Ohm.

Wir berechnen nun noch die Dämpfung bei der tiefsten noch zu übertragenden Frequenz, die wir auf Grund der praktischen Erfahrungen auf $f = 200$ Hertz festsetzen. Es gilt die Formel (1), jedoch ist

$$\beta' = \frac{R_z + R'}{2Z} + \frac{GZ}{2} \tag{15}$$

zu setzen; für R', G und R_z sind natürlich die bei der tiefen Frequenz geltenden Werte zu nehmen; dabei ist $\eta = 200/4800 = 0.0417$. Man erhält

$$b = \beta l = 7.6 \text{ für } f = 200 \text{ Hertz.} \tag{16}$$

Der Dämpfungsunterschied zwischen der oberen und der unteren Grenze des zu übertragenden Frequenzbandes $b = 10 - 7.6 = 2.4$ Neper ist durch einen entsprechenden Dämpfungsausgleich in den Verstärkern zu beseitigen, um eine unverzerrte Übertragung der Sprache zu erzielen.

Nach Formel (5) wird die Einschwingdauer am größten für die obere Grenze $f = 2400$ des übertragenen Frequenzbandes. Der sich ergebende Wert

$$T = 10.1 \text{ ms} \tag{17}$$

dürfte noch als zulässig erachtet werden; eine etwa für erwünscht gehaltene Verkleinerung, z. B. auf $T = 5$ ms, wäre mittels Phasenausgleichs ohne weiteres möglich; auch durch Wahl einer etwas höheren Grenzfrequenz läßt sich die Dauer des Einschwingens noch herabsetzen.

4. Betriebsweise.

Wir haben im vorstehenden die elektrischen Eigenschaften der beiden Stammleitungen des Kabels so berechnet, daß diese eine Sprachübertragung von gleicher Güte wie in den Landleitungen des Fernsprechweitverkehrs ergeben.

Die technisch einfachste und sicherste Betriebsweise des Seekabels ist die Vierdrahtschaltung, bei der jede Stammleitung nur für die eine Sprechrichtung benutzt wird.

Bei der erforderlichen hohen Verstärkung ist die Zweidrahtschaltung, das Hin- und Hersprechen in der Doppelleitung nur möglich, wenn besondere Maßnahmen gegen Rückkopplung und Echos getroffen werden, etwa wie man sie in der transatlantischen Funkfernsprechverbindung London–New York verwendet[1]. Auf diese Weise könnte man daran denken, jede der beiden Stammleitungen in einem Kabel nach Abb. 2 für ein besonderes Gespräch zu benutzen. Dabei ist aber folgendes zu bedenken[2]. Nennen wir b_a die Dämpfung jeder der an das Kabel angeschlossenen Leitungen, s das erforderliche Verstärkungsmaß jedes zwischen Leitung und Kabel eingeschalteten Verstärkers, und verlangen wir, daß die Dämpfung zwischen den Endämtern, die sogenannte Restdämpfung, wie üblich $b_r = 1.0$ betragen soll, so ist

$$b + 2b_a - 2s = 1.0\,. \tag{18a}$$

Nun besteht zwischen den beiden Stammleitungen des Kabels ein gewisses Nebensprechen mit der Dämpfung b_n. Es wird daher zwischen den Endstellen der beiden Verbindungen auf dem Amte ein Nebensprechkanal mit der Dämpfung

$$b_k = 2\,b_a + b_n - 2\,s \tag{18b}$$

---

[1] ENT Bd. 5 (1928), S. 221.

[2] K. Küpfmüller, »Über Pupinseekabel«, ENT Bd. 4 (1927), S. 359.

vorhanden sein. Aus (18a) und (18b) folgt

$$b_k = b_n - b + 1.0 \,. \qquad (18c)$$

Im vorliegenden Falle ist $b = 10$; verlangt man, wie bei den Landleitungen des Fernsprechweitverkehrs $b_k = 7.5$, so wird

$$b_n = 16.5 \,. \qquad (18d)$$

Es liegen noch keine Erfahrungen vor, ob sich Nebensprechdämpfungen im Kabel in dieser Höhe erzielen lassen, etwa durch sorgfältige metallische Abschirmung der beiden Stromkreise gegeneinander. Daher tut man gut, die Ausnutzung des Kabelvierers für mehrere verschiedene Gespräche vorläufig außer Betracht zu lassen.

Dagegen ist es ohne weiteres möglich, das Kabel außer zum Fernsprechen noch gleichzeitig zum Telegraphieren zu verwenden, und zwar unter Ausnutzung des unteren, für die Sprachverständlichkeit nicht erforderlichen Frequenzbandes von 200 Hertz abwärts. Für diese sogenannte Unterlagerungstelegraphie, die sich auf den Landfernsprechleitungen bereits in ausgedehntem Umfang im Betrieb bewährt hat, steht auf dem Seekabel der Frequenzbereich von Null bis etwa 125 Hertz nutzbar zur Verfügung. Auf diesem Bereich lassen sich 10 Telegraphierkanäle einrichten, von denen jeder mit 300 Zeichen/Minute eines nach dem Fünferalphabet arbeitenden Drucktelegraphen betrieben werden kann. Man wird zweckmäßig die eine Stammleitung für den Verkehr nach einer Richtung und die andere für den Verkehr nach der anderen Richtung verwenden, so daß die Gesamtleistung des Kabels für die Telegraphie 3000 Buchstaben/Minute in jeder Richtung beträgt. Zum Vergleich sei angeführt, daß diese Leistung die des neuen Telegraphenkabels Emden–Azoren–New York um das Vierfache übersteigt.

5. Wirtschaftlichkeit.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen über die Wirtschaftlichkeit des vorgeschlagenen Kabels. Für eine wirkliche Berechnung der Wirtschaftlichkeit müßte man vor allem die Kosten der Herstellung und Verlegung des Kabels kennen; da mir keine Unterlagen hierüber zu Gebote stehen, muß ich mich auf eine rohe Schätzung beschränken, die natürlich nur mit den nötigen Vorbehalten gegeben werden kann. Man kann annehmen, daß sich die Kabelkosten auf etwa das Doppelte eines mittelschweren Guttaperchakabels des Kraruptyps mit Permalloyhülle stellen werden. Da die Telegraphierleistung des neuen Kabels das Vierfache der des Guttaperchakabels beträgt, würde schon der Telegraphenbetrieb allein dem neuen Kabel eine bessere Wirtschaftlichkeit sichern als die des Guttaperchakabels, das bekanntlich eine durchaus befriedigende Rente abwirft.

Hiernach kann man die Fernsprechverbindung als eine kostenlose Zugabe betrachten. Zur Berechnung der aus dieser Verbindung fließenden Einnahmen ist folgendes zu überlegen. Für den Fernsprechbetrieb sind die 24 Stunden des Tages nicht gleich wertvoll. Am höchsten ist die Zeit der gleichzeitigen

Geschäftsstunden auf beiden Seiten des Ozeans zu bewerten. Für die am häufigsten vorkommenden Verbindungen von Mitteleuropa nach der östlichen Zone der Vereinigten Staaten (Zeitunterschied 6 Stunden) ist nur die Geschäftszeit von 15^h bis 17^h MEZ gemeinsam. Anderseits sind die Zeiten gleichzeitiger Nacht für den Fernsprechverkehr am wenigsten wertvoll. Man wird, wie dies auch sonst gebräuchlich ist, die Sprechgebühren für die verschiedenen Zeitabschnitte verschieden hoch ansetzen, vielleicht nach dem Schema in Abb. 4. Darin bedeuten die Zahlen der oberen Reihe die Stunden mitteleuropäischer Zeit (MEZ), die Zahlen der zweiten Reihe die Stunden ostamerikanischer Zeit (Eastern Standard Time, EST). Die Geschäftsstunden sind durch starke Horizontalstriche hervorgehoben. In der unteren Reihe sind Gebührenfaktoren angegeben; die Zahl 1 bedeutet volle Gebühr, 2 doppelte Gebühr, $^1/_2$ bzw.

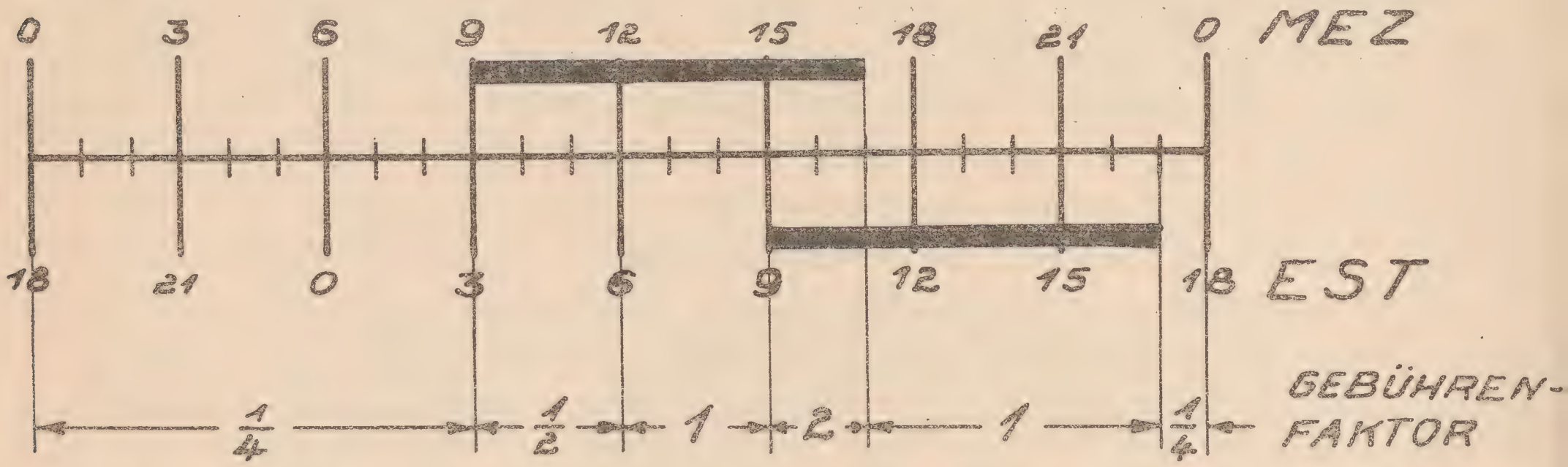


Abb. 4. Schema zur Veranschaulichung der verschiedenen Betriebszeiten und Gebührenfaktoren für den Fernsprechverkehr zwischen Mitteleuropa und dem östlichen Nordamerika.

$^1/_4$ halbe bzw. Viertelgebühr. Aus dem Schema ergibt sich, daß die 24 Tagesstunden 17 Stunden mit voller Gebühr entsprechen. Man kann erfahrungsmäßig damit rechnen, daß auf die 60 Minuten jeder Stunde 48 bezahlte Gesprächsminuten entfallen; die übrigen 12 Minuten gehen durch Wartezeiten, Dienstgespräche, Irrtümer u. dgl. verloren. Rechnet man das Einheitsgespräch zu drei Minuten, so können an den 300 Wochentagen eines Jahres bei vollem Betriebe $16 \times 17 \times 300 = 81600$ Einheitsgespräche geführt werden.

Man kann übrigens den Fernsprechstromkreis während der Nacht auch zur Übertragung hochwertiger Bilder benutzen und wird, soweit solcher Verkehr vorliegt, hieraus eine höhere Einnahme erzielen als aus den billigen Nachtgesprächen. Es ist anzunehmen, daß dieser Weg der Bildübertragung dem Funkwege vorgezogen werden wird, da der Kabelweg eine vollkommen gleichmäßige und fehlerlose, von atmosphärischen Störungen und Schwunderscheinungen (fadings) freie Übertragung gewährleistet. Es soll jedoch diese Möglichkeit in unseren wirtschaftlichen Überlegungen außer Betracht bleiben.

Bei einer Gebühr von 75 *RM* für das Einheitsgespräch, die bei Hinzurechnung der Gebühren für die beiderseits angeschlossenen Landlinien immer noch erheblich unter den gegenwärtig für Funkgespräche erhobenen Gebühren bleibt, ergibt sich aus dem Fernsprechbetrieb eine Jahreseinnahme von etwas über 6 Millionen *RM*. Wenn wir die Anlagekosten des Kabels nebst seinen Zwischen- und Endstationen zu 40 Millionen *RM* und die jährlichen Betriebs-

kosten sehr hoch zu 800000 *RM* schätzen, so ergibt der Fernsprechverkehr für sich allein eine Zusatzverzinsung von 13 Prozent des Anlagekapitals.

Die angeführten Wirtschaftszahlen sollen nur die Größenordnung kennzeichnen; eine genauere Wirtschaftsberechnung, für die mir die Unterlagen nicht zu Gebote stehen, kann zwar das Bild in den Einzelheiten verschieben, wird aber an dem Gesamtergebnis nichts Wesentliches ändern. Dieses kann dahin zusammengefaßt werden, daß von der vorgeschlagenen Fernsprechkabelverbindung zwischen Europa und Nordamerika ein günstiges Wirtschaftsergebnis erwartet werden darf.

Ausgegeben am 26. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 VIII—X

Library of Congress
AUG 7 1929
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 7. März. (S. 123)
Klassensitzung am 14. März. (S. 124)
Schur: Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. I. (S. 125)
T. Levi-Civita: Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen. (S. 137)
Gesamtsitzung am 21. März. (S. 154)
Einstein: Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip. (S. 156)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

VIII. Gesamtsitzung. 7. März.

Vorsitzender Sekretar: i. V. Hr. Planck.

1. Hr. Lietzmann berichtet über die vom September bis Dezember 1928 mit Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft unternommene Aufnahme der Landmauer von Konstantinopel. (Abh.)

Die Vermessung leitete Prof. Krischen-Danzig, die photographischen Meßbildaufnahmen Regierungsrat v. Lüpke-Berlin. Es wurde der ganze, etwa $5^1/_2$ km lange Zug der theodosianischen Mauer vom Meer bis zum Tekfur-Serai in fortlaufenden Aufnahmen photographiert und vermessen: insbesondere sind sämtliche Tore eingehend untersucht worden. Alle noch erhaltenen Inschriften sind erneut aufgenommen. Hr. Lietzmann gibt einen Vorbericht über Methode und Ergebnisse der Arbeit an der Hand photographischer Aufnahmen und Rekonstruktionsskizzen. Die Bedeutung der in den Jahren 412 ff. p. Chr. erbauten Mauer liegt nicht nur darin, daß sie die gewaltigste Befestigungsanlage des ganzen Altertums darstellt, die bis 1453 allen Kriegsstürmen getrotzt hat, sondern noch mehr darin, daß ihre gute Erhaltung und überaus reichhaltige Gliederung uns eine genaue technische Kenntnis der damaligen Baukunst verschafft, die als Ausgangspunkt für das Studium technisch verwandter, aber undatierter Profan- und Sakralbauten des Balkans und des westlichen Kleinasiens dienen kann.

2. Vorgelegt wurde die 5. Lief. der 3. Abt. des 10. Bandes des Deutschen Wörterbuchs von Jacob Grimm und Wilhelm Grimm (Leipzig 1929).

Die Akademie hat ihr Ehrenmitglied Hrn. Wilhelm Bode am 1. März durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 23. April.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Schur las über Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. I.

Es wird bewiesen, daß für jedes $k \geqq 1$ unter je k aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen oberhalb k mindestens eine Zahl durch eine oberhalb k liegende Primzahl teilbar sein muß. Hieraus wird die Irreduzibilität einer allgemeinen Klasse von ganzzahligen Polynomen gefolgert.

2. Hr. Einstein legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. T. Levi-Civita in Rom über »Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen« vor.

Der Verfasser stellt unter Zugrundelegung der Theorie des Fernparallelismus eine Theorie von Elektrizität und Gravitation auf, deren Feldgleichungen sich nicht erheblich von denjenigen unterscheiden, welche die allgemeine Relativitätstheorie bisher zugrunde gelegt hat. Die Theorie des n-Bein-Feldes mit Riemann-Metrik wird in neuartiger Weise gegeben.

Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. I.

Von I. SCHUR.

Im folgenden werde ich den Satz beweisen:

I. *Jedes Polynom der Form*

$$f(x) = 1 + g_1 \frac{x}{1!} + g_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + g_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \pm \frac{x^n}{n!}$$

mit beliebigen ganzen rationalen Koeffizienten $g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}$ *ist im Gebiete der rationalen Zahlen irreduzibel.*

Diese Klasse von Polynomen umfaßt neben den sämtlichen Abschnitten der Exponentialreihe und der Kosinusreihe auch die LAGUERREschen Polynome

$$\frac{e^x}{n!} \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Der Beweis des Satzes I läßt sich mit Hilfe eines an und für sich bemerkenswerten Satzes über Primzahlen führen:

II. *Für jedes* $k \geqq 1$ *gibt es unter je* k *aufeinanderfolgenden Zahlen*

$$h+1, \; h+2, \; \cdots, \; h+k \qquad (h \geqq k) \tag{1}$$

oberhalb k *mindestens eine Zahl, die durch eine oberhalb* k *liegende Primzahl teilbar ist.*

Dieser Satz läßt sich als eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von TSCHEBYSCHEFF über die Existenz einer Primzahl zwischen k und $2k$ auffassen. Denn für $h = k$ muß eine Zahl der Sequenz (1), die durch eine Primzahl $p > k$ teilbar ist, offenbar selbst eine Primzahl sein. Daß bei gegebenem k nur endlich viele Systeme (1) eine Ausnahme bilden könnten, folgt aus einem Satze von C. STÖRMER[1], der besagt, daß unter den positiven ganzen Zahlen, die nur durch unterhalb k gelegene Primzahlen teilbar sind, nur endlich viele Paare $h+1$, $h+2$ vorkommen. Hieraus folgt unser Satz aber noch keineswegs.

[1] *Quelques théorèmes sur l'équation de Pell* $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ *et leurs applications*, Christiania Videnskabsselskabs Skrifter 1897. Vgl. auch G. PÓLYA, *Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome*, Math. Zeitschrift, Bd. 1 (1918), S. 143—148, und C. SIEGEL, *Approximation algebraischer Zahlen*, Math. Zeitschrift, Bd. 10 (1921), S. 173—213.

Daß er für alle genügend großen Werte von k richtig ist, ergibt sich ohne Mühe aus dem Primzahlsatz. Die Erledigung *aller* Werte von k gelingt mit Hilfe der älteren Methoden von Tschebyscheff. Das erforderte stellenweise etwas mühsame Rechnungen, insbesondere auch genauere Abzählungen in der Reihe der Primzahlen unterhalb $e^{12} = 162754, \cdots$. Ich benutzte hierbei die Tafel der Primzahlen unterhalb 300000, die in dem Buche *Recherches sur la théorie des nombres* von M. Kraitchik (Paris 1924) abgedruckt ist.

In einer demnächst erscheinenden Fortsetzung dieser Arbeit werde ich einen etwas weitergehenden Satz über die Primteiler von Sequenzen ungerader Zahlen beweisen, aus dem sich eine genaue Übersicht über die irreduziblen Faktoren der Hermiteschen Polynome und einer mit ihnen verwandten allgemeineren Klasse von Polynomen ergeben wird.

§ 1.

Zurückführung des Satzes I auf den Satz II.

Nehmen wir das Polynom $f(x)$ als reduzibel an, so besitzt es einen irreduziblen Teiler $A(x)$, dessen Grad k höchstens gleich $\frac{n}{2}$ ist. Da $f(x)$ nach Multiplikation mit $n!$ ein ganzzahliges Polynom mit dem höchsten Koeffizienten ± 1 wird, darf $A(x)$ in der Form

$$A(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots a_{k-1} x + a_k \qquad \left(k \leqq \frac{n}{2}\right)$$

angesetzt werden, wobei die $a_\varkappa$ ganze rationale Zahlen sind. Zu der Erkenntnis, daß es ein solches Polynom nicht geben kann, gelangen wir in zwei Schritten.

1. Ich behaupte, daß *jeder Primteiler p von a_k der Bedingung $p \leqq k$ genügen müßte*. Ist nämlich α eine Nullstelle von $A(x)$, so können in dem durch α erzeugten algebraischen Zahlkörper des Grades k die Hauptideale (α) und (p) wegen

$$N(\alpha) = \pm a_k \equiv 0 \pmod{p}$$

nicht teilerfremd sein. Es sei $\mathfrak{p}$ ein in beiden Idealen aufgehendes Primideal und

$$(\alpha) = \mathfrak{p}^r \mathfrak{m}, \quad (p) = \mathfrak{p}^s \mathfrak{n},$$

wobei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ nicht mehr durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Dann wird

$$(2) \qquad 1 \leqq r, \quad 1 \leqq s \leqq k.$$

Nun ist auch $f(\alpha) = 0$, also

$$(3) \qquad n! + n! g_1 \frac{\alpha}{1!} + \cdots + n! g_{n-1} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \pm n! \frac{\alpha^n}{n!} = 0.$$

Hierin ist das erste Glied genau durch p^{h_n} teilbar, wobei

$$(4) \qquad h_n = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots$$

zu setzen ist. Die höchste Potenz des Primideals $\mathfrak{p}$, die in dem ersten Glied aufgeht, ist also $\mathfrak{p}^{sh_n}$. Es dürfen offenbar nicht alle übrigen Glieder von (3) durch höhere Potenzen von $\mathfrak{p}$ teilbar sein. Da jedes Glied

$$n!\, g_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n,\ g_n = \pm 1)$$

mindestens durch

$$\mathfrak{p}^{sh_n + \nu r - sh_\nu}$$

teilbar ist, muß für wenigstens ein $\nu \geqq 1$

$$\nu r \leqq sh_\nu \tag{5}$$

werden[1]. Es ist aber

$$h_\nu = \left[\frac{\nu}{p}\right] + \left[\frac{\nu}{p^2}\right] + \cdots < \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\nu}{p^\lambda} = \frac{\nu}{p-1}.$$

Aus (2) und (5) folgt daher

$$\nu \leqq \nu r \leqq sh_\nu < \frac{s\nu}{p-1} \leqq \frac{k\nu}{p-1},$$

also $p - 1 < k$ oder $p \leqq k$.

2. Das Polynom $A(x)$ ist auch ein Teiler von

$$F(x) = \pm n!\, f(x) = x^n \pm g_1 n x^{n-1} \pm g_2 n(n-1) x^{n-2} \cdots.$$

In diesem Ausdruck sind alle Koeffizienten vom zweiten angefangen durch n, vom dritten angefangen durch $n(n-1)$ teilbar usw. Ist daher q eine in

$$n(n-1)\cdots(n-l+1) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n)$$

aufgehende Primzahl, so erscheint $F(x)$ als ein ganzzahliges Polynom, das mod. q durch x^{n-l+1} teilbar ist. Setzt man $F(x) = A(x)\,B(x)$, so wird auch

$$F(x) \equiv A(x)\,B(x) \pmod{q}.$$

Da die Zerlegung von $F(x)$ in irreduzible Faktoren mod. q eindeutig ist, muß das Produkt der höchsten Potenzen von x, die mod. q in $A(x)$ und $B(x)$ aufgehen, mindestens x^{n-l+1} sein. Für $l = k$ ergibt sich insbesondere, da $B(x)$ genau vom Grade $n-k$ ist, daß $A(x)$ mod. q mindestens einmal durch x teilbar sein muß, was nur bedeutet, daß q ein Teiler von a_k wird. Eine solche Primzahl ist aber nach dem Früheren höchstens gleich k.

Es würde sich also ergeben, daß die k aufeinanderfolgenden Zahlen

$$n-k+1,\quad n-k+2,\ \cdots,\ n$$

nur durch Primzahlen $q \leqq k$ teilbar sein dürften. Da hier $k \leqq \frac{n}{2}$, also $n-k \geqq k$ ist, so widerspricht das dem Satze II.

---

[1] Vgl. O. PERRON, *Über eine Anwendung der Idealtheorie auf die Frage nach der Irreduzibilität algebraischer Gleichungen*, Math. Annalen, Bd. 60 (1905), S. 448—458.

§ 2.

Einige Hilfssätze.

Im folgenden bedeute $\pi(x)$ wie üblich die Anzahl der Primzahlen $p \leqq x$ und $\vartheta(x)$ die Summe

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p .$$

Die elementaren Methoden von Tschebyscheff[1] gestatten bekanntlich, $\vartheta(x)$ für jedes $x \geq 1$ in zwei Schranken einzuschließen. Es ist nach Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. I, S. 91, für $x \geqq 1$

$$\vartheta(x) < \frac{6}{5} a x + 3 \log^2 x + 8 \log x + 5 , \tag{6}$$

$$\vartheta(x) > a x - \frac{12}{5} a \sqrt{x} - \frac{3}{2} \log^2 x - 13 \log x - 15 , \tag{7}$$

wobei

$$a = \log \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0.92129 \ldots$$

zu setzen ist. Da für $y > 10$

$$3y^2 + 8y + 5 < 4y^2 , \quad \frac{3}{2} y^2 + 13y + 15 < 3y^2$$

ist, darf für $x > e^{10}$

$$\vartheta(x) < \frac{6}{5} a x + 4 \log^2 x , \quad \vartheta(x) > a x - \frac{12}{5} a \sqrt{x} - 3 \log^2 x \tag{8}$$

gesetzt werden.

Hieraus läßt sich bekanntlich folgern, daß für jedes $\varepsilon > \frac{1}{5}$ eine Schranke $M(\varepsilon)$ existiert, von der behauptet werden kann, daß für $x > M(\varepsilon)$ das Intervall $x < p < (1 + \varepsilon) x$ mindestens eine Primzahl enthält. Ich brauche im folgenden die präzise Aussage:

Hilfssatz I. *Für $x \geqq 29$ gibt es mindestens eine Primzahl p, die der Bedingung $x < p \leqq \frac{5x}{4}$ genügt.*

Aus (8) ergibt sich nämlich für $x > e^{10}$

$$\vartheta\left(\frac{5x}{4}\right) - \vartheta(x) > \frac{1}{20} a x - \frac{12}{5} a \sqrt{\frac{5x}{4}} - 3 \log^2 \frac{5x}{4} - 4 \log^2 x .$$

---

[1] Mémoire sur les nombres premiers, Œuvres, Bd. I, S. 51—70.

Beachtet man, daß

$$\log\left(1+\frac{1}{4}\right)<\frac{1}{4},\quad \frac{12}{5}\sqrt{\frac{5}{4}}<\frac{14}{5}$$

ist, so erhält man

$$\vartheta\left(\frac{5x}{4}\right)-\vartheta(x)>\frac{1}{20}g(x), \qquad (x>e^{10})$$

wobei

$$g(x)=ax-56a\sqrt{x}-140\log^2 x-30\log x-4$$

zu setzen ist. Wird nun für $x>X>e^{10}$ der Ausdruck $g(x)$ positiv, so enthält unser Intervall für $x>X$ gewiß mindestens eine Primzahl. Da aber $\frac{1}{x}g(x)$ schon für $x>e^2$ monoton wächst, genügt es, irgendeine Zahl $X>e^{10}$ anzugeben, für die $g(X)>0$ wird. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$X=e^{12}=162754,\cdots$$

dieser Bedingung genügt. Für $x>e^{12}$ gibt es also jedenfalls Primzahlen zwischen x und $\frac{5x}{4}$.

Die Werte x zwischen 29 und $162754,\cdots$ lassen sich mit Hilfe der Primzahlentafel erledigen. Die Rechnungen lassen sich auf Grund folgender Überlegung sehr vereinfachen. Es ist offenbar nur zu zeigen, daß, wenn $\Delta p=p'-p$ den Abstand der Primzahl p von der nächstfolgenden Primzahl p' bedeutet, für $29\leqq p<162754$

$$\Delta p<\frac{p}{4} \tag{9}$$

wird. Man überzeugt sich sehr leicht, daß in der Primzahltafel für $p<162754$ jedenfalls $\Delta p<1000$ ist. Sollte also einmal (9) nicht richtig sein, so müßte $p<4000$ sein. Für solche Primzahlen ist aber, wie man schnell überblickt, $\Delta p<100$. Für $p>400$ ist also bei uns (9) gewiß richtig. Unterhalb 400 ist aber $\Delta p\leqq 14$. Das reduziert schon die Diskussion auf $29\leqq p<56$. Für die 7 Primzahlen dieses Intervalls ist (9) leicht zu bestätigen.

Schwierigere Rechnungen erfordert der Beweis der folgenden Regel:

Hilfssatz II. *Für* $x\geqq 2$ *ist*

$$\pi(x)<\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{\log x}. \tag{10}$$

Wir gelangen in mehreren Schritten zum Ziel.

1. *Für* $x\geqq 37$ *ist* $\pi(x)<\frac{x}{3}$.

Dies erkennt man nach einer bekannten elementaren Methode (vgl. LANDAU, *Handbuch*, Bd. I, S. 70). Für $x>5$ ist

$$\pi(x) < 3 + \sum_{d \mid 30} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right]$$

$$= 3 + \sum_{d \mid 30} \mu(d) \left\{\frac{x}{d} - \rho_d\right\} \qquad (0 \leqq \rho_d < 1)$$

$$< 3 + x \cdot \frac{\phi(30)}{30} + \sum{}' |\mu(d)|,$$

wo d in $\sum'$ nur noch die 4 Teiler d von 30 durchläuft, die $\mu(d) = -1$ liefern. Das gibt

$$\pi(x) < 3 + \frac{4x}{15} + 4 \leqq \frac{x}{3} \text{ für } x \geqq 105.$$

Für $37 \leqq x < 105$ ist unsere Behauptung leicht zu verifizieren.

2. Aus (6) folgt, weil

$$\frac{6}{5} a < \frac{6}{5} \cdot 0.9213 < 1.106$$

und für $y \geqq 2$

$$3y^2 + 8y + 5 < 9y^2$$

ist, für $x > e^2 = 7.3\cdots$

$$\vartheta(x) < 1.106x + 9\log^2 x. \tag{11}$$

Ist nun x eine positive ganze Zahl und ξ eine beliebige positive ganze Zahl unterhalb x, so wird für $\xi > e^2$ nach einer oft benutzten Schlußweise

$$\pi(x) = \pi(\xi) + \sum_{\nu=\xi+1}^{x} \frac{\vartheta(\nu) - \vartheta(\nu-1)}{\log \nu}$$

$$< \pi(\xi) + \sum_{\nu=\xi+1}^{x-1} \vartheta(\nu) \frac{\log(\nu+1) - \log\nu}{\log\nu \log(\nu+1)} + \frac{\vartheta(x)}{\log x}$$

$$< \pi(\xi) + \sum_{\nu=\xi+1}^{x-1} \frac{\vartheta(\nu)}{\nu \log^2 \nu} + \frac{\vartheta(x)}{\log x}$$

$$< \pi(\xi) + \sum_{\nu=\xi+1}^{x-1} \left(\frac{1.106}{\log^2 \nu} + \frac{9}{\nu}\right) + \frac{1.106x}{\log x} + 9\log x.$$

Das liefert, indem man beachtet, daß

$$\frac{1}{\log^2 \nu} \leqq \frac{1}{\log^2(\xi+1)}, \quad \sum_{\nu=\xi+1}^{x-1} \frac{1}{\nu} < 1 + \log x$$

ist,

$$\pi(x) < \pi(\xi) + \frac{1.106x}{\log^2(\xi+1)} + \frac{1.106x}{\log x} + 9 + 18\log x. \tag{12}$$

3. *Es soll zunächst gezeigt werden, daß für* $x \geqq 2$

$$\pi(x) < \frac{2x}{\log x} \tag{13}$$

ist.

Man setze in (12) die Hilfsgröße ξ gleich $\left[x^{\frac{3}{4}}\right]$. Um neben (12) auch $\pi(\xi) < \frac{\xi}{3}$ anwenden zu dürfen, genügt es,

$$x > 37^{\frac{4}{3}} = 123, \cdots$$

anzunehmen. Die Ungleichung (13) ist gewiß richtig, wenn

$$\frac{1}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{16}{9}\cdot\frac{1.106x}{\log^2 x} + \frac{1.106x}{\log x} + 9 + 18\log x < \frac{2x}{\log x},$$

d. h.

$$\frac{\log x}{3x^{\frac{1}{4}}} + \frac{16}{9}\cdot\frac{1.106}{\log x} + \frac{9\log x}{x} + \frac{18\log^2 x}{x} < 0.894 \tag{14}$$

wird. Der links stehende Ausdruck ist für $x > e^4$ monoton abnehmend. Für

$$x = e^9 = 8103, \cdots, \quad x^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{9}{4}} = 9, \cdots$$

ist (14), wie eine einfache Rechnung zeigt, richtig. Daher gilt (13) jedenfalls für $x > e^9$. Für $2 \leqq x \leqq e^9$ wäre diese Ungleichung ohne große Mühe direkt zu verifizieren. Da ich später für diese Werte die weitergehende Ungleichung (10) genauer behandeln werde, soll hierauf an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

4. Man setze nun in (12), wenn $x > 40(e^2+1)$ ist,

$$\xi = \left[\frac{x}{40}\right].$$

Dann darf für $x > 1680$

$$\pi(\xi) < \frac{2\xi}{\log\xi} \leqq \frac{2x}{40}\cdot\frac{1}{\log\left(\frac{x}{40}-1\right)} < \frac{1}{10}\cdot\frac{x}{\log x}$$

gesetzt werden[1]. Ferner ist für $x > 40^3 = 64000$

$$\frac{1}{\log(\xi+1)} < \frac{1}{\log x - \log 40} < \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log x}.$$

Ist also $x > 64000$, so besteht die Ungleichung

$$\pi(x) < \frac{1}{10}\cdot\frac{x}{\log x} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1.106x}{\log^2 x} + \frac{1.106x}{\log x} + 9 + 18\log x.$$

---

[1] Hierbei wird benutzt, daß für $x > 1680$

$$40^2 x < (x-40)^2$$

wird.

Der rechts stehende Ausdruck wird kleiner $\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{\log x}$, wenn

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{1.106}{\log x}+\frac{9\log x}{x}+\frac{18\log^2 x}{x}<0.294$$

ist. Man überzeugt sich leicht, das dies für $x = e^{11} = 59874, \cdots$ und also auch für $x > e^{11}$ richtig ist.

5. Damit haben wir erkannt, daß die zu beweisende Ungleichung

$$\pi(x) < \frac{3}{2}\cdot\frac{x}{\log x}$$

jedenfalls für $x > 64000$ gilt. Um mit Hilfe der Primzahltafel auch die kleineren Werte zu erledigen, hätte man für die Primzahlen[1]

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \cdots p_{6413} = 63997$$

unterhalb 64000 die Formeln

$$(15) \qquad \frac{3}{2}\cdot\frac{p_\lambda}{\log p_\lambda} > \lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3 \cdots 6413)$$

nachzuprüfen. Die Rechnungen vereinfachen sich außerordentlich, wenn man benutzt, daß $\frac{x}{\log x}$ für $x \geqq 3$ monoton wächst. Hieraus folgt, daß, wenn für einen Index μ

$$(16) \qquad \frac{3}{2}\frac{p_\mu}{\log p_\mu} > \nu \geqq \mu$$

wird, die Formel (15) jedenfalls für $\lambda = \mu, \mu+1, \cdots, \nu$ gilt. Den Gang der zum Ziele führenden Rechnungen veranschaulicht folgende Tabelle, in der die Indizes μ und ν jedesmal der Ungleichung (16) genügen:

μ	p_μ	ν	μ	p_μ	ν	μ	p_μ	ν
1	2	4	35	149	44	394	2707	511
2	3	4	45	197	55	512	3671	668
5	11	6	56	263	70	669	4999	878
7	17	8	71	353	89	879	6829	1155
9	23	10	90	463	112	1156	9341	1525
11	31	13	113	617	143	1526	12799	2024
14	43	17	144	827	184	2025	17609	2693
18	61	22	185	1103	235	2694	24203	3583
23	83	27	236	1487	303	3584	33479	4803
28	107	34	304	2003	393	4804	46477	6413

[1] Da für alle positiven x der Ausdruck $\frac{3x}{2\log x} \geqq \frac{3e}{2} > 4$ ist, könnte man mit $p_5 = 11$ anfangen.

§ 3.

Beweis des Satzes II.

Man erkennt ohne weiteres, daß es genügt, den Satz allein für Primzahlen $k = p$ zu beweisen. Es soll also gezeigt werden, daß es für $p = 2, 3, 5, \cdots$ und $h \geqq p$ keine Folge

$$h+1,\ h+2,\ \cdots,\ h+p \tag{17}$$

geben kann, deren Zahl nur Primteiler $q \leqq p$ aufweisen.

Für $p = 2$ ist die Behauptung trivial; sie besagt nur, daß zwei aufeinanderfolgende Zahlen nicht beide gerade sein können. Auch für $p = 3$ und $p = 5$ ist der Beweis leicht zu erbringen. Unter drei aufeinanderfolgenden Zahlen der Form $2^\alpha 3^\beta$ ist nur eine durch 3 teilbar, die beiden anderen müßten Potenzen von 2 sein. Da bei uns diese Zahlen größer als 3 sein sollen, müßte ihre Differenz mindestens $8 - 4 = 4$ sein, was nicht angeht. Ebenso gibt es unter 5 aufeinanderfolgenden Zahlen der Form $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ nur eine durch 5 teilbare Zahl und höchstens zwei durch 3 teilbare Zahlen. Es bleiben mindestens zwei Zahlen übrig, die nur durch 2 teilbar sind, also Potenzen von 2 sein müßten. Da beide größer als 5 sein sollten, müßte ihre Differenz mindestens gleich $16 - 8 = 8$ sein, was wieder nicht möglich ist.

Im folgenden dürfen wir uns also auf den Fall $p \geqq 7$ beschränken.

Nehmen wir an, keine der Zahlen (17) sei durch eine Primzahl oberhalb p teilbar, so würde dasselbe auch für den Binomialkoeffizienten

$$\binom{h+p}{p} = \frac{(h+1)\,(h+2)\cdots(h+p)}{1\,.\,2\,.\cdots p} = \frac{(h+p)\,!}{h\,!\;p\,!}$$

gelten. Es wäre also

$$\frac{(h+p)\,!}{h\,!\;p\,!} = \prod_q q^{\mu_q}, \tag{18}$$

wo q alle Primzahlen $q \leqq p$ durchläuft. Dabei wird (vgl. Formel [4])

$$\mu_q = \sum_\lambda \left\{ \left[\frac{h+p}{q^\lambda} \right] - \left[\frac{h}{q^\lambda} \right] - \left[\frac{p}{q^\lambda} \right] \right\}, \tag{19}$$

wo λ die Werte

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \left[\frac{\log (h+p)}{\log q} \right]$$

zu durchlaufen hat. Nun ist aber bekanntlich für je drei positive ganze Zahlen a, b, c

$$\left[\frac{a+b}{c} \right] - \left[\frac{a}{c} \right] - \left[\frac{b}{c} \right] = 0 \text{ oder } 1\,.$$

Aus (19) folgt daher

$$\mu_q \leqq \frac{\log (h+p)}{\log q}\,.$$

Geht man nun in (18) zu den Logarithmen über und setzt

$$T(n) = \log n! = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n,$$

so ergibt sich

$$(20) \qquad \Delta = T(h+p) - T(h) - T(p) = \sum_q \mu_q \log q \leq m \log (h+p),$$

wenn p die m-te Primzahl, d. h.

$$m = \pi(p)$$

ist.

Nun ist aber nach der STIRLINGschen Formel

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} < n! < \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{12n}},$$

also

$$T(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + R_n$$

mit

$$0 < R_n < \frac{1}{12}.$$

Das liefert wegen $\log \sqrt{2\pi} < 1$

$$\Delta = \left(h + p + \frac{1}{2}\right) \log (h+p) - \left(h + \frac{1}{2}\right) \log h - \left(p + \frac{1}{2}\right) \log p - R',$$

wobei

$$R' = \log \sqrt{2\pi} - R_{h+p} + R_h + R_p < 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{6}$$

wird. Aus (20) folgt daher

$$(21) \quad \left(h + p + \frac{1}{2}\right) \log (h+p) - \left(h + \frac{1}{2}\right) \log h - \left(p + \frac{1}{2}\right) \log p - m \log (h+p) < \frac{7}{6}.$$

Im folgenden setze ich überall

$$h = Qp.$$

Die Formel läßt sich dann so schreiben:

$$(22) \quad (p-m) \log (Q+1) + \left(p - m - p - \frac{1}{2}\right) \log p + \left(h + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{Q}\right) < \frac{7}{6}.$$

Da bei uns $h \geqq p$, also $Q \geqq 1$ sein soll, wird

$$\log \left(1 + \frac{1}{Q}\right) = \frac{1}{Q} - \frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{3Q^3} - \cdots > \frac{1}{Q} - \frac{1}{2Q^2},$$

also

$$\left(h + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{Q}\right) > p + \frac{1}{2Q} - \frac{p}{2Q} - \frac{1}{4Q^2} > p - \frac{p}{2Q}.$$

Aus (22) folgt demnach

$$(23) \qquad (p-m)\log(Q+1) < \frac{7}{6} + \frac{p}{2Q} + \frac{\log p}{2} + m\log p - p\,.$$

Diese Ungleichung spielt beim Beweis des Satzes II eine entscheidende Rolle. Zunächst folgt aus ihr auf Grund des Primzahlsatzes

$$\lim_{p\to\infty} \frac{m\log p}{p} = 1\,,$$

daß der Satz jedenfalls für alle genügend großen Werte von p richtig ist. Sobald nämlich für eine Primzahl p eine »Ausnahmefolge« existiert, folgt aus (23) wegen $Q \geqq 1$

$$(24) \qquad \left(1 - \frac{m}{p}\right)\log 2 < \frac{7}{6p} + \frac{\log p}{2p} + \frac{1}{2} + \frac{m\log p}{p} - 1\,.$$

Läßt man hier p über alle Grenzen wachsen, so konvergiert die linke Seite gegen $\log 2$, die rechte Seite gegen $\frac{1}{2}$. Da aber $\log 2 > \frac{1}{2}$ ist, kann (24) für alle p, die eine gewisse Schranke übertreffen, nicht gelten.

Diese Schlußweise läßt aber noch keineswegs erkennen, daß der Satz II für *alle* Werte von p und $h \geqq p$ richtig ist. Der vollständige Beweis gelingt auf Grund der beiden Hilfssätze des vorigen Paragraphen.

1. Ich behaupte zunächst, *daß unser Satz für* $p \geqq 29$ *richtig ist.* Denn ist für eine solche Primzahl $h \leqq 4p$, also $Q \leqq 4$, so wird

$$\frac{h+p}{h} = 1 + \frac{1}{Q} \geqq \frac{5}{4}\,,\quad h \geqq p \geqq 29\,.$$

Aus dem Hilfssatz I folgt, daß das Intervall $h < P \leqq \frac{5h}{4}$ mindestens eine Primzahl P enthält. Diese Primzahl wäre eine der Zahlen (17) und gewiß größer als p. Das widerspricht aber der Annahme, daß keine Zahl der Folge einen solchen Primteiler aufweisen soll.

Ist aber $Q > 4$, so wird in der Ungleichung (23)

$$\log(Q+1) > \log 5 > \frac{8}{5}\,,\quad \frac{p}{2Q} < \frac{p}{8}\,.$$

Außerdem darf nach Hilfssatz II

$$m\log p - p < \frac{3}{2}p - p = \frac{p}{2}$$

gesetzt werden. Aus (23) würde daher folgen

$$\frac{8}{5}(p-m) < \frac{7}{6} + \frac{\log p}{2} + \frac{p}{8} + \frac{p}{2}$$

oder

$$\frac{39}{40} < \frac{7}{6p} + \frac{\log p}{2p} + \frac{8m}{5p} < \frac{7}{6p} + \frac{\log p}{2p} + \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log p}\,.$$

Da der rechts stehende Ausdruck für $p \geqq 29$ abnimmt, müßte auch

$$\frac{39}{40} < \frac{7}{6.29} + \frac{\log 29}{2.29} + \frac{12}{5 \log 29}$$

sein. Diese Ungleichung ist aber falsch[1].

2. Um noch die übrigbleibenden Primzahlen $p = 7, 11, 13, 17, 19, 23$ zu erledigen, setze man die Ungleichung (23) mit dem zugehörigen genauen Wert von m an, wobei rechts Q durch 1 ersetzt werde. Das liefert für jede der 6 Primzahlen eine Formel, aus der sich ohne Mühe eine obere Schranke K_p für $Q+1$ berechnen läßt. Eine einfache Rechnung liefert

$$K_7 = 10, K_{11} = 5, K_{13} = 6, K_{17} = K_{19} = K_{23} = 5.$$

Dies zeigt, daß wir nur noch Zahlenfolgen (17) mit $h + p \leqq 5.23 = 115$ zu betrachten haben. Unter den Zahlen $8, 9, \cdots, 115$ enthält aber jedes System von mehr als 7 aufeinanderfolgenden Zahlen mindestens eine Primzahl, was schon die Fälle $p = 11, 13, 17, 19, 23$ ausschließt.

Daß auch $p = 7$ keine Ausnahme bildet, folgt daraus, daß wir für $p = 7$ allein den Fall $h + 7 \leqq 7.10$ zu betrachten haben. Unterhalb 71 enthält aber schon jedes System von 6 aufeinanderfolgenden Zahlen mindestens eine Primzahl.

Damit ist der Satz II vollständig bewiesen.

---

[1] Um dies zu erkennen, hat man nur die rohe Abschätzung $3 < \log 29 < 4$ zu benutzen. Es würde sich ergeben

$$\frac{39}{40} < \frac{7}{6.29} + \frac{4}{2.29} + \frac{12}{5 \cdot 3} \text{ oder } \frac{7}{40} < \frac{19}{6.29} < \frac{1}{6}.$$

Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen.

Von Prof. Dr. T. Levi-Civita
in Rom.

(Vorgelegt von Hrn. Einstein.)

In der soeben erschienenen Abhandlung »Zur einheitlichen Feldtheorie«[1] hat Hr. Einstein die grundlegende Idee verwertet, daß es möglich und zweckmäßig ist, das gesamte System der 16 Feldgleichungen (welches aus seinen berühmten Gravitationsgleichungen und den Maxwellschen besteht) so geometrisch zu deuten, daß es die Definition (und nur die Definition) eines in der Raum-Zeit-Welt eingebetteten orthogonalen Vierbeins enthält.

Es sollen umgekehrt die 16 Bestimmungsstücke eines Vierbeins nicht nur die Riemannsche Metrik des Raumes, was bekanntlich zwanglos geschieht, sondern auch die elektromagnetischen Erscheinungen vollständig definieren.

Dafür hat der hervorragende Verfasser kovariante Ableitungen in bezug auf das Vierbein eingeführt und Verknüpfungen derselben vorgeschlagen, durch die in erster Annäherung die verlangte Zuordnung geschieht.

Es scheint mir aber, daß die von Einstein gestellte prinzipielle Aufgabe sich einfacher und allgemeiner lösen läßt, indem man einerseits nur ganz geläufige Hilfsmittel des absoluten Kalküls verwendet und anderseits alle früheren Resultate streng beibehält.

1. Geometrische und formale Vorbemerkungen[2].

Es seien $x^\nu (\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$ allgemeine Koordinaten eines Riemannschen Raumes R_n; λ_i^ν $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ die Parameter von n-Kongruenzen, die ein Liniengitter in R_n und in jedem Punkte ein n-Bein definieren.

Nach dem Einsteinschen Muster werde ich für Koordinatenindizes (wie z. B. ν) griechische, dagegen für Beinindizes (wie i) lateinische Buchstaben gebrauchen. Summenzeichen in bezug auf griechische Indizes (insofern sie einmal oben und einmal unten vorkommen) werde ich fortlassen, nicht aber anderweitige Σ.

[1] Berliner Berichte I, 1929, S. 1—8.

[2] Vgl. insbesondere meinen Absoluten Differentialkalkül (deutsche Ausgabe von A. Duschek), Berlin, Springer, 1928, Kap. III.

Es seien, wie gewöhnlich, $\lambda_{i|\nu}$ die zu λ_i^ν reziproke Elemente (normierte Unterdeterminanten). Sie bilden für jedes i ein kovariantes System (Momente des betreffenden Beines). Durch Überschiebung mit den λ_i^ν, $\lambda_{i|\nu}$ entsteht aus jedem gemischten Tensor der Stufe $p+q$ mit den Komponenten

$$A_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_q} \qquad (\mu_1, \cdots, \mu_p; \nu_1, \cdots, \nu_q = 0, 1, \cdots, n-1)$$

ein Beintensor, dessen Komponenten durch die Formeln

$$(1) \qquad A_{i_1 \cdots i_p k_1 \cdots k_q} = A_{\mu_1 \cdots \mu_p}^{\nu_1 \cdots \nu_q} \lambda_{i_1}^{\mu_1} \cdots \lambda_{i_p}^{\mu_p} \lambda_{k_1|\nu_1} \cdots \lambda_{k_q|\nu_q}$$

definiert sind; und umgekehrt, indem diese Formeln in bezug auf die Koordinatenkomponenten auflösbar sind, unter der Form

$$A_{\mu_1 \cdots \mu_p}^{\nu_1 \cdots \nu_q} = \sum_0^{n-1}{}_{i_1 \cdots i_p k_1 \cdots k_q} A_{i_1 \cdots i_p k_1 \cdots k_q} \lambda_{i_1|\mu_1} \cdots \lambda_{i_p|\mu_p} \lambda_{k_1}^{\nu_1} \cdots \lambda_{k_q}^{\nu_q}.$$

Die Beinkomponenten eines Tensors sind reine Invarianten gegenüber Koordinaten-Transformationen; sie hängen wesentlich vom betrachteten n-Bein ab; sie besitzen aber, wie leicht zu bestätigen, immer noch tensoriellen Charakter bezüglich orthogonaler Transformationen, denen gleichzeitig die λ_i^μ und die $\lambda_{k|\nu}$ unterworfen werden.

Setzt man

$$(2) \qquad g_{\mu\nu} = \sum_0^{n-1}{}_i \lambda_{i|\mu} \lambda_{i|\nu}, \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \cdots, n-1)$$

so wird (im reellen Gebiete) eine definite Metrik

$$(3) \qquad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

im R_n eingeführt, derart, daß unser n-Bein orthogonal ausfällt. Ich werde später (Nr. 3) die (unwesentlichen) Modifikationen angeben, die erforderlich sind, um, immer im reellen Gebiete, die n-Beintheorie auf eine indefinite Metrik (mit gegebenem Trägheitsindex) zu übertragen.

Indessen denke ich mir die kovarianten Ableitungen der Momenten $\lambda_{i|\nu}$ eingeführt, und, mit Ricci, die Drehungskoeffizienten

$$(4) \qquad \gamma_{ikl} = \lambda_{i|\nu\varrho} \lambda_k^\nu \lambda_l^\varrho.$$

Wegen der Identitäten

$$(5) \qquad \gamma_{ikl} + \gamma_{kil} = 0$$

(welche eine Folge der Relationen zwischen Parametern und Momenten sind) hat man in den Riccischen γ, $n\frac{n(n-1)}{2}$ Invarianten gegenüber Koordinaten-Transformationen, welche selbstverständlich vom gegebenen n-Beine wesentlich abhängen und alle seine geometrischen Differentialcharaktere erster Ordnung notwendigerweise erschöpfen. In bezug auf orthogonale Transformationen mit konstanten Koeffizienten verhalten sich die γ wie ein Tensor dritter

Stufe. Um die Beschränkung auf Transformationen mit konstanten Koeffizienten zu betonen, werde ich solche Systeme als lokale Beintensoren bezeichnen. Echte Beintensoren verhalten sich invariant gegenüber allen orthogonalen Transformationen, deren Koeffizienten irgendwie mit den x variieren können.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, zu erinnern, daß die expliziten Ausdrücke der Drehungskoeffizienten γ auch direkt durch gewöhnliche Derivationen ohne vorläufigen Übergang durch die kovarianten Ableitungen der $\lambda_{i|\nu}$ sich berechnen lassen.

Dazu braucht man entweder die Pfaffschen Ausdrücke

$$\Psi_i = \lambda_{i|\nu}\, dx^\nu$$

oder die Operatoren (Ableitungen einer Funktion $f[x^0, \cdots, x^{n-1}]$ in der Richtung der Linien der Kongruenzen)

$$\frac{df}{ds_i} = X_i f = \sum_0^{n-1}{}_\nu \lambda_i^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$$

einzuführen und die betreffenden bilinearen Kovarianten bzw. Poissonschen Klammerausdrücke zu bilden. Übrigens gelangt man noch schneller zum Ziele, indem man (4) benutzt und beachtet, daß gemäß der Definition der kovarianten Ableitungen die Identität

$$\lambda_{i|\nu\varrho} - \lambda_{i|\varrho\nu} = \frac{\partial \lambda_{i|\nu}}{\partial x^\varrho} - \frac{\partial \lambda_{i|\varrho}}{\partial x^\nu}$$

besteht. Man erhält somit

$$\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk} = \sum_0^{n-1}{}_{\nu\varrho} \lambda_k^\nu \lambda_l^\varrho \left\{ \frac{\partial \lambda_{i|\nu}}{\partial x^\varrho} - \frac{\partial \lambda_{i|\varrho}}{\partial x^\nu} \right\},$$

und diese Gleichungen in Verbindung mit (5) bestimmen alle γ eindeutig.

Die Gleichungen (4) lassen sich in bezug auf die $\lambda_{i|\nu\varrho}$ auflösen und ergeben

$$\lambda_{i|\nu\varrho} = \sum_0^{n-1}{}_{ij} \gamma_{ijh} \lambda_{j|\nu} \lambda_{h|\varrho}, \tag{4'}$$

woraus man durch nochmalige kovariante Ableitung und Differenzenbildung die Integrabilitätsbedingungen derselben (4′) bekommt.

Dazu braucht man die Kommutationsformel

$$\lambda_{i|\nu\varrho\sigma} - \lambda_{i|\nu\sigma\varrho} = R_{\mu\nu,\varrho\sigma} \lambda_i^\mu, \tag{6}$$

wo $R_{\mu\nu,\varrho\sigma}$ den Riemannschen Tensor bezeichnet.

Man erhält in dieser Weise

$$\gamma_{ij,hk} = R_{\mu\nu,\varrho\sigma} \lambda_i^\mu \lambda_j^\nu \lambda_h^\varrho \lambda_k^\sigma, \tag{7}$$

wenn man der Kürze halber

$$\gamma_{ij,hk} = \frac{d\gamma_{ijh}}{ds_k} - \frac{d\gamma_{ijk}}{ds_h} + \sum_0^{n-1}{}_l [\gamma_{ijl}(\gamma_{lhk} - \gamma_{lkh}) + \gamma_{lik}\gamma_{ljh} - \gamma_{lih}\gamma_{ljk}] \tag{8}$$

setzt. Aus (7) entnimmt man, daß die Vier-Indizes-γ einen (echten) Beintensor bilden. Wegen der bekannten Identitäten, die von den RIEMANNschen Symbolen erfüllt sind, führen die Formeln (7) zu ähnlichen Identitäten für die Vier-Indizes-γ, und zwar

$$(9)\qquad \begin{cases} \gamma_{ij,hk} = -\gamma_{ji,hk} = -\gamma_{ij,kh} = \gamma_{hk,ij}, \\ \gamma_{ij,hk} + \gamma_{ih,kj} + \gamma_{ik,jh} = 0. \end{cases}$$

Nun zum EINSTEINschen Tensor

$$G_{\mu\sigma} = R_{\mu\nu,\varrho\sigma} g^{\nu\varrho}.$$

Seine Komponenten G_{ik}, in bezug auf die Zweibeine i, k des n-Beins, haben nach (1) den Ausdruck

$$G_{ik} = G_{\mu\sigma} \lambda_i^\mu \lambda_k^\sigma,$$

woraus gemäß (7)

$$(10)\qquad G_{ik} = \sum_{h}^{n-1} \gamma_{ih,hk}.$$

Die lineare (Koordinaten- und Bein-) Invariante

$$G = G_{\mu\sigma} g^{\mu\sigma} = \sum_{k}^{n-1} G_{kk}$$

nimmt folglich die Form an

$$(11)\qquad G = \sum_{hk}^{n-1} \gamma_{kh,hk}.$$

Eine letzte Tatsache will ich noch hervorheben, nämlich die, daß aus Verjüngung von zwei Indizes in einem Beintensor ein reduzierter Tensor entsteht (m-2-ter Stufe, wenn der ursprüngliche von m-ter Stufe war).

Wie schon bemerkt, bilden die γ_{ikl} einen lokalen Beintensor dritter Stufe, und zwar wegen (5) schiefsymmetrisch in bezug auf die zwei ersten Indizes i, k. Dasselbe gilt für die Differenzen $\gamma_{lik} - \gamma_{lki}$, welche für $i, k \neq l$ Anormalitäten heißen.

Wendet man auf die Elemente $A_{(h)}$ [wo (h) für $h_1 h_2 \cdots h_m$ steht] eines (lokalen oder echten) Beintensors den Differentialoperator $\frac{d}{ds_j}$ an, so entsteht ein neuer lokaler Beintensor $\frac{dA_{(h)}}{ds_j}$, dessen Stufe um eine Einheit höher als die der ursprünglichen ist. Speziell erzeugt man in dieser Weise den lokalen Beintensor

$$\frac{d\gamma_{ikl}}{ds_j}$$

vierter Stufe, welcher in bezug auf i und k schiefsymmetrisch ist. Durch Verjüngung bekommt man

$$(12)\qquad \xi_{ik} = \sum_{l}^{n-1} \frac{d\gamma_{ikl}}{ds_l},$$

womit man augenscheinlich einen schiefsymmetrischen lokalen Beintensor ξ zweiter Stufe erzeugt hat. Seine kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten lauten:

$$\xi_{\mu\nu} = \sum_{ik}^{n-1} \xi_{ik} \lambda_{i|\mu} \lambda_{k|\nu}, \qquad \xi^{\mu\nu} = \sum_{ik}^{n-1} \xi_{ik} \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu. \tag{13}$$

Es sei außerdem erwähnt, daß die n Größen

$$c_l = \sum_j^{n-1} \gamma_{jlj} \tag{14}$$

sich als mittlere Krümmungen der zum l-Bein orthogonalen Stellung interpretieren lassen. Nach dem Gesagten sind sie Bestimmungsstücke eines lokalen Beinvektors. Durch Verjüngung entsteht aus dem dreistufigen Tensor $\gamma_{lik} - \gamma_{lki}$ und diesem Vektor ein neuer lokaler Beintensor zweiter Stufe, nämlich

$$\eta_{ik} = \sum_l^{n-1} c_l (\gamma_{lik} - \gamma_{lki}), \tag{15}$$

der ebenfalls schiefsymmetrisch ist.

2. Divergenzenbildung. Besonderer Fall $n = 4$.

Sind v^ν die kontravarianten Komponenten eines Vektors $\boldsymbol{v}$, so ist seine Divergenz durch die Invariante definiert

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = v^\nu{}_{|\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_\nu^{n-1} \frac{\partial (\sqrt{|g|} v^\nu)}{\partial x^\nu}, \tag{16}$$

wo g, wie üblich, die Determinante $\|g_{\mu\nu}\|$ bezeichnet, und ich habe $|g|$ (statt einfach g) geschrieben, weil so die Formel ohne Änderung auch für ein indefinites ds^2 gilt.

Für einen Tensor zweiter Stufe ξ mit den kontravarianten Komponenten $\xi^{\mu\nu}$ bekommt man als Divergenz einen Vektor χ mit den kontravarianten Komponenten

$$\chi^\mu = \xi^{\mu\nu}{}_{|\nu}. \tag{17}$$

Mit Hrn. v. Laue[1] werden wir schlechthin schreiben

$$\chi = \operatorname{Div} \xi. \tag{17'}$$

Ersetzt man darin die kovarianten Ableitungen $\xi^{\mu\nu}{}_{|\varrho}$ durch ihre expliziten Werte, so bekommt man, im Falle eines schiefsymmetrischen Tensors $(\xi^{\mu\nu} + \xi^{\nu\mu} = 0)$,

$$\chi^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_\nu^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{|g|}\, \xi^{\mu\nu}), \tag{17''}$$

[1] Die Relativitätstheorie, Bd. II (zweite Auflage, Braunschweig, Vieweg, 1923), § 14.

woraus, wegen (16),

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{div}\chi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mu\nu}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} (\sqrt{|g|}\,\xi^{\mu\nu}).$$

Das zweite Glied verschwindet identisch wegen der Schiefsymmetrie der $\xi^{\mu\nu}$.

Man erhält also, wenn man wieder kovariante Ableitungen benutzt, die Identität

$$\chi^\mu{}_{|\mu} = \xi^{\mu\nu}{}_{|\nu\mu} = 0,$$

oder endlich, in tensorieller Schreibweise,

$$\text{(18')} \qquad \operatorname{div}(\operatorname{Div}\xi) = 0,$$

d. h. in einem beliebigen Riemannschen Raume ist die Divergenz der Divergenz eines schiefsymmetrischen Tensors zweiter Stufe identisch Null.

Um die zweiten Glieder der (16) und (17) in Beinkomponenten auszudrücken, genügt es, auf die Definitionsformeln

$$v_k = v^\nu \lambda_{k|\nu},$$

$$\xi_{ik} = \xi^{\mu\nu} \lambda_{i|\mu} \lambda_{k|\nu}$$

den Operator

$$\frac{d}{ds_l} = \lambda_l^\varrho \frac{\partial}{\partial x^\varrho}$$

anzuwenden. Indem man rechts die gewöhnliche Ableitung durch die kovariante ersetzt (was erlaubt ist, da man mit Invarianten zu tun hat), bekommt man

$$\frac{dv_k}{ds_l} = v^\nu{}_{|\varrho} \lambda_{k|\nu} \lambda_l^\varrho + v^\nu \lambda_{k|\nu\varrho} \lambda_l^\varrho,$$

$$\frac{d\xi_{ik}}{ds_l} = \xi^{\mu\nu}{}_{|\varrho} \lambda_{i|\mu} \lambda_{k|\nu} \lambda_l^\varrho + \xi^{\mu\nu} \lambda_l^\varrho (\lambda_{i|\mu\varrho} \lambda_{k|\nu} + \lambda_{i|\mu} \lambda_{k|\nu\varrho}),$$

woraus, wegen (4'), (16) und (17),

$$\text{(19)} \qquad \sum_k^{n-1} \frac{dv_k}{ds_k} = \operatorname{div} v + \sum_{hk}^{n-1} \gamma_{khk} v_h,$$

$$\text{(20)} \qquad \sum_k^{n-1} \frac{d\xi_{ik}}{ds_k} = \chi_i + \sum_{hk}^{n-1} (\gamma_{ihk} \xi_{hk} + \gamma_{khk} \xi_{ih}),$$

welche die Divergenzen $\operatorname{div} v$ und $\operatorname{Div}\xi$ von Beintensoren (erster bzw. zweiter Stufe) direkt durch Beinkomponenten und Beinoperationen darstellen.

Für $n = 4$ hat man einen vierstufigen elementaren Tensor zur Verfügung, nämlich das bekannte Ricci'sche ε-System, dessen kovariante bzw. kontravariante Komponenten

$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\tau}, \qquad \varepsilon^{\mu\nu\varrho\tau}$$

gleich Null sind, wenn die vier Indizes nicht alle verschieden sind. Die übrigen Komponenten haben die Werte $\pm\sqrt{|g|}$ bzw. $\pm\frac{1}{\sqrt{|g|}}$, je nachdem die Permutation $(\mu\nu\rho\sigma)$ in bezug auf (0123) gerade oder ungerade ist.

Es sei wiederum ξ mit den kontravarianten Komponenten $\xi^{\nu\varrho}$ ein schiefsymmetrischer Tensor zweiter Stufe. Setzt man

$$p_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\xi^{\nu\varrho}{}_{|\sigma}, \tag{21}$$

was mit

$$p^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\xi_{\nu\varrho|\sigma}, \tag{21'}$$

oder in der v. Laueschen Bezeichnung mit

$$\boldsymbol{p} = \mathrm{Div}\,{}^*\xi \tag{21''}$$

gleichbedeutend ist, so wird es berechtigt, den Vektor $\boldsymbol{p}$ mit den obigen kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten Pfaffsche Divergenz von ξ zu nennen, weil die p^μ identisch verschwinden, dann und nur dann, wenn die $\xi_{\nu\varrho}$ mit den Koeffizienten des bilinearen Kovarianten eines Pfaffschen Ausdruckes $\phi_\nu dx^\nu$ zusammenfallen. Dies ergibt sich am einfachsten, wenn man in (21') die kovarianten Ableitungen $\xi_{\nu\varrho|\tau}$ durch ihre expliziten Werte ersetzt, und beachtet, daß wegen der Schiefsymmetrie der $\xi_{\nu\varrho}$ nur

$$p^\mu = \sum_{\mu\nu\varrho\sigma}^{0\ 3} \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\frac{\partial\xi_{\nu\varrho}}{\partial x^\sigma} \tag{21'''}$$

bleibt. Offenbar verschwinden die zweiten Glieder, wenn die $\frac{\partial\xi_{\nu\varrho}}{\partial x^\sigma}$ durch die Differenzen $\frac{\partial^2\phi_\nu}{\partial x^\varrho\,\partial x^\sigma} - \frac{\partial^2\phi_\varrho}{\partial x^\nu\,\partial x^\sigma}$ ersetzt werden.

Indem man den Ausdruck (21''') der p^μ in die zweite Form (16) der Divergenz eines Vektors einführt, bekommt man ohne weiteres $\mathrm{div}\,\boldsymbol{p} = 0$, was mit Rücksicht auf (21'')

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{Div}^*\,\xi) = 0 \tag{22}$$

geschrieben werden kann, d. h. die Divergenz der Pfaffschen Divergenz eines schiefsymmetrischen Tensors zweiter Stufe in R_4 verschwindet identisch.

Ferner wollen wir den Vektor $\boldsymbol{p}$ (Pfaffsche Divergenz) direkt durch die Beinkomponenten

$$\xi_{ik} = \xi_{\mu\nu}\lambda_i^\mu\lambda_k^\nu$$

des gegebenen Tensors darstellen. Es empfiehlt sich, dafür von den soeben geschriebenen Gleichungen in aufgelöster Form

$$\xi_{\nu\varrho} = \sum_{hk}^{0\ 3}\xi_{hk}\lambda_{h|\nu}\lambda_{k|\varrho}$$

auszugehen und die $\xi_{\nu\varrho|\sigma}$ durch kovariante Ableitung des zweiten Gliedes zu berechnen.

Wegen

$$\xi_{hk\,|\,\tau} = \sum_{0}^{3}{}_{l} \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} \lambda_{l\,|\,\tau}$$

und (4′) bekommt man

$$\xi_{\nu\varrho\,|\,\tau} = \sum_{0}^{3}{}_{hkl} \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} \lambda_{h\,|\,\nu} \lambda_{k\,|\,\varrho} \lambda_{l\,|\,\tau} + \sum_{0}^{3}{}_{kjl} \xi_{hk} \lambda_{l\,|\,\tau} \{\gamma_{hjl} \lambda_{j\,|\,\nu} \lambda_{k\,|\,\varrho} + \gamma_{kjl} \lambda_{j\,|\,\varrho} \lambda_{h\,|\,\nu}\},$$

und folglich, nach (21′),

$$\begin{aligned} p_i = p^\mu \lambda_{i\,|\,\mu} &= \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \xi_{\nu\varrho\,|\,\sigma} \lambda_{i\,|\,\mu} \\ &= \sum_{0}^{3}{}_{hkl} \varepsilon_{ihkl} \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} + \sum_{0}^{3}{}_{jhkl} \xi_{hk} (\varepsilon_{ijkl} \gamma_{hjl} + \varepsilon_{ihjl} \gamma_{kjl}) \\ &= \sum_{0}^{3}{}_{hkl} \varepsilon_{ihkl} \left\{ \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} + \sum_{0}^{3}{}_{j} (\gamma_{jhl} \xi_{jk} + \gamma_{jkl} \xi_{hj}) \right\}, \end{aligned}$$

wo man zur Abkürzung

$$(23) \qquad \varepsilon_{ihkl} = \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \lambda_{i\,|\,\mu} \lambda_{h\,|\,\nu} \lambda_{k\,|\,\varrho} \lambda_{l\,|\,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \begin{vmatrix} \lambda_{0\,|\,0} & \lambda_{0\,|\,1} & \lambda_{0\,|\,2} & \lambda_{0\,|\,3} \\ \lambda_{1\,|\,0} & \lambda_{1\,|\,1} & \lambda_{1\,|\,2} & \lambda_{1\,|\,3} \\ \lambda_{2\,|\,0} & \lambda_{2\,|\,1} & \lambda_{2\,|\,2} & \lambda_{2\,|\,3} \\ \lambda_{3\,|\,0} & \lambda_{3\,|\,1} & \lambda_{3\,|\,2} & \lambda_{3\,|\,3} \end{vmatrix}$$

gesetzt hat. Diese ε_{ihkl} sind somit Null, wenn zwei der vier Indizes untereinander gleich sind. Wenn dagegen $ihkl$ eine Permutation der Zahlen 0123 darstellt, so hat ε_{ihkl} den Wert ± 1, je nachdem die Klasse der Substitution $\begin{pmatrix} ihkl \\ 0123 \end{pmatrix}$ gerade oder ungerade ist. Demzufolge erkennt man, daß in dem soeben erhaltenen Ausdruck der p_i die zwei letzten Glieder gleich sind. So bekommt man schließlich

$$(24) \qquad p_i = \sum_{0}^{3}{}_{hkl} \varepsilon_{ihkl} \left\{ \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} + 2 \sum_{0}^{3}{}_{j} \gamma_{jhl} \xi_{jk} \right\}.$$

3. Umformungen für eine indefinite Metrik.

Nach Eisenhart[1] lassen sich alle Formeln der n-Beintheorie in sehr übersichtlicher Weise auf indefinite Maßbestimmungen übertragen, ohne das reelle Gebiet, sei es nur vorläufig, zu verlassen.

Faßt man ein indefinites

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ins Auge, so nennt man bekanntlich eine (reelle) Richtung dx^ν zeitartig oder raumartig, je nachdem das entsprechende $ds^2 >$ oder < 0 ausfällt; Nullrichtungen sind die ∞^{n-2}, für welche $ds^2 = 0$ wird.

[1] Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1926, Chap. III.

Parameter einer eigentlichen (d. h. nicht Null-) Richtung nennt man jedenfalls die Verhältnisse

$$\lambda^\nu = \frac{dx^\nu}{|ds|}. \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$$

Man hat somit

$$(25) \qquad g_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu = \frac{ds^2}{|ds^2|} = \pm 1 = e,$$

indem man von jetzt an mit e die positive oder negative Einheit bezeichnet.

Als Momente einer gegebenen Richtung führt man, wie im definiten Falle, die kovarianten Größen

$$(26) \qquad \lambda_\nu = g_{\mu\nu}\lambda^\mu$$

ein, so daß die quadratische Identität (25) die Form

$$(27) \qquad \lambda_\nu\lambda^\nu = e$$

annimmt.

Sind λ_i^ν $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ die Parameter eines orthogonalen n-Beins, welches aus lauter eigentlichen Richtungen besteht, so hat man wegen der Orthogonalität

$$\lambda_{i|\nu}\lambda_k^\nu = 0, \qquad (i \neq k)$$

und außerdem, wegen (27),

$$\lambda_{i|\nu}\lambda_i^\nu = \pm 1 = e_i.$$

Die Gesamtzahl der negativen (und folglich auch der übrigbleibenden positiven) e_i ist für ein gegebenes ds^2 stets gleich seinem Trägheitsindex und somit immer dieselbe, welches auch das betrachtete (eigentliche) n-Bein sei.

Die zwei soeben geschriebenen Relationsgruppen zwischen Parametern und Momenten eines n-Beins können mit der üblichen Bezeichnung der Symbole δ_{ik} in die einzige Formel

$$(28) \qquad \lambda_i^\nu\lambda_{k|\nu} = e_k\delta_{ik} = e_i\delta_{ik}$$

zusammengefaßt werden; oder, wegen $e_k^2 = 1$,

$$\lambda_i^\nu e_k\lambda_{k|\nu} = \delta_{ik}.$$

Wir entnehmen hieraus, daß die reziproken Elemente zu den Parametern λ_i^ν nicht gerade die Momente $\lambda_{i|\nu}$ sind, sondern $e_i\lambda_{i|\nu}$. Ebenso sind $e_i\lambda_i^\nu$ die reziproken Elemente der Momente $\lambda_{i|\nu}$. Wenn man die Gleichungen (26) für alle Beine geschrieben denkt, so hat man (indem man den Summenindex mit ρ bezeichnet)

$$\lambda_{i|\nu} = g_{\rho\nu}\lambda_i^\rho.$$

Durch Multiplikation mit $e_i\lambda_{i|\mu}$ und Summierung in bezug auf i bekommt man

$$(2)^* \qquad g_{\mu\nu} = \sum_0^{n-1}{}_i e_i\lambda_{i|\mu}\lambda_{i|\nu},$$

welche die Formel (2) des definiten Falles ersetzt, usw.

Nunmehr darf ich mich auf ganz kurze Hinweise beschränken. Überhaupt werde ich nur die Formeln hinschreiben, die nicht durchaus unverändert bleiben. Sie werden mit * behaftet sein und dieselbe Nummer der entsprechenden, sich auf eine definite Metrik beziehenden, bekommen.

Erstens, Beinkomponenten irgendeines gegebenen Tensors und Rotationskoeffizienten γ_{ikl} sind jedenfalls durch die Definitionsgleichungen (1) und (4) einzuführen; dagegen werden die aufgelösten Ausdrücke der $\lambda_{i|\nu_\varrho}$ im allgemeinen:

$$(4')^* \qquad \lambda_{i|\nu_\varrho} = \sum_{\text{o}}^{n-1}{}_{jh} \gamma_{ijh}\, e_j\, e_h\, \lambda_{j|\nu}\, \lambda_{h|\varrho}.$$

Die kovarianten Gleichungen (6) sowie die Definitionsgleichungen (7) der Vier-Indizes-γ gelten unbedingt. Nur die Beintensorausdrücke der $\gamma_{ij,hk}$ erleiden eine kleine Modifikation. Es ist nämlich allgemein zu setzen:

$$(8)^* \quad \gamma_{ij,hk} = \frac{d\gamma_{ijh}}{ds_k} - \frac{d\gamma_{ijk}}{ds_h} + \sum_{\text{o}}^{n-1}{}_l e_l \left[\gamma_{ijl}\,(\gamma_{lhk} - \gamma_{lkh}) + \gamma_{lik}\,\gamma_{ljh} - \gamma_{lih}\,\gamma_{ljk}\right].$$

Selbstverständlich sind diese Größen zufolge der Gleichungen (7) immer noch durch die Relationen (9) verknüpft.

Wesentlich ist doch, zu beachten, daß der lokale Übergang von einem zu einem anderen n-Beine keiner orthogonalen Transformation entspricht, sondern einer pseudoorthogonalen, d. h. einer solchen, welche die quadratische Form

$$Q(z) = \sum_{\text{o}}^{n-1}{}_i e_i\, z_i^2$$

invariant läßt. Die Koeffizienten α_{ik} einer solchen pseudo-orthogonalen Transformation erfüllen somit die Bedingungen

$$\sum_{\text{o}}^{n-1}{}_l e_l\, \alpha_{il}\, \alpha_{kl} = \sum_{\text{o}}^{n-1}{}_l e_l\, \alpha_{li}\, \alpha_{lk} = \delta_{ik}.$$

Aus der Forderung, die Form $Q(z)$ invariant zu lassen, folgt unmittelbar der allgemeinste Ausdruck, welcher den Koeffizienten α_{ik} zukommt im Falle infinitesimaler pseudoorthogonaler Transformationen. Man hat nur

$$\alpha_{ik} = \delta_{ik} + e_i \beta_{ik}$$

zu setzen, und die β_{ik} als unendlich kleine Größen zu betrachten. Führt man in Q die Substitution

$$(29) \qquad z_i = \sum_{\text{o}}^{n-1}{}_k \alpha_{ik}\, z'_k = z'_i + e_i \sum_{\text{o}}^{n-1}{}_k \beta_{ik}\, z'_k$$

aus, und verlangt, daß $Q(z')$ die Form $\sum_{\text{o}}^{n-1}{}_i e_i\, z_i'^2$ beibehält, so bekommt man (wie im Falle von rein orthogonalen Substitutionen) gerade die Bedingung der Schiefsymmetrie:

$$(30) \qquad \beta_{ik} + \beta_{ki} = 0.$$

Die Bestimmungsstücke eines Beintensors sind Zahlensysteme, welche gegenüber pseudoorthogonalen Transformationen sich wie Tensoren verhalten; für lokale Beintensoren gilt dieses Verhalten nur gegenüber pseudoorthogonaler Transformationen mit konstanten Koeffizienten. Die Operatoren

$$\frac{df}{ds_i} = X_i f = \sum_{\nu}^{n-1} \lambda_i^{\nu} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}}$$

verhalten sich wie Beinvektoren.

Wenn (i) und (k) irgendwelche Beinindizesgruppen bezeichnen und $A_{(i)j}$, $B_{(k)l}$ zwei lokale Beintensoren, so wird die Verjüngung in bezug auf j, l durch die Formel definiert

$$\sum_{l}^{n-1} e_l A_{(i)l} B_{(k)l} .$$

Dementsprechend bekommt man statt (10) und (11)

$$(10)^* \qquad G_{ik} = \sum_{h}^{n-1} e_h \gamma_{ih,\,hk} ;$$

$$(11)^* \qquad G = \sum_{hk}^{n-1} e_h e_k \gamma_{kh,\,hk} .$$

Weiter müssen die Formeln (12), (14) und (15) durch

$$(12)^* \qquad \xi_{ik} = \sum_{l}^{n-1} e_l \frac{d\gamma_{ikl}}{ds_l} ,$$

$$(14)^* \qquad c_l = \sum_{j}^{n-1} e_j \gamma_{jlj}$$

und

$$(15)^* \qquad \eta_{ik} = \sum_{l}^{n-1} e_l c_l (\gamma_{lik} - \gamma_{lki})$$

ersetzt werden, während die Ausdrücke (13) von kovarianten und kontravarianten Komponenten durch die Beinkomponenten ξ_{ik} aus der allgemeingültigen Definition (1) der Beinkomponenten eines Tensors zu entnehmen sind. Sie werden folglich

$$(13)^* \qquad \begin{cases} \xi_{\mu\nu} = \sum_{ik}^{n-1} \xi_{ik} e_i e_k \lambda_{i\,|\,\mu} \lambda_{k\,|\,\nu} , \\ \xi^{\mu\nu} = \sum_{ik}^{n-1} \xi_{ik} e_i e_k \lambda_i^{\mu} \lambda_k^{\nu} . \end{cases}$$

Da die Verjüngung von pseudoorthogonalen Beintensoren durch Hinzufügung des Faktors e mit dem betreffenden Index geschieht, so ist es ohne weiteres ersichtlich, daß die (19), (20) und (24) die Form annehmen

$$(19)^* \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \sum_{k}^{n-1} e_k \frac{dv_k}{ds_k} - \sum_{hk}^{n-1} e_h e_k \gamma_{khk} v_h ,$$

$$(20)^* \qquad \varkappa_i = \sum_{k}^{n-1} e_k \frac{d\xi_{ik}}{ds_k} - \sum_{hk}^{n-1} e_h e_k (\gamma_{ihk} \xi_{hk} + \gamma_{khk} \xi_{ih}) ,$$

$$(24)^* \qquad p_i = \sum_{hkl}^{3} e_h e_k e_l \varepsilon_{ihkl} \left\{ \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} + 2 \sum_{j}^{3} e_j \gamma_{jhl} \xi_{jk} \right\} .$$

Selbstverständlich bleiben die Gleichungen (18′) und (22), d. h. zusammen

$$(31) \qquad \operatorname{div} (\operatorname{Div} \xi) = 0 , \qquad \operatorname{div} (\operatorname{Div}^* \xi) = 0 ,$$

welche invariante Eigenschaften ausdrücken, stets gültig.

4. Gravitationsgleichungen.

Die kovarianten Komponenten des Energietensors seien, wie üblich, durch $T_{\mu\nu}$ bezeichnet. Läßt man Einwirkungen von irgendwelchem Ursprung zu, so sind diese $T_{\mu\nu}$ in zwei Anteile zerlegt zu denken, von denen der eine $\tau_{\mu\nu}$ rein elektromagnetisch ist, und der andere $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ den etwaigen Rest darstellt. Wir setzen somit

$$(32) \qquad T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + \mathrm{T}_{\mu\nu} ,$$

wo τ der bekannte Maxwellsche Tensor ist; ferner ist natürlich $\mathrm{T}_{\mu\nu} = 0$ im Vakuum.

Die Einsteinschen Gleichungen (ohne kosmologisches Glied) lauten bekanntlich

$$G_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} G g_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} ,$$

wo die Proportionalitätskonstante $\varkappa$ sich durch die Gravitationskonstante f und die Lichtgeschwindigkeit c ausdrücken läßt $\left(\varkappa = \dfrac{8\pi f}{c^4}\right)$.

Führt man gemäß den Formeln

$$G_{ik} = G_{\mu\nu} \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu ,$$
$$T_{ik} = T_{\mu\nu} \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu \text{ usw.}$$

die entsprechenden Beintensoren ein, so hat man einerseits aus (32)

$$(32') \qquad T_{ik} = \tau_{ik} + \mathrm{T}_{ik} ,$$

und hauptsächlich die Gravitationsgleichungen in beintensorieller Form[1]

$$(\mathrm{I}) \qquad G_{ik} - \tfrac{1}{2} \delta_{ik} G = -\varkappa T_{ik} , \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

wo gemäß $(10)^*$ und $(11)^*$

$$G_{ik} = \sum_{h}^{3} e_h \gamma_{ih,\,hk} , \qquad G = \sum_{k}^{3} e_k G_{kk} = \sum_{hk}^{3} e_h e_k \gamma_{kh,\,hk} .$$

[1] Sie wurden seit 1918 von Cisotti (Rend. Acc. Lincei, Vol. XXVII, S. 366—371) angegeben, doch mit Beschränkung auf die (imaginäre) Schreibweise (8), (10), (11).

Da die zugrunde zu legende Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie eine indefinite Metrik mit Trägheitsindex 3 besitzt, so ist genau

$$e_0 = 1\,, \qquad e_1 = e_2 = e_3 = -1 \tag{33}$$

zu setzen.

Die $\gamma_{ij,\,hk}$ sind durch die Gleichungen (8)* als Gitterdifferentialelemente zweiter Ordnung eingeführt. Ihre Kombinationen G_{ik} haben Tensorcharakter gegenüber allen pseudoorthogonalen, d. h. im gegenwärtigen Falle Lorentzschen, Transformationen (auch wenn man die Koeffizienten irgendwie mit der Stelle variieren läßt).

Die 10 Gleichungen (I) bevorzugen demnach, wie übrigens von vornherein ersichtlich, in Rücksicht auf ihre ursprüngliche Form, kein besonderes Vierbein. Sie gelten unter derselben Gestalt für irgendwelche orthogonale Vierbeine des relativistischen R_4 und dienen bekanntlich zur Festlegung ihrer Metrik.

Da sie doch jedenfalls 10 Relationen zwischen den 16 Parametern λ_i^ν liefern, so braucht man nur dieselben durch 6 weitere, vernünftig gewählten Bedingungen zu verbinden, um unter allen möglichen Vierbeinen und zugehörigen Gittern ein spezielles, das Weltgitter zu charakterisieren.

Wir werden demnächst (Nr. 6) diesen letzten Schritt ausführen, welcher übrigens der einzige wesentliche ist. Indessen wird es angemessen sein, die Maxwellschen Gleichungen in geeigneter Kleidung vorauszuschicken.

5. Elektromagnetische Gleichungen.

Es seien $F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$, F_{ik} die (bzw. kovarianten, kontravarianten Bein-) Komponenten des schiefsymmetrischen Tensors $\boldsymbol{F}$, welcher das elektromagnetische Feld in der Raum-Zeit-Welt bestimmt; $\boldsymbol{S}$ (Vektor) der Viererstrom, S_μ usw. seine Komponenten, wobei alles in sog. rationellen Einheiten gemessen zu verstehen ist.

Die Maxwellschen Gleichungen (wie sie seit Einstein in der allgemeinen Relativitätstheorie eingebürgert sind) lauten dann:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{S}\,, \qquad \operatorname{Div}^* \boldsymbol{F} = 0\,. \tag{34}$$

Jede Gruppe enthält vier Gleichungen, so daß auf den ersten Blick man deren Anzahl als 8 erklären würde. Es ist aber notwendigerweise $\operatorname{div} \boldsymbol{S} = 0$, so daß nach (31) zwei identische Relationen bestehen, nämlich das Verschwinden der betreffenden Divergenzen. Zwei Gleichungen des Systems (34) können somit (unter gehörigen Nebenbedingungen) als Folge der 6 übrigen betrachtet werden; und tatsächlich weiß man, daß, wenn man $\boldsymbol{S}$ als gegeben oder anderweitig mit dem Tensor $\boldsymbol{F}$ verbunden ansieht, dann die Gleichungen (34) nichts anderes als die eindeutige Bestimmung der sechs Komponenten von $\boldsymbol{F}$ für $x^0 + dx^0$ aus ihren Werten für ein gegebenes x^0 (und irgendwelche x^1, x^2, x^3) enthalten.

Wir brauchen noch den symmetrischen Energiespannungstensor explizit hinzuschreiben. Bekanntlich sind seine kovarianten Komponenten folgendermaßen definiert:

$$\tau_{\mu\nu} = -g^{\varrho\sigma} F_{\mu\varrho} F_{\nu\sigma} + \tfrac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\varrho\sigma} F^{\varrho\sigma}.$$

Durch Überschiebung mit $\lambda_i^\mu \lambda_k^\nu$ (indem man rechts $g^{\varrho\sigma}$ durch $\sum_0^3{}_l e_l \lambda_l^\varrho \lambda_l^\sigma$ und $F^{\varrho\sigma}$ durch $\sum_0^3{}_{jh} e_j e_h F_{jh} \lambda_j^\varrho \lambda_h^\sigma$ ersetzt) erhalten wir die gewünschte Beintensorformel:

$$(35) \qquad \tau_{ik} = -\sum_0^3{}_l e_l F_{il} F_{kl} + \tfrac{1}{4} \delta_{ik} \sum_0^3{}_{jh} e_j e_h F_{jh}^2 .$$

6. Deutung des elektromagnetischen Tensors im Weltgitter. Rein geometrische Formulierung der Feldgleichungen.

Wir dürfen a priori durchaus willkürlich die sechs Beinkomponenten F_{ik} des elektromagnetischen Feldes mit irgendwelchen geometrischen Eigenschaften eines (daraus zu bestimmenden) Vierbeins des R_4 verknüpfen. Am einfachsten bewirkt man dies, indem man die F_{ik} proportional zu den entsprechenden Elementen eines (differentialen) schiefsymmetrischen lokalen Beintensors setzt, z. B. zu den durch die Gleichungen

$$(12)^* \qquad \xi_{ik} = \sum_0^3{}_l e_l \frac{d\gamma_{iki}}{ds_l}$$

oder

$$(15)^* \qquad \eta_{ik} = \sum_0^3{}_l e_l c_l (\gamma_{lik} - \gamma_{lki})$$

der Nr. 3 definierten differentialen Ausdrücken zweiter bzw. erster Ordnung.

Das zweckmäßigste ist, wie wir sehen werden, sich an die erste Wahl zu halten und dementsprechend

$$(A) \qquad F_{ik} = \upsilon \xi_{ik}$$

zu setzen, wo υ eine Konstante bedeuten soll.

Da die Riccischen Drehungskoeffizienten γ_{ikl} nichts anderes als Verhältnisse zwischen einem Winkel und einer Länge sind, so besitzen die ξ_{ik} Dimensionsformel l^{-2}. Dagegen verhalten sich die F_{ik} wie die Quadratwurzel einer Energiedichte. Folglich hat man

$$|F_{ik}| = l^{-\frac{1}{2}} t^{-1} m^{\frac{1}{2}}.$$

Der Proportionalitätsfaktor υ hat daher die Dimensionen

$$l^{\frac{3}{2}} t^{-1} m^{\frac{1}{2}}$$

einer elektrischen Ladung e und mag dementsprechend unter der Form

$$(36) \qquad \upsilon = \mathfrak{z} e$$

geschrieben werden, wo der Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{z}$ nunmehr eine reine Zahl ist. Übrigens ist es gleichfalls berechtigt, in (36), statt e, irgendeine andere Größe, welche dieselben Dimensionen besitzt, erscheinen zu lassen: z. B. kann man setzen

$$(36') \qquad \upsilon = \mathfrak{z}_1 \sqrt{hc},$$

wo h die Planncksche Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume und $\mathfrak{z}_1$ eine reine Zahl bezeichnen.

Die endgültigen geometrischen Gleichungen, die aus dem Maxwellschen System (34) und unserem Ansatz (A) entspringen, lauten demnach

$$(II) \qquad \mathrm{Div}\,\xi = \frac{1}{\upsilon}\mathbf{S}, \quad \mathrm{Div}^*\,\xi = 0,$$

wo unter ξ der lokale Beintensor (12)* zu verstehen ist. Schließlich ist also die geometrische Bestimmung des zum Felde gehörigen Vierbeins (Weltgitters) aus den beiden Systemen (I) und (II) zu entnehmen, die zusammen (anscheinend zwar 18, aber wesentlich nur) 16 Differentialgleichungen (zweiter bzw. dritter Ordnung) in den 16 Beinparametern λ_i^ν bilden.

7. Fall des leeren Raumes — Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes.

Im leeren Raume ($T_{ik} = 0$, $\mathbf{S} = 0$) reduziert sich (I) wegen (32) auf die Form

$$(I') \qquad G_{ik} - \tfrac{1}{2}\delta_{ik} G = -\varkappa \tau_{ik},$$

wo gemäß (35) und (A) das zweite Glied den Wert

$$(35') \qquad \tau_{ik} = -\upsilon^2 \sum_0^3{}_l e_l \xi_{il}\xi_{kl} + \tfrac{1}{4}\upsilon^2 \delta_{ik} \sum_0^3{}_{jh} e_j e_h \xi_{jh}^2$$

hat. Das System (II) wird seinerseits

$$(II') \qquad \mathrm{Div}\,\xi = 0, \qquad \mathrm{Div}^*\,\xi = 0.$$

Wenn nicht nur der äußere Energietensor T_{ik}, sondern auch das elektromagnetische Feld verschwindet, so sind nach dem fundamentalen Ansatze (A) auch die ξ_{ik}, und mithin wegen (35′) ebenfalls die τ_{ik} gleich Null. Geschieht das überall in der Raum-Zeit-Welt, so weiß man[1], daß die Gleichungen (I′), welche einfacher $G_{ik} = 0$ werden, notwendigerweise nach sich ziehen, daß die Metrik des Raumes euklidisch oder richtiger pseudoeuklidisch ist.

Was ist nun in diesem Grenzfalle die geometrische Bedeutung der Abwesenheit von elektromagnetischen Erscheinungen, d. h. der Gleichungen

$$(37) \qquad \xi_{ik} = 0\,?$$

[1] Vgl. Serini, Rend. Acc. Lincei, Vol. XXVII, 1918, S. 235—238.

Sie besagen einfach, daß das Weltgitter kartesisch oder richtiger pseudokartesisch ist.

Um den Beweis möglichst rasch geben zu können, werde ich nur Vierbeine betrachten, die unendlich kleine Abweichungen von einem pseudokartesischen Gitter aufweisen.

Wenn man speziell die x^ν als kartesische, sich gerade auf diesem Gitter beziehende Koordinaten auffaßt, so hat man für die Parameter des entsprechenden Vierbeins

$$\lambda_i'^\nu = \delta_{i\nu}.$$

Es seien λ_i^ν diejenigen irgendeines benachbarten Vierbeins. Da der Übergang von den $\lambda_i'^\nu$ zu den λ_i^ν einer infinitesimalen pseudoorthogonalen Transformation entspricht, so müssen nach (29) die λ_i^ν sich folgendermaßen ausdrücken lassen:

$$\lambda_i^\nu = \delta_{i\nu} + e_i \sum_k^{0\ \ 3} \beta_{ik}\delta_{k\nu} = \delta_{i\nu} + e_i\beta_{i\nu}, \tag{38}$$

wo die β_{ik} einen schiefsymmetrischen Beintensor bilden. Hieraus kann man die reziproken Elemente unmittelbar berechnen. In erster Annäherung findet man

$$e_i\lambda_{i|\nu} = \delta_{i\nu} + e_\nu\beta_{i\nu},$$

und folglich durch Multiplikation mit e_i

$$\lambda_{i|\nu} = \delta_{i\nu}e_i + e_ie_\nu\beta_{i\nu}. \tag{38'}$$

Andererseits, wenn man von unendlich kleinen Größen überhaupt absieht, reduzieren sich die Operatoren

$$\frac{d}{ds_l} = \sum_\nu^{0\ \ 3} \lambda_l^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

auf die einfache Form

$$\frac{\partial}{\partial x^l}$$

und die kovarianten Ableitungen auf die gewöhnlichen.

Die Definition (4) der Drehungsinvarianten γ gibt somit (bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung)

$$\gamma_{ikl} = e_ie_k\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial x^l},$$

und man bekommt weiter aus (12)*

$$\xi_{ik} = e_ie_k\sum_l^{0\ \ 3} e_l\frac{\partial^2\beta_{ik}}{(\partial x^l)^2}.$$

Der Differentialoperator $\sum_l^{0\ \ 3} e_l\frac{\partial^2\beta_{ik}}{(\partial x^l)^2}$ ist nichts anderes als der D'Alembertsche (oder Lorentzsche) $\Box$. Die Gleichungen (37) nehmen daher die Form an

$$\Box\beta_{ik} = 0, \tag{37'}$$

und unter passenden Anfangs- und Grenzbedingungen ergeben sie genau

$$\mathfrak{G}_{ik} = 0,$$

d. h. den kartesischen (richtiger pseudokartesischen) Charakter des Weltgitters. Ich glaube, daß gerade dieser Schluß unseren Ansatz (A) rechtfertigt. Hätten wir etwa

$$F_{ik} = \upsilon' \eta_{ik} \qquad (\upsilon' = \text{konst.})$$

mit den Ausdrücken (15)* der η_{ik} gesetzt, so würden wir nichts Befriedigendes bekommen haben.

Ein allgemeinerer Ansatz, wie z. B.

$$F_{ik} = \upsilon \xi_{ik} + \upsilon' \eta_{ik},$$

würde dagegen komplizierter, aber in logischer Hinsicht ebenso zulässig wie (A) sein. In erster Annäherung bekommt man sogar dasselbe, weil die η von höherer Ordnung als die ξ sind.

Ausgegeben am 23. April.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Correns sprach über Nichtmendelnde Vererbung. (Ersch. später.)

Faßt man als »mendelnde Vererbung« im weitesten Sinne alles das zusammen, wofür die Chromosomengarnituren und ihr Verhalten bei der Reduktionsteilung verantwortlich sind, so fragt es sich, ob das Plasma nur die Rolle einer vom Kern aus bewirkten Substanz spielt, oder ob es für die Ausbildung der Eigenschaften eine selbständige Bedeutung hat. Auszuschließen ist die direkte Übertragung von chemischen Stoffen und symbiontischen Organismen durch das Ei. Die Frage, ob die Plastiden, die in ihren Eigenschaften im allgemeinen ganz vom Kern abhängig sind, auch direkt mit dem Spermakern übertragen werden können, ist noch nicht restlos gelöst, sowenig wie die der Übertragung von Plasma auf diesem Wege.

Die Verschiedenheit der reziproken Bastarde A ♀ × B ♂ und B ♀ × A ♂ spricht nur dann für eine wirklich unabhängige Tätigkeit des Plasmas, wenn sie sich durch Generationen hindurch erhält. Dieser Forderung entsprechen nur wenige Versuchsreihen: Bastarde von *Lymantria* (Goldschmidt), *Habrobracon* (A. Kühn) auf zoologischem, von *Epilobium* (Lehmann und Renner), *Funariaceen* (Fr. von Wettstein) und bestimmte Fälle von Gynodioecie (Correns) auf botanischem Gebiet.

Von Ausschaltungsversuchen (bei denen der Kern in einem ihm fremden Plasma wirken soll) haben die Versuche mit Pilzen (Harder) ein teilweis positives — für Plasmawirkung sprechendes — Resultat gegeben; die, welche die Natur mit der haploiden Generation mendelnder Bastarde anstellt, bis jetzt ein negatives. Es läßt sich eine unabhängige Wirkung des Plasmas (eines Plasmons Fr. von Wettsteins) wohl annehmen; sie ist aber nicht durch dem Plasma eigene Gene bedingt und tritt nur an den Tag, wenn Bastarde zwischen Eltern vorliegen, die weit genug verschiedenes Plasma besitzen.

2. Hr. Einstein legte eine Arbeit vor über »Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip«.

Es wird gezeigt, daß die Feldgleichungen der auf Riemann-Metrik und Fernparallelismus aufgebauten einheitlichen Feldtheorie aus einem Hamilton-Prinzip abgeleitet werden können. Diese Methode hat gegenüber der von mir früher benutzten den Vorzug, daß sie Gleichungen liefert, deren Kompatibilität a priori gewährleistet ist.

3. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte die 2. Aufl. seiner »Erinnerungen 1848—1914« (Leipzig [1929]).

4. Hr. Engler übersandte Band 18a seines Werkes »Die natürlichen Pflanzenfamilien« (Leipzig 1928),

5. das korrespondierende Mitglied Hr. Mewaldt seine Schriften »Kulturkampf der Sophisten« (Tübingen 1928) und »Fundament des Staates« (Stuttgart 1929).

6. Vorgelegt wurden die 19. Lief. (Bd. II Lief. 5) des Rheinischen Wörterbuches, bearb. und herausgeg. von Josef Müller (Bonn 1929), und der Bericht über die Festsitzung der Deutschen Botanischen Gesellschaft aus Anlaß des 100. Geburtstages von Simon Schwendener (Sonderabdr. Berlin 1929).

Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip.

Von A. Einstein.

In einer vor kurzem erschienenen Abhandlung (diese Berichte 1929, I) habe ich ohne Zugrundelegung eines Variationsprinzips Feldgleichungen für eine einheitliche Feldtheorie aufgestellt. Die Berechtigung dieser Feldgleichungen ruht auf der Voraussetzung der Kompatibilität der 16 Feldgleichungen (10) a. a. O. Da es nicht gelang, zwischen diesen Gleichungen vier identische Relationen herzustellen, haben die HH. Lanczos und Müntz begründete Zweifel an der Zulässigkeit der dort gegebenen Feldgleichungen geäußert, ohne daß hierüber bisher eine klare Entscheidung vorläge. Unterdessen fand ich, daß es möglich ist, das Problem in völlig befriedigender Weise unter Zugrundelegung eines Hamilton-Prinzips zu lösen, wobei die Vereinbarkeit der Gleichungen miteinander von vornherein feststeht. Die in der früheren Arbeit abgeleiteten Identitäten sowie die dort gebrauchten Bezeichnungen werden hier benutzt bzw. übernommen.

§ 1. Allgemeines über das Hamiltonsche Prinzip, angewandt auf ein Kontinuum mit Riemann-Metrik und Fernparallelismus.

Es sei $\mathfrak{H}$ eine skalare Dichte, welche sich aus den $g_{\mu\nu}$ und $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ algebraisch ausdrückt. Dann gehören zu dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = 0, \tag{1}$$

in welchem nach den ${}^{s}h_{\nu}$ variiert wird, die Feldgleichungen

$$\mathfrak{G}^{\mu\alpha} = \mathfrak{H}^{\mu\alpha} - (\mathfrak{H}^{\mu\nu}_{\underline{\alpha}})_{/\nu} = 0, \tag{2}$$

wobei die Größen $\mathfrak{H}^{\mu\alpha}$ und $\mathfrak{H}^{\mu\nu}_{\alpha}$ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{\mu\nu}} \\ \mathfrak{H}^{\mu\nu}_{\alpha} &= \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

definiert sind. Dies folgt unmittelbar aus (1) mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = {}_{s}h^{\alpha}\,({}^{s}h_{\mu,\nu} - {}^{s}h_{\nu,\mu}), \tag{4}$$

wobei das Komma gewöhnliche Differentiation bedeutet.

Der Umstand, daß (1) von selbst erfüllt ist für solche (an den Grenzen verschwindende) Variationen der ${}^s h_\nu$, welche durch bloße infinitesimale Koordinaten-Transformation erzeugt werden können, führt wie in der bisherigen Relativitätstheorie zu einer Viereridentität:

$$D_\mu(\mathfrak{G}^{\mu\alpha}) = \mathfrak{H}^{\mu\alpha}{}_{/\mu} + \mathfrak{H}^{\mu\beta}\Lambda^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}\,\mu} \equiv 0\,. \tag{5}$$

D_μ ist dabei der in (5) angegebene divergenzartige Differentialoperator. Eine Identität vom Typus (5) gilt stets für eine Tensordichte $\mathfrak{G}^{\mu\alpha}$, welche HAMILTON-Derivierte aus einer skularen Dichte $\mathfrak{H}$ ist, die nur von den ${}^s h_\nu$ und deren Ableitungen abhängt.

§ 2. Besondere Wahl der HAMILTON-Funktion.

Die einfachste Wahl der HAMILTON-Funktion ist gekennzeichnet durch die Eigenschaft: $\mathfrak{H}$ ist vom zweiten Grade in den $\Lambda^\alpha_{\mu\nu}$. Dies kommt darauf hinaus, daß $\mathfrak{H}$ eine lineare Kombination der Größen

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}_1 &= h\,\Lambda^\alpha_{\mu\beta}\,\Lambda^{\underline{\beta}}_{\underline{\mu}\,\alpha}\\ \mathfrak{J}_2 &= h\,\Lambda^\alpha_{\mu\beta}\,\Lambda^{\underline{\alpha}}_{\underline{\mu}\,\underline{\beta}}\\ \mathfrak{J}_3 &= h\,\Lambda^\alpha_{\mu\alpha}\,\Lambda^{\underline{\beta}}_{\underline{\mu}\,\beta}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ist. Von allen möglichen linearen Kombinationen ist nun eine dadurch ausgezeichnet, daß die zugehörigen $\mathfrak{G}^{\mu\alpha}$ symmetrisch werden:

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{J}_1 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_3\,. \tag{7}$$

Der Beweis stützt sich auf die Symmetrie von $\mathfrak{H}^{\mu\alpha}$ sowie auf die in der früheren Arbeit abgeleitete Indentität

$$\mathfrak{V}^\alpha_{\mu\nu/\alpha} = [h(\Lambda^\alpha_{\mu\nu} + \phi_\nu\delta^\alpha_\mu - \phi_\mu\delta^\alpha_\nu)]_{/\alpha} \equiv 0\,. \tag{8}$$

Durch Variation ergeben sich 10 Gleichungen

$$\mathfrak{G}^{\mu\alpha} = 0\,, \tag{9}$$

welche in erster Näherung mit den auf die RIEMANNsche Geometrie gegründeten Gleichungen des Gravitationsfeldes übereinstimmen.

Die fehlenden Feldgleichungen erhält man, indem man statt der in (7) gewählten HAMILTONschen Funktion eine von ihr nur unendlich wenig verschiedene lineare Kombination $\overline{\mathfrak{H}}$ der $\mathfrak{J}$ wählt. Der Übersichtlichkeit halber drücken wir diese so aus:

$$\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} + \varepsilon_1\mathfrak{H}^* + \varepsilon_2\mathfrak{H}^{**}\,, \tag{10}$$

wobei

$$\mathfrak{H}^* = \tfrac{1}{2}\mathfrak{J}_1 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{J}_2 \tag{11}$$

$$\mathfrak{H}^{**} = \mathfrak{J}_3\,. \tag{12}$$

Durch Ausrechnen ergibt sich

$$\mathfrak{H}^* = -\frac{1}{12}\,h\,S^{\underline{\alpha}}_{\mu\nu}\,S^{\alpha}_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}}\,, \tag{11a}$$

wobei gesetzt ist

$$S_{\mu\nu}^{\alpha} = \Lambda_{\mu\nu}^{\alpha} + \Lambda_{\alpha\mu}^{\nu} + \Lambda_{\nu\alpha}^{\mu}, \tag{13}$$

welche Größe in allen drei Indices antisymmetrisch ist. Durch Ausführung der Variation von $\mathfrak{H}$ und Spaltung der so erlangten Tensorgleichung in den symmetrischen und antisymmetrischen Bestandteil erhält man neben (9) die Gleichungen

$$(\mathfrak{G}^{*\mu\alpha} - \mathfrak{G}^{*\alpha\mu}) + \sigma(\mathfrak{G}^{**\mu\alpha} - \mathfrak{G}^{**\alpha\mu}) = 0, \tag{14}$$

wobei σ das Verhältnis der unendlich kleinen Größen ε_2 und ε_1 bedeutet. Diese Gleichungen können auch in der Form geschrieben werden

$$(\mathfrak{H}^{*\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{*\alpha\nu}_{\underline{\mu}})_{/\nu} + \sigma(\mathfrak{H}^{**\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{**\alpha\nu}_{\underline{\mu}})_{/\nu} = 0. \tag{14a}$$

Man erhält durch Ausrechnung

$$\mathfrak{H}^{*\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{*\alpha\nu}_{\underline{\mu}} = -hS^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = -\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} \tag{15}$$

$$\mathfrak{H}^{**\mu\nu}_{\underline{\alpha}} - \mathfrak{H}^{**\alpha\nu}_{\underline{\mu}} = h(\phi^{\mu} g^{\alpha\nu} - \phi^{\alpha} g^{\mu\nu}) \tag{16}$$

und nach Ausführung der Operation $_{/\nu}$ aus (14a)

$$\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}/\nu} - \sigma[h(\phi_{\underline{\mu};\underline{\alpha}} - \phi_{\underline{\alpha};\underline{\mu}})] = 0 \tag{17}$$

oder nach Einführung der kontravarianten Tensordichte $\mathfrak{f}^{\mu\alpha}$

$$\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}/\nu} - \sigma\mathfrak{f}^{\mu\alpha} = 0. \tag{17a}$$

Man sieht sogleich, daß diese Gleichungen in erster Näherung die Maxwellsche Theorie enthalten. Denn erstens ist die Abhängigkeit der »Feldstärken« $\mathfrak{f}^{\mu\nu}$ von den »Potentialen« ϕ_{μ} in erster Näherung dieselbe wie bei Maxwell. Zweitens ergibt — da das Symbol $_{/\nu}$ in erster Näherung gewöhnlicher Differentiation bedeutet — die Differentiation nach α wegen der Antisymmetrie von $\mathfrak{S}$ das Verschwinden von $\mathfrak{f}^{\mu\alpha}{}_{/\alpha}$.

Um jedoch der Existenz elektrischer Ladungen gerecht zu werden, ist es nötig, zu dem Grenzfalle $\sigma = 0$ überzugehen.

§ 3. Der Grenzfall $\sigma = 0$.

Für die Durchführung des ins Auge gefaßten Grenzüberganges bedarf es noch einer Vorbereitung. Es läßt sich $\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}$ in der Form schreiben

$$\mathfrak{G}^{*\mu\alpha} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}/\nu} + \mathfrak{H}^{*\mu\alpha}. \tag{18}$$

Aus (3) und (11a) geht hervor, daß $\mathfrak{H}^{*\mu\alpha}$ quadratisch und homogen von den $S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}$ abhängt. Ferner erfüllt $\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}$ die Identität

$$D_{\mu}(\mathfrak{G}^{*\mu\alpha}) \equiv 0. \tag{5a}$$

Nun liefert der Grenzübergang zu $\sigma = 0$ gemäß (17a) unmittelbar die Relation

$$\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}/\nu} = 0. \tag{19}$$

Diese 6 Gleichungen haben — abgesehen von besonderen Fällen — das Verschwinden der 4 Größen $\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}$ zur Folge. Ich nehme im folgenden überdies an, daß bei dem Übergang zu $\sigma = 0$ die Größen $\mathfrak{S}^{\alpha}_{\mu\nu}$ proportional mit σ zu Null herabsinken, wofür ich einen Beweis bisher nicht habe erbringen können.

Wenn man $\mathfrak{S}^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}/\nu}$ aus (18) und (17a) eliminiert, so erhält man die Gleichung

$$2\left[\mathfrak{G}^{*\mu\alpha} - \mathfrak{H}^{*\mu\alpha}\right] - \sigma\,\mathfrak{f}^{\mu\alpha} = 0,$$

oder nach Ausführung der Operation D_μ wegen (5a)

$$D_\mu\left(\tilde{\mathfrak{f}}^{\mu\alpha} + 2\,\frac{\mathfrak{H}^{*\mu\alpha}}{\sigma}\right) = 0\,. \tag{20}$$

Bei dem Grenzübergang zu $\sigma = 0$ verschwindet das zweite Glied, dessen Zähler wie $(\mathfrak{S}^{\alpha}_{\mu\nu})^2$, d. h. nach unserer obigen Annahme wie σ^2 zu Null herabsinkt, so daß man erhält

$$D_\mu\,(\tilde{\mathfrak{f}}^{\mu\alpha}) = 0\,, \tag{21}$$

welche Gleichung neben

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = 0 \tag{22}$$

das Ergebnis des Grenzüberganges bildet.

Als Endergebnis dieser Untersuchung ist also die Kombination der Gleichungssysteme (9), (21) und (22) anzusehen, wobei die Ableitung für (21) nicht völlig streng ist.

Es sei noch bemerkt, daß die Gleichungen (22) es mit sich bringen, daß an die Stelle der HAMILTONschen Funktion (7) für die Gleichungen (9) ebensogut die HAMILTON-Funktion

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_3 \tag{7a}$$

treten kann.

Ausgegeben am 23. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XI

Library of Congress
AUG 7 1929
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 11. April. (S. 161)

HABER: Über die Rolle der Elektrizitätsträger bei der Explosion brennbarer Gase im Gemische mit Luft. (S. 162)

G. D. BIRKHOFF: Divergente Reihen und singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen. (Mitteilung vom 31. Januar.) (S. 171)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

XI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 11. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Haber sprach über die Rolle der Elektrizitätsträger bei der Explosion brennbarer Gase im Gemische mit Luft.

Der Vortragende erörtert auf Grund von Untersuchungen, die in Gemeinschaft mit Hrn. Sasaki und Hrn. Quasebarth ausgeführt sind, das Erlöschen von Explosionsflammen beim Durchgang durch geladene Kondensatoren und zeigt, daß das Leitvermögen in Explosionszonen vorzugsweise von der Anwesenheit des Radikals CC und evtl. CH sich herschreibt. Die Energiequelle für die Spaltung in geladene Anteile ist in dem Stoß von Primärteilchen gelegen, die beim Verbrennungsvorgang gebildet werden.

Über die Rolle der Elektrizitätsträger bei der Explosion brennbarer Gase im Gemische mit Luft.

Von F. Haber.

Die folgenden Angaben stellen in Kürze Ergebnisse von Untersuchungen dar, die ich in den letzten Jahren zuerst mit Hrn. N. Sasaki begonnen und danach mit Hrn. K. Quasebarth weitergeführt habe. Ihre ausführliche Mitteilung erfolgt an anderer Stelle.

Die Frage, ob der Ionisationsvorgang in Explosionsflammen einen wesentlichen Zusammenhang mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung hat, ist alten Datums[1]. Sie ist neuerdings von Malinowski[2] aufgenommen worden, der die Explosion von Knallgasmischungen mit Benzin, Wasserstoff und Äther als Brennstoff durch einen Kondensator hindurchschlagen ließ, den zwei konzentrische Metallröhren bildeten. Die Flammen gingen stets durch den 2.5 mm weiten Ringkanal hindurch, wenn an seine Wände keine Spannungsdifferenz gelegt war. Erhebliche Ladung (900 Volt) des Ringkondensators ließ die Benzinluftflamme fast in allen Fällen erlöschen. Messung des Stromes, der beim Durchschlag der Explosionsflamme den Ringkondensator passierte, zeigte von 100 Volt angelegter Spannung aufwärts eine (unvollkommene) Sättigung. Malinowski versteht den Vorgang so, daß jedes Benzolmolekül bei der Verbrennung in zwei entgegengesetzt geladene Spaltstücke dissoziiert wird, deren Rekombination den Fortschritt der Explosion unterhält. Unter dieser Voraussetzung errechnet er aus dem Sättigungsstrom im Ringkondensator den Bruchteil der in die Flamme gelangenden Benzinmoleküle, dessen geladene Spaltstücke durch den Sättigungsstrom an die Elektroden abgeführt wird, zu höchstens $3.6 \cdot 10^{-5}$.

Nach den Versuchen, die wir angestellt haben, sind die Zusammenhänge wesentlich andere.

Zunächst ist zu beachten, daß sich die Explosionsflamme, die durch einen Kondensator hindurchschlägt, durch angelegte Gleichspannung nur dann beeinflussen läßt, wenn das verbrennende Gasgemisch besonders gut leitet. Die Beeinflussung ist nicht eine allgemeine Eigenschaft der Flammen, sondern ein spezieller Fall. In diesem Falle aber erfolgt im geladenen Kondensator gleichzeitig eine bedeutende Gestaltsänderung der Explosionszone.

[1] Vgl. F. Haber, Z. f. physical. Chem. **68**, 726 (1910).
[2] A.-E. Malinowski, Journ. de chimie physique. **21**, 469 (1924).

Die in der Explosionsflamme auftretenden Ladungsträger entstammen sämtlich dem Gas, da die Wände kalt sind. Soweit sie negative Ladungen haben, sind es Elektronen. Die positiven Ladungsträger sind die vergleichsweise sehr viel schwerer beweglichen Ionen. Infolgedessen entspricht die Feldverteilung zwischen den Kondensatorplatten den Rechnungen, die J. J. Thomson[1] für den Fall angegeben hat, daß die Ladungsträger der einen Art die der anderen Art an Beweglichkeit weit übertreffen. Die Feldstärke wird in der Nähe der negativ geladenen Kondensatorplatte außerordentlich groß und geht weit über den an der positiven Platte herrschenden Wert hinaus. Die Ionenreibung an den ungeladenen Bestandteilen der Flammengase liefert einen Chattocschen Druck derselben gegen die negative Elektrode. Die dadurch bedingte Gasstauung an der negativ geladenen Kondensatorwand setzt längs derselben die Zuströmung des Frischgases herab. Die Gestalt der Flamme wird dadurch unsymmetrisch. Die Veränderung in der Nachbarschaft der po-

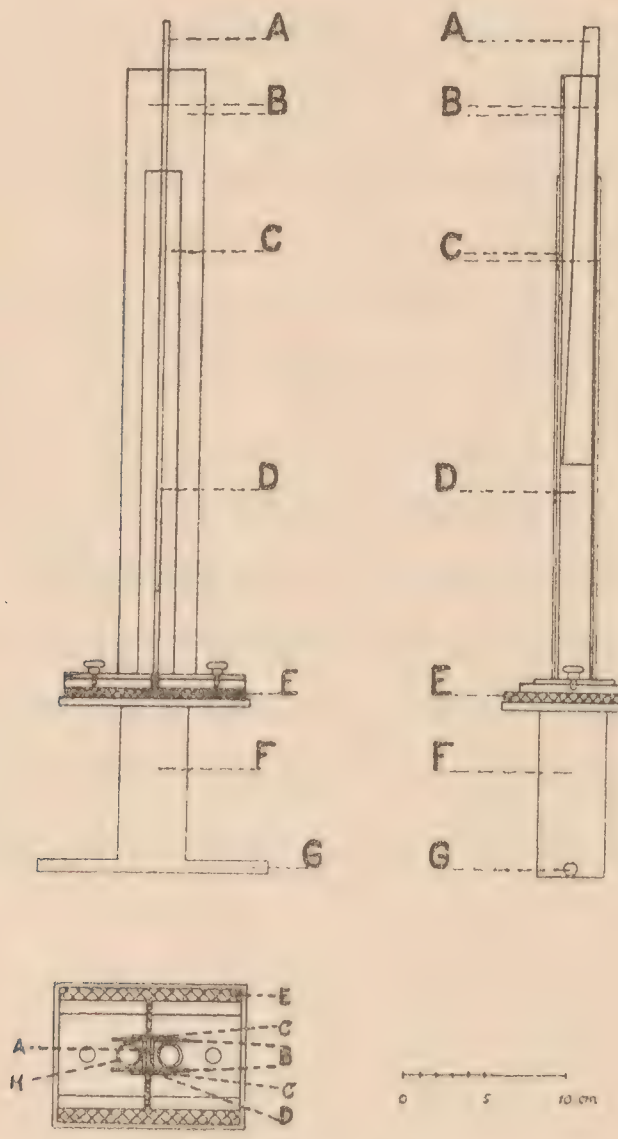


Fig. 1.

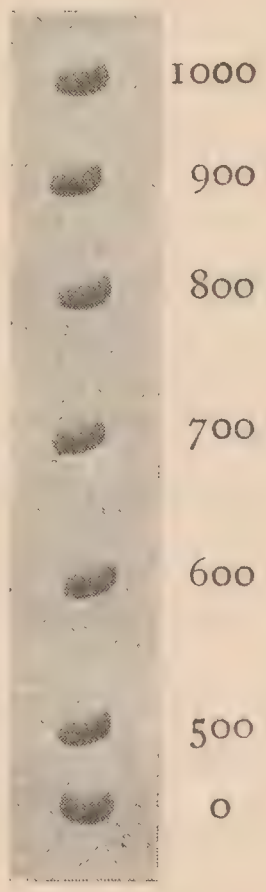


Fig. 2.

sitiv geladenen Kondensatorwand ist gering. In der Nähe der anderen Elektrode aber, wo die Zuströmung des Frischgases nachläßt, verkümmert das brennende Horn, das im ungeladenen Kondensator sich in der Nähe beider Metallwände gleich gut ausbildet (siehe die Bilder Fig. 2 von stehenden Explosionsflammen aus Benzoldampf und Luft bei Anlegung der nebengeschriebenen Gleichspannungen in Volt [Kathode links] in dem Apparat Fig. 1).

Für die Beobachtung mit dem Auge ist es zweckmäßig, als Kondensator ein rechteckiges Rohr zu benutzen, dessen Breitseiten B (etwa $2^1/_2$ cm) aus Metall, und dessen Schmalseiten C (etwa 2.5 mm) aus Glas oder Quarz hergestellt sind. Zweckmäßig heizt man (mittels der isolierten Spulen H) die

[1] J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases, III. edition Bd. I, Cambridge 1928.

metallenen Breitseiten auf ein wenig über 100°, damit kein Verbrennungswasser sich niederschlagen und bei angelegter Spannung eine Nebenleitung zum Flammenstrom abgeben kann. Gibt man dem Kondensator durch Einschieben einer Glasplatte oder für heißere Flammen einer Quarzplatte A einen keilförmigen Querschnitt, so entsteht die in der Figur 1 dargestellte Anordnung (G Gaszufuhr, F Hohlraum, E Isolation, D freier Querschnitt).

Entzündet man bei Benutzung dieses keilförmigen Kondensators das mit passender Geschwindigkeit zugeführte Gasgemisch auf der Austrittseite, also oben, so schlägt die Flamme in den keilförmigen Raum des Kondensators hinein und setzt sich dort fest, wo die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung der Strömungsgeschwindigkeit entgegengesetzt gleich ist. Wird Gleichspannung an den Kondensator gelegt, so setzt sich die Flamme, wenn sie gut leitend ist, auf einem deutlich größeren Querschnitt fest. Gleichzeitig sieht man in diesem Falle die Deformation, die die Flamme in der Nähe der negativ geladenen Metallplatte erfährt, und die in Fig. 2 für verschiedene angelegte Spannungen photographisch wiedergegeben ist. Legt man an den Kondensator von rechteckigem Querschnitt ein Gleichfeld, so beobachtet man bei bedeutendem Leitvermögen der Flammengase Verlängerung der Durchschlagszeit und unter Umständen Verlöschen der Flamme.

Die beobachtenden Erscheinungen sind unabhängig davon, ob man die Ausströmungsöffnung des Kondensators nach aufwärts, nach abwärts oder in eine mittlere Richtung stellt.

Bezeichnet man mit l die Länge des Kondensators, gemessen von der Eintrittstelle des Frischgases, und mit r den senkrechten Abstand eines willkürlich gewählten Punktes von der positiv geladenen Kondensatorplatte, so ist die Tangente ϑ an die Flammenfront, die deren Verlauf von Punkt zu Punkt kennzeichnet, durch die örtliche Zuströmungsgeschwindigkeit v des Frischgases und durch die örtliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit u der Entzündung nach der Gouye-Michelsonschen Formel

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{dl}{dr} = \pm \sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}$$

gegeben. Bei ungeladenem Kondensator liegt die Stelle, an welcher die Wurzelgröße 0 und damit $v = u$ wird, in der Mitte zwischen den beiden Kondensatorplatten. Bei Anlegung eines Gleichfeldes liegt sie näher an der negativen Platte. Der Unterschied ist besonders bei den Bildern (Fig. 2) ausgeprägt, die die Flamme unter einer angelegten Spannung von 500 bis 600 Volt zeigen. In diesem Falle erreicht die Neigung der Flammenfront in der Mitte zwischen beiden Kondensatorplatten rund 11°, entsprechend einem Verhältnisse $v/u = 1.02$.

Die im rechteckigen Rohr beobachtete Verzögerung des Durchschlages bei angelegter Spannung macht im Höchstfall soviel aus, als ob man ohne angelegtes Gleichfeld ein anderes Gasgemisch aus den gleichen Bestandteilen benutzte, bei dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung nahezu 20 Prozent geringer ist. Nun liegen vielfältige Erfahrungen über die Explosionsgrenzen und deren Einengung beim Übergang von weiteren zu engeren Gefäßen

vor. Aus ihnen entnehmen wir, daß bei zwei Gemischen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung einen Unterschied von 20 Prozent aufweist, das schneller brennende sehr wohl eine Explosionsflamme geben kann, die ein bestimmtes enges kaltes Rohr durchläuft, während die Flamme des anderen darin erlischt. Was wir beim ungeladenen Kondensator durch Änderung des Gemisches erreichen, erzielen wir mit ein und demselben Gemische durch den Übergang vom ungeladenen Kondensator zum stark geladenen.

Im keilförmigen Kondensator spricht sich derselbe Sachverhalt durch die Verlagerung der Flamme nach der Stelle eines größeren Querschnitts aus.

Indessen ist der Sachverhalt wegen der zuvor erläuterten Deformation der Flammenfront, die in der Figur 2 anschaulich gemacht ist, schwer völlig zu durchschauen. Man übersieht nicht, welchen Anteil an der beobachteten langsameren Verbrennung die Abführung von Ladungsträgern unmittelbar bedingt, und welcher Anteil der Erscheinung von der Deformation der Flammenfront und der darin zum Ausdruck kommenden Änderung der Strömungsverhältnisse des Gases im Kondensator herrührt.

Um diese Einflüsse zu trennen, ist statt des Gleichfeldes ein hochfrequentes Wechselfeld benutzt worden. Bei einer Million Perioden in der Sekunde bleiben die positiven Ionen praktisch stehen, während die Elektronen bei dem Abstand der Kondensatorplatten von rund 2.5 mm praktisch vollständig abgeführt werden. Dementsprechend verschwindet in einem solchen Wechselfeld die Deformation. Die Erscheinungen im Gleichfeld und in einem solchen Wechselfeld wurden bei denselben elektrostatisch gemessenen Werten der angelegten Spannung mit Benzolluftmischungen verfolgt. Im rechteckigen Kondensator ergab sich bei Benzolgehalten von 2.76 Prozent bis 3.53 Prozent bei einer angelegten Spannung von rund 900 Volt und einem Plattenabstand von 2 mm bis 3 mm im Kondensator die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung, berechnet aus Durchschlagszeit und Zuflußgeschwindigkeit des Gases, im Gleichfeld rund 17 Prozent herabgesetzt, im Wechselfeld aber nur halb so stark vermindert. Im keilförmigen Kondensator ergaben sich ähnliche Unterschiede aus der Verlagerung der Flamme. In der Nähe der unteren Explosionsgrenze, also bei Benzolgehalten unter 2.725 Prozent, ist die Ionisation und die Änderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit geringer, und zwar sowohl im Gleichfeld als in dem beschriebenen Wechselfeld. Dabei bleibt der Einfluß des Gleichfeldes erheblich größer als der des Wechselfeldes. Nur die Erscheinungen im Wechselfeld können mit Bestimmtheit als unmittelbare Wirkungen der Änderungen des Ionisationszustands der Explosionszone auf die Fortpflanzung der Verbrennung betrachtet werden. Diese Effekte machen bei den Benzolluftflammen im günstigsten Fall noch nicht 10 Prozent von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus. Der günstigste Fall ist an der oberen Explosionsgrenze gegeben.

Welches sind nun die günstigen und welches die ungünstigen Fälle, wenn man die Betrachtung nicht nur auf Benzolluftmischungen beschränkt. Hier empfiehlt sich eine theoretische Überlegung bezüglich des Zustandekommens der Ionisation. Man wird in ihr stets eine monomolekulare wärmeverbrauchende Reaktion zu erblicken haben, deren Verlauf bei ausreichender Zeit zum thermodynamischen Gleichgewicht führt. Dieses Gleichgewicht haben Wilson und

Noyes[1] nach dem Vorgang von Saha mit Hilfe des Nernstschen Wärmesatzes behandelt. Aber ihre Erörterung bezieht sich nicht auf die sehr dünne Explosionszone, sondern auf die eigentliche Flamme, d. h. auf die heiße Gasmasse, die aus der Explosionszone hervorgeht und in den üblichen Fällen, bei denen das Frischgas einen Brennstoffüberschuß hat, den Raum zwischen Innen- und Außenkegel erfüllt. In diesem Falle ist verhältnismäßig viel Zeit für den Reaktionsverlauf vorhanden[2]. Anders in der Explosionszone, die wahrscheinlich[3] nicht dicker als $1 \cdot 10^{-2}$ cm ist und bei einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung von rund 50 cm/Sek. gemessen am kalten Frischgas, also rund 350 cm/Sek. gemessen am heißen Flammengas, in etwa $3 \cdot 10^{-5}$ Sek. durchströmt wird. In dieser kurzen Zeit erfolgen kaum mehr als 10^4 gaskinetische Stöße auf ein durch die Explosionszone hindurchgehendes Molekül. Bei dieser geringen Stoßzahl ist die Wahrscheinlichkeit dafür gering, daß das herausgegriffene Molekül beim Durchgange einen Stoßpartner findet, dessen thermische Energie zur Hergabe der Ionisierungsarbeit genügt. Drücken wir diese Ionisierungsarbeit im elektrischen Maß durch die Ionisierungsspannung J (in Volt) aus, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Begegnung mit einem solchen an thermischer Energie genügend reichen Stoßpartner beim einzelnen Stoß in erster Näherung $10^{-\frac{5050\,J}{T}}$ und bei 10^4 Stößen $10^{4-\frac{5050\,J}{T}}$. Nun besitzt unter den Bestandteilen des Frischgases (Benzol, Sauerstoff, Stickstoff) und denen des Abgases (Kohlensäure, Wasserdampf, Sauerstoff bzw. bei Brennstoffüberschuß Kohlensäure, Kohlenoxyd, Wasserstoff, Wasserdampf, Stickstoff) nur das Benzol eine leidlich niedrige Ionisierungsspannung. Aber sie macht nach den Angaben der Literatur noch immer 9.6 Volt aus. Bei allen anderen genannten Gasen ist der Wert weit über 10 Volt[4]. Rechnen wir mit dem kleinsten Werte von 9.6 Volt und mit einer absoluten Temperatur T von 2200°, so wird die obige Wahrscheinlichkeit 10^{-18} werden. Dies aber genügt weder zum Verständnis der beobachteten Sättigungsströme, noch zur Erreichung des Dissoziationsgleichgewichtes nach Nernst, Saha, Wilson und Noyes[5]. Wir müssen also nach einer von der Wärme verschiedenen Energiequelle für die Ionisation suchen. Eine solche bietet sich in dem Stoß von Primärprodukten der chemischen Reaktion, die noch mit der beim Reaktionsvorgang in Freiheit gesetzten Energie beladen sind und dieselbe beim Zusammenstoß mit relativ leicht ionisierbaren Molekülen unter elektrischer Spaltung der letzteren abgeben. Dies führt zu der Anschauung, daß die elektrische Dissoziation in der Explosionszone aus der chemischen Energie des

[1] A. Noyes und H. A. Wilson, Astrophys. Journ. **57**, 20 (1923). Journ. Americ. Chem. Soc. **44**, 2806 (1922).

[2] Zugleich sind leicht ionisierbare Metalldämpfe zugegen.

[3] F. Haber, Zeitschr. f. physical. Chem. **68**, 728 unten (1910).

[4] Man vgl. die Tabelle bei J. Franck und P. Jordan, Anregung von Quantensprüngen durch Stöße, Berlin, Springer 1926, Seite 286. Die Ionisierungsspannung der aus dem Innenkegel hervorgehenden Gase liegt so hoch, daß das Dissoziationsgleichgewicht auch in dem Raum zwischen Innenkegel und Außenkegel in der salzfreien Flamme auf thermischem Wege nicht aus undissoziierten Molekülen hergestellt werden würde.

[5] Die Anzahl der vom Sättigungsstrom abgeführten Ladungen pro Grammolekül verbrannten Benzols entspricht 0.4 bis 1 Coulomb, also $0.4 \cdot 10^{-5}$ bis $1 \cdot 10^{-5}$ Molen ionisierter Substanz.

Verbrennungsvorganges mit Hilfe der Stöße bestritten wird, die Primärprodukte der Reaktion auf ionisierbare Gasbestandteile üben. Dies ist derselbe Mechanismus, den Zisch und ich[1] vor einigen Jahren als Quelle des Auftretens der *D*-Linien bei der Einwirkung von Chlorgas auf Natriumdampf dargetan haben.

Man versteht nunmehr zwei Eigentümlichkeiten der Erscheinung. Erstlich wird verständlich, daß in unserem keilförmigen Rohr ein echter Sättigungsstrom zu erhalten ist, der bei Steigerung der Spannung um viele hundert Volt vollständig konstant bleibt. Bestände thermodynamisches Gleichgewicht zwischen geladenen Spaltstücken und einem undissoziierten Anteile, so könnte dies nur bei praktisch vollständiger elektrischer Dissoziation der Fall sein[2]. Bei dem hohen Werte der Ionisierungsspannungen ist aber eine solche praktisch vollständige elektrische Dissoziation für die Temperatur der Benzolluftflamme nur bei einem ganz winzigen Partialdruck des dissoziierbaren Gebildes und demzufolge bei ungeheuer kleinen Gleichgewichtskonzentrationen an geladenen Spaltstücken möglich, mit deren Hilfe sich die beobachteten Sättigungsströme nicht verstehen lassen. Der andere Punkt, der durch die gekennzeichnete Auffassung verständlich wird, ist, daß die Leitfähigkeit der Explosionszone wie bekannt weit größer ist als die der gleich heißen daraus hervorgehenden Gase. Mit der Beendigung des Verbrennungsvorganges hören die energiereichen Primärteilchen auf, welche die Dissoziation bedingen.

Indessen ist der Gegenstand damit noch nicht erledigt. Es bereitet uns eine Verlegenheit, Elementarprozesse beim Verbrennungsvorgang namhaft zu machen, die unter Entbindung von 222 k cal (9.6 Volt) und darüber verlaufen. Vollends willkürlich aber ist es, solche Elementarprozesse den gutleitenden Explosionszonen in großer Zahl zuzuschreiben und sie dort in Abrede zu stellen, wo die Ionisation gering bleibt. Dies führt zu dem Gedanken, daß in der Explosionszone Substanzen eine vorübergehende Existenz besitzen, die weder im Frischgas noch im Abgas auftreten und diesen Substanzen die Eigenschaft leichter Ionisierbarkeit beizulegen. Nun kennen wir in der Tat drei solche Substanzen auf Grund der spektralen Untersuchungen der Flammen. Es sind dies die Radikale OH, CH und CC. Sie liefern drei bekannte Emissionsspektren, die unter den Namen Wasserdampfspektrum, Spektrum verbrennender Kohlenwasserstoffe und Swanspektrum bekannt und genau untersucht sind. Näheres darüber ist im Vorjahre mitgeteilt worden[3]. Durch die Wahl des brennbaren Gases können wir es nun so einrichten, daß wir entweder alle drei Radikale in der Explosionszone mit Hilfe des Spektroskopes erkennen, oder daß ein oder das andere derselben nicht auftritt. Bestimmen wir gleichzeitig das Leitvermögen solcher Flammen, so lassen sich Schlüsse auf die Bedeutung dieser Radikale für die elektrische Dissoziation in der Explosionsflamme ziehen.

Wir können nun zunächst das Auftreten der Radikale CC und CH vermeiden, indem wir Wasserstoff oder ein Gemisch von Wasserstoff und Kohlen-

---

[1] F. Haber und W. Zisch, Zeitschr. f. Physik **9**, 302 (1922).

[2] Anderenfalls werden Ionen in dem Maße aus undissoziierten Anteilen nachgebildet, in welchem geladene Anteile abgeführt werden.

[3] K. F. Bonhoeffer und F. Haber, Zeitschr. f. physical. Chem. Abt. A. **137**, 263 (1928).

oxyd als brennbaren Bestandteil wählen und die Verbrennung mit Luft in unserem keilförmigen Kondensator vornehmen. Mit Wasserstoff bereitet es Schwierigkeit, das Verhältnis von Luft zu brennbarem Gas bei dieser Art der Verbrennung weitgehend zu variieren. Mit einem Gemisch von Kohlenoxyd und Wasserstoff ist dies hingegen leicht. Es zeigt sich dann, daß die Leitfähigkeit unter vergleichbaren Verhältnissen tausende von Malen kleiner ist, als wenn außer dem Hydroxyl auch die kohlenstoffhaltigen Radikale im Spektrum der Flamme auftreten. Denselben Versuch kann man mit dem gleichen Ergebnis hinsichtlich der Leitfähigkeit ausführen, indem man Cyan mit einer passenden Sauerstoff-Stickstoff-Mischung so verbrennt, daß nur die Cyanbanden erscheinen. Derartig schlecht leitende Explosionsflammen werden in dem rechteckigen Kondensator durch angelegte Spannung nicht verzögert und nicht zum Verlöschen gebracht. Sie liefern ein deutliches Zeugnis, daß — in diesen Fällen wenigstens — von einer reaktionsvermittelnden Wirkung geladener Teile keine Rede sein kann.

Das bedeutende Leitvermögen und die damit verknüpften Erscheinungen hängen an der Gegenwart der kohlenstoffhaltigen Radikale (CC bzw. CH) in der Explosionszone.

Schwieriger ist die Entscheidung, ob die beiden Radikale CC und CH oder nur eines derselben für das Leitvermögen der Explosionszone haftbar zu machen sind. Indessen kann man feststellen, daß bei der Verbrennung des Methans mit Luft, bei welcher im Spektrum das Radikal CC gegenüber dem Radikal CH außerordentlich in den Hintergrund tritt, das Leitvermögen unter vergleichbaren Bedingungen etwa auf $^1/_4$ zurückgeht. Noch drastischer zeigt sich eine Vorzugsstellung des Radikals CC, wenn man Benzol einmal mit einem Überschuß von Luft und das andere Mal mit einem Überschuß von Sauerstoff verbrennt, und zwar so, daß der Prozentgehalt des Benzols in beiden Fällen derselbe ist. Man hat in diesem Falle z. B. 2.3 Prozent Benzol neben 97.7 Prozent Sauerstoff oder einem gleichen Prozentgehalt Luft. Die 2.3 Prozent Benzol verlangen stöchiometrisch zur vollständigen Verbrennung 17.25 Prozent Sauerstoff, während in der Benzolluftmischung 20.5 Prozent und in der Benzolsauerstoffmischung 97.7 Prozent enthalten sind. Wegen der fast gleichen spezifischen Wärmen von Stickstoff und Sauerstoff muß die Temperatur in beiden Fällen praktisch die gleiche sein. Von den beiden Flammen zeigt die Luftflamme neben der CH-Bande die CC-Bande photographisch mit erheblicher Intensität. Die Sauerstoffflamme aber tut dies nicht, sondern liefert bei gleicher Expositionszeit noch keine Andeutung des Swanspektrums. Gleichzeitig beobachtet man bei der Luftflamme ein Leitvermögen, welches mehrere Male größer ist als das Leitvermögen der Sauerstoffflamme.

Es ist schwer, eine andere Deutung für diese Beobachtungen zu geben, als daß die Radikale die Quelle der hohen Ionisation in der Explosionszone sind, und daß ihre Ionisierungsspannungen die Reihenfolge ihrer Anregungsspannungen besitzen. Die Anregungsspannung für CC beträgt 2.4 Volt und ist die niedrigste. Die Anregungsspannung für CH beträgt 2.85 bzw. 3.16 Volt und die Anregungsspannung für OH beträgt 4.5 Volt und ist die höchste.

Diese Anregungsenergien sind wesentlich kleiner als die entsprechenden Werte für Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenoxyd, Wasserstoff, Wasserdampf, Kohlensäure und alle untersuchten gasförmigen Kohlenwasserstoffe. Bei dem leichtest anregbaren der drei Radikale, dem CC, macht der Unterschied durchweg mehr als $3^1/_2$ Volt aus. Es liegt nahe, zu folgern, daß auch die Ionisierungsspannung des Radikals CC und wohl auch die des Radikals CH niedriger als die der verglichenen anderen Flammengase sein wird. Damit aber schwindet die Schwierigkeit, daß Elementarprozesse, die 9.6 Volt und mehr Energie liefern, sich nicht leicht angeben lassen, denn es bedarf so hoher Energien nunmehr für die Ionisation nicht mehr. Immerhin wird die chemische Energie solcher Elementarprozesse, die nicht leicht über $6^1/_2$ Volt hinausgeht[1], vielleicht nicht vollständig zur Ionisierung zureichen. Hierüber können wir uns ein Urteil verschaffen, indem wir den Temperaturkoeffizienten des Sättigungsstromes bestimmen. Wir haben das so ausgeführt, daß wir Benzolsauerstoffmischung als Frischgas einmal mit gewöhnlicher Temperatur und das andere Mal um rund 200° vorgeheizt zur Verbrennung gebracht haben. In unserem keilförmigen Kondensator ließ sich das aus technischen Gründen nicht gut ausführen. Wir benutzten den bekannten Flammenspalter mit einem kreisförmigen Metallrohr als Brennermündung und legten die benutzte Spannung einerseits an dieses Metallrohr und andererseits an ein wasserdurchflossenes Metallrohr, welches horizontal durch die Spitze des Innenkegels geführt war. Das Ergebnis war qualitativ dasselbe, welches S. G. LUSBY[2] anscheinend mit Leuchtgas als Brennstoff erhalten hat. Der Sättigungsstrom wuchs in unserem Falle mit der Temperatur für 200° ungefähr um 130 Prozent. Berechnet man aus diesem Zuwachs den Wärmeverbrauch des Vorgangs, so ergibt sich, ausgedrückt in elektrischem Maß, der Wert von rund 2 Volt. Dies darf als die Anleihe betrachtet werden, die zur Deckung der Ionisierungsenergie bei der Flammenwärme gemacht wird, so daß die zur Spaltung der kohlenstoffhaltigen Radikale in Elektronen und positive Ionen erforderliche Energie, die durch die chemische Energie der Primärteilchen und durch diese Anleihe zusammen gedeckt wird, immerhin 7 Volt überschreiten und bei extremen Werten der chemischen Energie nahe an $8^1/_2$ Volt ausmachen mag[3].

---

[1] Auch bei Beteiligung von Sauerstoffatomen findet man nur z. B. für $CO + O = CO_2$ + 149 kcal, d. h. 6.45 Volt. Es sei an die Überlegung von F. HABER und W. ZISCH (l. c.) und an die anschließende Untersuchung von H. BEUTLER und B. JOSEPHY (Zeitschr. f. physical. Chem. **139**, 482 [1928]) über Energiesteigerung bei Primärprozessen erinnert.

[2] S. G. LUSBY, Phil. Mag. **22**, 779 (1911). Seine Messungen beziehen sich wohl weniger auf den Innenkegel als auf das daraus hervorgehende Gas.

[3] Der Zuwachs des Sättigungsstromes mit der Temperatur ist bei unveränderter sekundlicher Benzolzufuhr zur Flamme beobachtet worden. Die Zahl der Primärprozesse ist also nicht als temperaturabhängig anzusehen.

Das scheinbar sprunghafte Fallen des Leitvermögens an der Grenze des Innenkegels gegen die aus ihm abziehenden Gase (vgl. die Leuchtgasversuche von F. EPSTEIN und P. KRASSA in Zeitschr. f. physical. Chem. **71**, 28 [1910]) hat eine doppelte Ursache. Einerseits hören die Elementarprozesse auf, welche energiereiche Primärprodukte liefern, andererseits verschwinden die leicht ionisierbaren CC-Radikale.

Aus dem Temperaturkoeffizienten des Sättigungsstromes erkennt man, daß keinesfalls thermisches Gleichgewicht bezüglich der elektrischen Dissoziation im Innenkegel bestehen kann. Denn die Ionisierungsspannung muß notwendig weit mehr als 2 Volt betragen, da schon die Energie der ersten Anregung höher ist.

Die geschilderten Ergebnisse sind, von dem einen Fall der Cyanflamme abgesehen, unter Benutzung von Luft oder, wenn Sauerstoff verwendet wurde, unter Benutzung eines solchen Sauerstoffüberschusses erhalten worden, daß die Temperatur nicht über die der Luftflammen hinausging. Wo Flammen verschiedenen Leitvermögens auf den Einfluß geprüft wurden, den die Gegenwart der besprochenen Radikale übte, ist Sorge getragen worden, daß die schlechter leitende Flamme nicht die kältere war bzw. daß ihr geringeres Leitvermögen nicht von ihrer niedrigeren Temperatur herstammen konnte. Die Verhältnisse bei den heißesten Flammen, die man mit Hilfe von Sauerstoff erhalten kann, werden noch weiteres Studium fordern.

Zusammenfassend ergibt sich, daß nicht die elektrischen Spaltstücke, sondern ungeladene Gebilde für den Verbrennungsvorgang und insbesondere für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung haftbar zu machen sind. Dies entspricht dem von Bonhoeffer und mir (l. c.) vertretenen Standpunkte und erklärt sich daraus, daß die ungeladenen Spaltstücke (Radikale) mit viel geringerem Energieaufwand hervorzubringen sind als die geladenen. Die Natur geht, indem sie sich der ungeladenen Spaltstücke bedient, den energetisch billigsten Weg. Nur bei den Radikalen CC und vielleicht CH, die ausnahmsweise niedrige Anregungsspannungen besitzen, scheint auch die Ionisierungsspannung niedrig genug, um in den Luftflammen eine beachtliche Spaltung in Ionen und Elektronen zustande kommen zu lassen. Infolgedessen läßt sich bei Luftflammen, die ein gut ausgebildetes Swanspektrum zeigen, ein kleiner Einfluß einer angelegten Spannung auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung nachweisen. Die wesentliche Quelle der Ionisation ist dabei die chemische Energie der Elementarprozesse.

Divergente Reihen und singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Von George D. Birkhoff
in Cambridge (Mass.).

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 31. Januar 1929 [s. oben S. 13].)

Bei der Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1 \cdots x_n) \qquad (i = 1, \cdots n)$$

spielen in der Nähe eines Punktes, z. B. $x_1 = \cdots = x_n = 0$, wo alle die reellen analytischen Funktionen X_i verschwinden, gewisse Reihen eine wichtige Rolle. Wenn diese Reihen konvergieren, so ist es nicht schwer, angemessene Fragen über die Natur der Lösungen zu behandeln.

Wenn aber diese Reihen divergieren, so scheint die Sache ganz anders zu liegen. Es ist die Absicht dieser Arbeit, im einfachsten Falle eine Vermutung über die Bedeutung dieser divergenten Reihen zu begründen. Vor der Behandlung dieses Falles soll die Vermutung selbst aufgestellt werden.

Einem solchen singulären Punkt mögen formale $(n-k)$-dimensionale Flächen S_k zugeordnet sein $(k < n)$. Diese seien durch Gleichungen

$$F_1 = 0 \cdots F_k = 0$$

gegeben, wo die $F_1 \cdots F_k$ (konvergente oder divergente) Potenzreihen in $x_1 \cdots x_n$ ohne Absolutglieder sein mögen. Als Folge der Gleichungen $F_1 = 0 \cdots F_k = 0$ und der Differentialgleichungen möge

$$dF_i = 0 \qquad (i = 1, \cdots k)$$

formal richtig sein. Offenbar ist der Schnitt zweier solcher invarianter formaler Flächen selbst eine invariante formale Fläche.

Weiter mögen formale, durch Potenzreihen dargestellte Integrale

$$\Omega_j = \text{const.}$$

existieren, und zwar entweder auf einer solchen formalen Fläche S_k oder im $x_1 \cdots x_n$-Raum $(k = 0)$. Es kann der Fall eintreten, daß ein Ω_j einer positiv definiten Form auf S_k entspricht. In diesem Falle zeigen offenbar gewisse Lösungen der Differentialgleichungen (nämlich die im üblichen Sinne S_k be-

nachbarten) Stabilität, derart, daß $x_1 \cdots x_n$ für ein langes Zeitintervall in der Nähe von $x_1 = 0 \cdots x_n = 0$ bleiben, und zwar sowohl für wachsende wie für abnehmende Zeiten, ohne Rücksicht auf die Konvergenz oder die Divergenz der vorkommenden Reihen. Wegen dieser Eigenschaft wollen wir dies den stabilen oder halbstabilen Fall nennen, je nachdem die Dimension eines oder des anderen der S_k gleich n ist, oder stets kleiner als n ist. Alle anderen Fälle sollen völlig instabil heißen. Der stabile oder halbstabile Fall kann nur dann eintreten, wenn die Koeffizienten in den Entwicklungen von $X_1 \cdots X_n$ nach $x_1 \cdots x_n$ unendlich vielen Bedingungen genügen.

Die erwähnte Vermutung ist nun die, daß im völlig instabilen Fall die divergenten Reihen durch Funktionen eines einfachen Typus ersetzt werden können, welche im reellen Gebiet dieselbe Rolle spielen wie die im Falle der Konvergenz durch die Reihen dargestellten Funktionen.

Wir wollen diese Vermutung im einfachsten Falle $n = 2$ bestätigen. Hier sind die Wurzeln m_1, m_2 der in m quadratischen Gleichung

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - m & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - m \end{vmatrix} = 0,$$

wo in den partiellen Ableitungen $x_1 = x_2 = 0$ einzutragen sind, von grundlegender Bedeutung[1]. Wenn m_1, m_2 reell und von einerlei Vorzeichen sind, doch so, daß keine der beiden Zahlen ein ganzzahliges Multiplum der anderen ist, so konvergieren die auftretenden formalen Reihen ϕ, ψ, und die allgemeine Lösung kann in der Form

$$\phi = \phi_0 e^{m_1 t}, \quad \psi = \psi_0 e^{m_2 t}$$

geschrieben werden. Wenn wir dann die so gerechtfertigte analytische Variablentransformation $\bar{x}_1 = \phi$, $\bar{x}_2 = \psi$ machen, so nehmen die Differentialgleichungen die einfache Normalform

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = m_1 \bar{x}_1, \quad \frac{d\bar{x}_2}{dt} = m_2 \bar{x}_2$$

an. Daher ist die Auflösung in der Tat auf diesen einfachen Fall reduziert. Ähnlich herrscht Konvergenz, auch wenn m_1, m_2 konjugiert komplex, aber nicht rein imaginär sind. Eine analoge Normalform spielt dann eine wichtige Rolle.

Es bleibt dann der Fall übrig, wo m_1, m_2 reell und von verschiedenem Vorzeichen sind. Hier können die Reihen ϕ, ψ divergieren. Auf diesen Fall wollen wir nun unsere Aufmerksamkeit richten, und wollen dazu die Annahme machen, daß $\frac{m_1}{m_2}$ irrational ist.

---

[1] Zu den erwähnten Tatsachen vgl. man L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, Berlin 1926, Kap. 3, 4.

Zuerst wollen wir das folgende Lemma beweisen:

Lemma. Die formale Potenzreihe, mit reellen Koeffizienten

$$s(x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m!\,n!} x_1^m x_2^n,$$

möge konvergente Zeilen und Kolonnen haben, so daß sie in jeder der beiden Formen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_m(x_2) x_1^m}{m!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n(x_1) x_2^n}{n!}$$

geschrieben werden kann, wo $s_n(x_1)$, $t_m(x_2)$ in den komplexen Variablen x_1, x_2 analytisch sind für $|x_1|<r$, $|x_2|<r$, $r>0$. Dann gibt es eine reelle Funktion $f(x_1, x_2)$ der reellen Variablen x_1, x_2, die mit allen partiellen Ableitungen für $|x_1|<r$, $|x_2|<r$ stetig und für $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ analytisch ist, und für die

$$\left.\frac{\partial^m f}{\partial x_1^m}\right|_{x_1=0} = t_m(x_2), \quad \left.\frac{\partial^n f}{\partial x_2^n}\right|_{x_2=0} = s_n(x_1) \qquad (m, n = 0, 1, 2 \cdots)$$

ist.

Wir werden eine solche Funktion in der Form

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_{mn} x_1^m x_2^n}{m!\,n!} \left(1 - e^{-\frac{1}{(1+|a_{mn}|)x_1^2 x_2^2}}\right)$$

explizite hinschreiben[1].

Zunächst betrachten wir diese Funktion in dem vierdimensionalen Bereich

$$|x_1| \leqq r, |x_2| \leqq r; |\arg x_1| \leqq \vartheta, |\arg x_2| \leqq \vartheta \left(0 < \vartheta < \frac{\pi}{8}\right).$$

In diesem Bereich übertrifft $\arg x_1^2 x_2^2$ nicht $4\vartheta < \frac{\pi}{2}$, so daß die Exponentialausdrücke in der Reihe Exponenten $\frac{-1}{B_{mn}}$ mit negativem Realteil haben. Sie sind daher dem absoluten Betrag nach kleiner als Eins.

Weiter finden wir für $|B_{mn}| \geqq 1$

$$|a_{mn}(1 - e^{\frac{-1}{B_{mn}}},)| = |a_{mn}| \cdot \left|\frac{1}{B_{mn}} - \frac{1}{2!(B_{mn})^2} + \cdots\right| \leqq |a_{mn}| \frac{e-1}{B_{mn}} \leqq \frac{2}{|x_1^2 x_2^2|}.$$

Wenn aber $|B_{mn}|<1$ ist, dann haben wir nach der Definition von B_{mn}

$$|a_{mn}| \leqq \frac{1}{|x_1^2 x_2^2|}.$$

---

[1] J. F. Ritt hat ähnliche Reihen mit der gleichen Methode behandelt, mit der Absicht, eine Funktion anzugeben, die an einer Stelle gegebene Ableitungen hat. Vgl. seine Arbeit »On the derivatives of a function at a point«. Annals of math. (2) vol. 18 (1916).

Da der Ausdruck in der Klammer der vorigen Abschätzung einen absoluten Betrag kleiner als 2 hat, so gilt die zuletzt aufgeschriebene Abschätzung für alle B_{mn}. Daher ist

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2\,|x_1|^{m-2}\,|x_2|^{n-2}}{m!\,n!}$$

eine majorante der gegebenen Reihe. Nach Voraussetzung konvergieren aber die Glieder $m \leqq 2$, $n \leqq 2$ in der Doppelreihe s gleichmäßig. Daher konvergieren die entsprechenden Glieder in der Reihe f ebenfalls gleichmäßig. Denn die eingeführten Faktoren haben einen 2 nicht übersteigenden absoluten Betrag. Die majorante Reihe zeigt, daß die übrigen Glieder ($m > 2$, $n > 2$) auch gleichmäßig konvergieren für alle beschränkten x_1, x_2, für die $|\arg x_1| \leqq \vartheta$, $|\arg x_2| \leqq \vartheta$ und $0 < \vartheta < \frac{\pi}{8}$. Daher ist $f(x_1, x_2)$ eine stetige Funktion, die für $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ analytisch ist, weil ϑ_λ ein wenig größer angenommen werden kann. Trägt man also $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ in die Reihe ein, so erhält man

$$f(x_1, 0) = s_0(x_1), \quad f(0, x_2) = t_0(x_2).$$

Auf ähnliche Weise kann man die Reihen diskutieren, die man durch successive partielle Differentiation der Reihe für f erhält. Wir wollen nur noch $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ betrachten, da analoge Ungleichungen für alle anderen Ableitungen leicht nach demselben Verfahren gewonnen werden können. Führt man die Differentiation explizite aus, so sieht man, daß die Glieder in der Reihe für $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ aus zwei Termen bestehen; der eine hat denselben allgemeinen Typus wie in der Reihe für f und wird durch Multiplikation des typischen Gliedes dieser Reihe mit $\frac{m}{x_1}$ erhalten. Dieses Glied entsteht durch Differentiation des Faktors vor der Klammer. Der entsprechende Teil in der abgeleiteten Reihe hat also als majorante die Reihe

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2\,x_1^{m-3}\,x_2^{n-2}}{(m-1)!\,n!}.$$

Der andere Teil der abgeleiteten Reihe hat als typisches Glied

$$a_{mn} x_1^m x_2^n \quad -2\,e^{\frac{-1}{B_{mn}}} \cdot \frac{}{B_{mn} x_1}.$$

Da hier der Exponentialfaktor einen absoluten Betrag kleiner als 1 besitzt, so ist eine majorante dieser Reihe

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2\,|x_1|^{m-3}\,|x_2|^{n-2}}{m!\,n!}.$$

Daher ist es offenbar, daß die ganze Reihe für $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ in dem gleichen Gebiet gleichmäßig konvergiert, da die Reihe aus den drei ersten Zeilen und

Kolonnen gleichmäßig konvergiert. Daher ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ in diesem Bereiche stetig, und außer bei $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ analytisch. Setzt man $x_1 = 0$, so sieht man, daß $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ für $x_1 = 0$ den vorgeschriebenen Wert $t_1(x_2)$ annimmt.

Diese Schlußweise kann für $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ und die partiellen Ableitungen höherer Ordnung verwendet werden. Die Funktion $f(x_1, x_2)$ ist daher eine reelle Funktion, die in dem ersten Quadranten $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ mit allen ihren partiellen Ableitungen stetig ist; sie ist analytisch für $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$. Ihre partiellen Ableitungen nehmen für $x_1 = 0$ und für $x_2 = 0$ die gegebenen Werte an. Ähnlich zeigt man, daß f die gleichen Eigenschaften in einem jeden der drei anderen Quadranten hat. Die vier Funktionen bilden natürlich zusammen die durch die gegebene Reihe definierte Funktion, welche die angegebenen Eigenschaften hat.

Der Satz, den wir mit Hilfe dieses Lemmas beweisen wollen, kann so ausgesprochen werden:

Satz: Es möge ein Paar von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = X(x_1, x_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = X(x_1, x_2) \tag{2}$$

gegeben sein. Die reellen analytischen Funktionen X_1, X_2 der reellen Veränderlichen x_1, x_2 mögen an dem singulären Punkt (0.0) verschwinden, während die Wurzeln m_1, m_2 von (1) entgegengesetztes Vorzeichen besitzen mögen. $\frac{m_1}{m_2}$ sei irrational. Durch eine eineindeutige reelle analytische Transformation mögen die invarianten Kurven durch (0.0) in die x_1 und die x_2 Achse übergeführt werden, so daß

$$X_1 = x_1(m_1 + P(x_1, x_2)), \qquad X_2 = x_2(m_2 + Q(x_1, x_2)).$$

Dann kann man eine weitere Variablentransformation

$$x_1^* = x_1 f_1(x_1, x_2), \qquad x_2^* = x_2 f_2(x_1, x_2)$$

vornehmen, in der f_1, f_2 zusammen mit allen partiellen Ableitungen stetig sind für $|x_1| \leqq r$, $|x_2| \leqq r$, $r > 0$. Es ist dabei $f_1(0.0) = f_2(0.0) = 1$. f_1 und f_2 sind außer bei $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ analytisch. f_1 und f_2 besitzen partielle Ableitungen, die bei $x_1 = 0$ in x_2 und bei $x_2 = 0$ in x_1 analytisch sind. In den neuen Variablen bekommen die Differentialgleichungen die Form

$$\frac{dx_1^*}{dt} = m_1 x_1^*, \qquad \frac{dx_2^*}{dt} = m_2 x_2^*,$$

wie in den anderen allgemeinen Fällen.

Es leuchtet ein, daß dieser Satz vollkommen Aufschluß über die reellen Lösungen von (1) gibt.

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß die Form der Differentialgleichung, die wir durch Einführung der invarianten Kurven als Koordinatenachsen erhielten, bewahrt bleibt, wenn man irgendeine Transformation der Form

$$x_1 = \bar{x}_1\left(1 + \rho\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right)\right), \qquad x_2 = \bar{x}_2\left(1 + \sigma\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right)\right)$$

vornimmt, in der ρ, σ durch konvergente Potenzreihen in $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ohne konstante Glieder gegeben sind. Wir wollen zunächst eine passende Transformation dieser Art vornehmen.

Wenn man in (2) $x_2 = 0$ setzt, so ist die zweite Gleichung befriedigt, und die erste wird

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1\left(m_1 + P\left(x_1, 0\right)\right).$$

Hieraus folgt

$$t = \int \frac{dx_1}{x_1\left(m_1 + P(x_1, 0)\right)} = \frac{1}{m_1}\left(\log x_1 + a(x_1)\right),$$

wo $a(x_1)$ bei $x_1 = 0$ in x_1 analytisch ist und bei $x_1 = 0$ verschwinden möge. Also wird

$$x_1 e^{a(x_1)} = e^{m_1 t}$$

Durch Auflösung erhalten wir

$$x_1 = e^{m_1 t}\left(1 + f\left(e^{m_1 t}\right)\right), \qquad x_2 = 0,$$

wo $f(u)$ analytisch ist und bei $u = 0$ verschwindet. Ähnlich finden wir eine Lösung

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = e^{m_2 t}\left(1 + g\left(e^{m_2 t}\right)\right),$$

wo $g(u)$ analytisch ist und für $u = 0$ verschwindet.

Die in Aussicht genommene zusätzliche Transformation ist

$$x_1 = \bar{x}_1\left(1 + f\left(\bar{x}_1\right)\right), \qquad x_2 = \bar{x}_2\left(1 + g\left(\bar{x}_2\right)\right).$$

Natürlich lassen die so erhaltenen neuen Differentialgleichungen dann die beiden Lösungen

$$x_1 = e^{m_1 t}, \quad x_2 = 0; \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = e^{m_2 t}$$

zu. Setzt man diese Lösungen in die transformierten Differentialgleichungen ein, so findet man, daß

$$P\left(e^{m_1 t}, 0\right) = 0, \qquad Q\left(0, e^{m_2 t}\right) = 0$$

ist, so daß $P(x_1, x_2)$ und $Q(x_1, x_2)$ durch x_2 bzw. x_1 teilbar sind. Daher können wir die Differentialgleichungen in der Form

$$(3) \qquad \frac{dx_1}{dt} = x_1\left(m_1 + x_2 R\left(x_1, x_2\right)\right), \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_2\left(m_2 + x_1 S\left(x_1, x_2\right)\right)$$

annehmen, wo R und S analytisch in x_1, x_2 in der Umgebung von $x_1 = x_2 = 0$ sind.

Das ist die endgültige Form, insoweit wir sie durch eine eineindeutige analytische Transformation erreichen können[1].

Es ist wohl bekannt, daß die früher erwähnten formalen Reihen ϕ, ψ bis auf einen konstanten Multiplikator eindeutig durch die formalen Identitäten

$$(4)\quad X_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - m_1 \phi = 0, \qquad X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - m_2 \psi = 0$$

bestimmt sind und tatsächlich lineare Glieder enthalten. Wenn die vorbereitete Form (3) der Differentialgleichungen benutzt wird, so bemerkt man, daß in ϕ keine von x_1 unabhängigen Glieder vorkommen können. Wenn in der Tat $\bar{\phi}(\bar{x}_2)$ die formale Reihe dieser Glieder bezeichnet, und man die von x_1 unabhängigen Glieder in der ersten der obigen partiellen Differentialgleichungen betrachtet, so findet man

$$m_2 x_2 \frac{d\bar{\phi}}{dx_2} = m_1 \bar{\phi},$$

woraus $\bar{\phi} = 0$ folgt. Also ist ϕ durch x_1 teilbar. Ähnlich findet man, daß ψ durch x_2 teilbar ist. Wenn wir also die linearen Glieder in ϕ und ψ zu x_1 bzw. x_2 fixieren, so sind die in diesen formalen Reihen auftretenden Multiplikatoren bestimmt.

Unser nächster Schritt ist, zu zeigen, daß die Reihen ϕ und ψ die im Lemma vorausgesetzte Eigenschaft besitzen, daß nämlich die Zeilen und die Kolonnen konvergieren (siehe [1]). Aus Symmetriegründen genügt es, diese Tatsache für ϕ zu beweisen. Um zu zeigen, daß die Zeilen von ϕ konvergieren, schreiben wir

$$\phi = x_1 \left(\alpha_0(x_2) + \alpha_1(x_2)\, x_1 + \cdots\right).$$

Es genügt, zu zeigen, daß man Funktionen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \cdots$ wählen kann, die für $|x_2| \leqq r$ analytisch sind, für die $\alpha_0(0) = 1$ ist, und derart, daß die partielle Differentialgleichung für ϕ formal befriedigt ist. Wenn man nämlich diese einfache Reihe in x_1 in eine Doppelreihe entwickelt, so wird natürlich die partielle Differentialgleichung weiter befriedigt sein. Da x_1 das Anfangsglied in ϕ ist, so ist die so erhaltene Doppelreihe mit der oben fixierten identisch. Daher besitzt die Doppelreihe konvergente Zeilen, denn die Summe der Glieder in der m-ten Reihe ist gerade $\alpha_m x^{m+1}$. Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir die Reihe für ϕ in die partielle Differentialgleichung ein, streichen einen Faktor x_1 und setzen die Koeffizienten von x_1^n gleich Null. So erhalten wir

$$\left(m_1 n + (n+1)\, x_2 P(0, x_2)\right) \alpha_n + m_2 x_2 \alpha_n' + \Phi_n = 0,$$

wo in Φ nur $\alpha_0, \cdots \alpha_{n-1}$ vorkommen. Setzt man zunächst $n = 0$ und $\Phi_1 = 0$, so kommt

$$\alpha_0 = c_0 e^{-\int P(0, x_2)\, dx_2}$$

wo c_0 durch die Festsetzung bestimmt ist, daß $\alpha_0 = 1$ für $x_2 = 0$. Daraus folgt, daß $\alpha_0(x_2)$ in dem Gebiet $|x_2| \leqq r$ der komplexen Ebene analytisch ist.

[1] H. Dulac hat Transformationen dieser Art angegeben. Vgl. seine Arbeit »Sur les cycles limites«, Bulletin de la Soc. math. de France, t. 51 (1923).

in dem $P(0, x_2)$ analytisch ist. Wir wollen dann durch Induktion beweisen, daß $\alpha_0, \alpha_1 \cdots$ nacheinander so bestimmt werden können, daß sie alle in $|x_2| \leqq r$ analytisch sind, wofern r so klein ist, daß P und Q für $|x_1| \leqq r$, $|x_2| \leqq r$ analytisch sind. Nehmen wir also an, daß die Behauptung für $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}$ richtig ist und beweisen sie für α_n. Zunächst ist Φ_n offenbar für $|x_2| \leqq r$ analytisch, da es eine lineare Funktion von $\alpha_0, \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$, $\alpha_0', \alpha_1' \cdots \alpha_{n-1}'$ ist mit Koeffizienten, die für $|x_2| \leqq r$ analytisch sind. Lösen wir explizite auf, so finden wir

$$\alpha_n = x_2^{kn}\, \alpha_0^{n+1} \left(c_n + \int x_2^{-kn} \frac{\Phi_n}{\alpha_0^{n+1}}\, dx_2 \right). \qquad \left(k = -\frac{m_1}{m_2}\right)$$

Aber $\frac{1}{\alpha_0}$ ist für $|x_2| \leqq r$ analytisch, so daß man $\frac{\Phi_n}{\alpha_0^{n+1}}$ in eine Reihe entwickeln kann. Bei passender Wahl der Integrationskonstanten erhalten wir also eine Reihe

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p\, x_2^{p+1-kn}}{p+1-kn}$$

für die Glieder in der Klammer, wo a_p der Koeffizient von x_2^p in der Reihe für $\frac{\Phi_n}{\alpha_0^{n+1}}$ ist. Die Nenner können niemals verschwinden, und die Reihe hat denselben Konvergenzradius wie die Reihe $\frac{\Phi_n}{\alpha_0^{n+1}}$. Daher ist α_n für $|x_2| \leqq r$ analytisch, wie wir beweisen wollten.

Daher konvergieren die Zeilen in ϕ tatsächlich. Wir wollen dann beweisen, daß auch die Kolonnen konvergieren. Dazu schreiben wir

$$\phi = x_1 \left(\beta_0(x_1) + \beta_1(x_1)\, x_2 + \cdots \right)$$

und setzen diese Reihe für ϕ in die partielle Differentialgleichung ein, streichen einen Faktor x_1 und setzen den Koeffizienten von x_2^n Null. Wir finden eine analoge Gleichung

$$m_1 x_1 \beta_n' + n \left(m_2 + x_1 Q(x_1, 0) \right) \beta_n + \Psi_n = 0,$$

wo Ψ_n nur von $\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$ abhängt. Setzt man $n = 0$ und bemerkt, daß $\Psi_0 = 0$ ist, so findet man, daß β_0 konstant ist, wir nehmen sie gleich 1. Wir können nun nacheinander beweisen, daß $\beta_1, \beta_2, \cdots$ für $|x_1| \leqq r$ analytisch sind durch eine ganz ähnliche Methode wie bei $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$.

Wenn also auch die formalen Reihen $\phi, \downarrow$ divergieren mögen, so konvergieren gleichwohl die Zeilen und Kolonnen und stellen Funktionen dar, die wie in der Voraussetzung des Lemmas für $|x_1| \leqq r$, $|x_2| \leqq r$ analytisch sind.

Wir machen nun in (3) die weitere reelle Transformation

$$\bar{x}_1 = \phi = x_1 A, \qquad \bar{x} = \downarrow = x_2 B,$$

wo A und B reelle Funktionen sind, die zusammen mit allen ihren partiellen Ableitungen für $|x_1| \leqq r$, $|x_2| \leqq r$ stetig und für $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ analytisch sind,

und die im Sinne des Lemmas längs der x_1- und x_2-Achse dieselben partiellen Ableitungen wie die entsprechenden formalen Reihen für $\frac{\phi}{x_1}$, $\frac{\psi}{x_2}$ haben. So erhalten wir ein neues System von Differentialgleichungen der Form

$$(5) \qquad \frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{x}_1 (m_1 + \bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)), \qquad \frac{d\bar{x}_2}{dt} = \bar{x}_2 (m_2 + \bar{Q}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)),$$

wo $\bar{P}, \bar{Q}$ Funktionen mit gleichen Stetigkeits- und Analytizitätseigenschaften sind. Aber sie haben die weitere wichtige Eigenschaft, daß $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ und $\bar{Q}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ mit allen ihren partiellen Ableitungen nach x_1 bzw. x_2 längs der x_2- bzw. x_1-Achse verschwinden.

Um diese wichtige Eigenschaft zu beweisen, kehren wir zu den formalen Identitäten (4) zurück und bemerken, daß wenn ϕ, ψ durch die oben benutzten Funktionen $x_1 A$, $x_2 B$ ersetzt werden, die Glieder linker Hand mit allen ihren partiellen Ableitungen stetig und für $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ analytisch werden, während sie mit allen diesen partiellen Ableitungen nach x_1 bzw. x_2 längs der x_2- bzw. x_1-Achse verschwinden müssen. Dies ist die präzise Bedeutung der früher zur Bestimmung von $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \beta_0, \beta_1, \cdots$ benutzten formalen Identitäten.

Man verifiziert leicht, daß diese um $m_1 \bar{x}_1$, $m_2 \bar{x}_2$ vermehrten linken Seiten gerade die rechten Seiten der modifizierten Gleichungen in x_1, x_2 werden. Also haben wir

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = m_1 \bar{x}_1 + x_1 C, \qquad \frac{d\bar{x}_2}{dt} = m_2 \bar{x}_2 + x_2 D,$$

wo $x_1 C$ und $x_2 D$ für die linken Seiten von (4) stehen, die offenbar die Faktoren x_1 bzw. x_2 besitzen.

Die Funktionen C und D verschwinden mit allen partiellen Ableitungen sowohl längs den $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$-Achsen als den x_1, x_2-Achsen. Also haben wir

$$x_1 A = \bar{x}_1 \bar{P}, \qquad x_2 B = \bar{x}_2 \bar{Q},$$

wo $\bar{P}, \bar{Q}$ die angegebenen Eigenschaften haben.

Die Differentialgleichungen (5) haben daher eine viel zweckmäßigere Form.

Eine wichtige Eigenschaft von $\bar{P}, \bar{Q}$ in (5) ist die folgende: Für jedes n sind $\bar{P}, \bar{Q}$ höchstens von der Ordnung $\bar{x}_1^n \bar{x}_2^n$:

$$(6) \qquad \bar{P} = O(\bar{x}_1^n \bar{x}_2^n), \qquad \bar{Q} = O(\bar{x}_1^n \bar{x}_2^n).$$

Das sieht man leicht so ein. Es möge $M(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ irgendeine mit den Eigenschaften von $\bar{P}, \bar{Q}$ sei. Wir schreiben $M = \bar{x}_1 M^*$. M^* ist dann mit allen seinen partiellen Ableitungen stetig und für $\bar{x}_1 \neq 0$, $\bar{x}_2 \neq 0$ analytisch, und verschwindet zusammen mit diesen partiellen Ableitungen längs den Achsen. Durch wiederholte Anwendung dieser Tatsachen findet man

$$M = \bar{x}_1 M^* = \bar{x}_1 \bar{x}_2 M^{**} = \cdots,$$

wo M^*, M^{**}, $\cdots$ die gleichen Eigenschaften haben und insbesondere in dem betrachteten Bereiche beschränkt sind. Diese Methode führt unmittelbar zu Ungleichungen der Form (6) für $\bar{P}$, $\bar{Q}$ und für alle ihre partiellen Ableitungen.

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf den ersten Quadranten $\bar{x}_1 > 0$, $\bar{x}_2 > 0$, und wählen wir die Numerierung so, daß $m_1 > 0$ und $m_2 < 0$. Machen wir dann die Transformation

$$\bar{x}_1 = e^{m_1 \tau_1}, \qquad \bar{x}_2 = e^{-m_2 \tau_2}$$

für $\bar{x}_1 > 0$, $\bar{x}_2 > 0$, so entspricht die Umgebung der x_1 bzw. x_2-Achse den Teilen der τ_1, τ_2-Ebene, für die τ_1 bzw. τ_2 groß und negativ sind. Die neuen Differentialgleichungen werden dann

$$(7) \qquad \frac{d\tau_1}{dt} = +1 + M(\tau_1, \tau_2), \qquad \frac{d\tau_2}{dt} = -1 + N(\tau_1, \tau_2),$$

wo die analytischen Funktionen

$$M(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{m_1} \bar{P}(e^{m_1 \tau_1}, e^{-m_2 \tau_2}),$$

$$N(\tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{m_2} \bar{Q}(e^{m_1 \tau_1}, e^{-m_2 \tau_2})$$

gewisse nun anzugebende Eigenschaften besitzen. Zunächst ist für jedes $p > 0$

$$(8) \qquad M = O(e^{p(\tau_1 + \tau_2)}), \qquad N = O(e^{p(\tau_1 + \tau_2)}).$$

Dies folgt aus (6), wenn wir

$$n m_1 \geqq p, \quad -n m_2 \geqq p$$

nehmen. Weiter haben alle partiellen Ableitungen von M und N nach τ_1 und τ_2 ähnliche Eigenschaften. Dies folgt aus den Gleichungen, die M und N definieren, da die partiellen Ableitungen von $\bar{P}$, $\bar{Q}$ nach $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ auch Ungleichungen vom Typus (6) genügen.

Aus den Gleichungen (7) folgt, daß für $\tau_1 \leqq -D$, $\tau_2 \leqq -D$, $D > 0$, wenn entweder τ_1 oder τ_2 groß und negativ sind, die Steigungen $\frac{d\tau_2}{d\tau_1}$ der analytischen Kurven in der τ_1, τ_2-Ebene, welche Lösungen von (7) darstellen, nahezu -1 ist, so daß $\tau_1 + \tau_2$ nahezu konstant bleibt in dem Sinn, daß seine relative Änderung klein ist. Wenn man daher die Glieder von (7) integriert ausgehend von einem Punkt $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ der Linie $\tau_1 = \tau_2$, die jede solche Kurve genau einmal schneidet, so finden wir

$$(9) \qquad \tau_1 = \tau + t + E(\tau, t), \qquad \tau_2 = \tau - t + F(\tau, t),$$

wo t das Zeitintervall längs der Kurve bedeutet. Nun ist

$$E(\tau, t) = \int_0^t M(\tau_1, \tau_2)\, dt,$$

wo das Zeitintervall kleiner ist als $2|\tau|$, weil die Geschwindigkeiten $\frac{d\tau_2}{dt}$, $\frac{d\tau_1}{dt}$ nahezu -1 bzw. $+1$ sind. Also haben wir

$$E = O(\tau e^{p\tau}) = O(e^{(p-1)\tau}), \qquad F = O(e^{(p-1)\tau})$$

für ein willkürliches p, während $\frac{(\tau_1+\tau_2)}{\tau}$ längs einer solchen Kurve nahezu 2 ist.

Natürlich gehört zu jedem Punkt des betrachteten Bereiches der τ_1, τ_2 genau ein τ und t. Nun setzen wir

$$\tau_1^* = \tau + t, \qquad \tau_2^* = \tau - t,$$

so daß (9) die Form

$$\tau_1 = \tau_1^* + E\left(\frac{(\tau_1^*+\tau_2^*)}{2}, \quad \frac{(\tau_1^*-\tau_2^*)}{2}\right), \tag{10}$$

$$\tau_2 = \tau_2^* + F\left(\frac{(\tau_1^*+\tau_2^*)}{2}, \quad \frac{(\tau_1^*-\tau_2^*)}{2}\right)$$

bekommt. Diese Gleichungen definieren eine eineindeutige analytische Beziehung zwischen dem Teil des Quadranten $\tau_1 \leqq -D$, $\tau_2 \leqq -D$ der τ_1, τ_2-Ebene, für den τ_1 oder τ_2 hinreichend groß negativ sind, und einen ähnlichen Bereich der τ_1^*, τ_2^*-Ebene, und es ist für jedes p

$$E = O(e^{p(\tau_1^*+\tau_2^*)}), \qquad F = O(e^{p(\tau_1^*+\tau_2^*)}).$$

Wir bemerken weiter, daß die partiellen Ableitungen von E, F nach τ_1^*, τ_2^* auch diese Eigenschaft haben. Wir wollen dies allein für die ersten partiellen Ableitungen beweisen, aber es bietet keine Schwierigkeit, das durch vollständige Induktion zu verallgemeinern. Es genügt natürlich, den Nachweis für die partiellen Ableitungen von E, F nach τ, t zu führen.

Nun haben wir nach der ersten Differentialgleichung (7)

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial t} = 1 + \frac{\partial E}{\partial t} = 1 + M(\tau_1, \tau_2).$$

Daher ist es klar, daß $\frac{\partial E}{\partial t}$ und ähnlich auch $\frac{\partial F}{\partial t}$ die behauptete Eigenschaft haben. Wenn wir weiter der Kürze wegen

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = u, \qquad \frac{\partial F}{\partial \tau} = v$$

schreiben und bemerken, daß nach (9)

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau} = 1 + u, \qquad \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau} = 1 + v$$

ist, während nach der Definition von τ doch $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = \tau$ für $t = 0$ ist, so folgt, daß u und v für $t = 0$ verschwinden. Aus den Gleichungen (7) folgt weiter durch Differentiation nach τ

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial M}{\partial \tau_1}(1+u) + \frac{\partial M}{\partial \tau_2}(1+v),$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial N}{\partial \tau_1}(1+u) + \frac{\partial N}{\partial \tau_2}(1+v).$$

Da, wie wir wissen, die Ableitungen von M und N auf der rechten Seite $O(e^{p\tau})$ sind, und da u und v für $t = 0$ verschwinden, während t nicht $2|\tau|$ im absoluten Wert übertreffen kann, so ist es klar, daß u und v für beliebige p gleichfalls $O(e^{p\tau})$ sind.

Unter Beachtung dieser Tatsachen können wir die letzte Transformation

$$(11) \qquad x_1^* = e^{m_1 \tau_1^*}, \qquad x_2^* = e^{-m_2 \tau_2^*}$$

diskutieren. Die zu (10) inverse Transformation ist offenbar von demselben Typus wie (10). Also ist

$$x_i^* = \bar{x}_i\left(1 + h_i(\tau_1, \tau_2)\right), \qquad (i = 1, 2)$$

wo die h_i und alle ihre partiellen Ableitungen analytisch und $O(e^{p(\tau_1+\tau_2)})$ in dem betrachteten Bereiche sind. Wenn also die h_i im Gebiete $\bar{x}_1 > 0$, $\bar{x}_2 > 0$ als Funktionen von $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ausgedrückt werden, so sind sie für $\bar{x}_1 \neq 0$, $\bar{x}_2 \neq 0$ analytisch und sind für genügend kleine $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ mit allen ihren partiellen Ableitungen stetig. h_i und seine partiellen Ableitungen verschwinden für $\bar{x}_1 = 0$ oder $\bar{x}_2 = 0$. In der Tat verschwindet h_i für $\bar{x}_1$ oder $\bar{x}_2 = 0$ infolge der angegebenen Eigenschaft, während $\frac{\partial h_i}{\partial \bar{x}_1}$ gleich $\frac{\partial h_i}{\partial \tau_1}$ ist dividiert durch $m_1 e^{m_1 \tau_1}$, so daß $\frac{\partial h_i}{\partial \bar{x}_1}$ und ebenso alle anderen partiellen Ableitungen von h_i für $\bar{x}_1 = 0$ oder $\bar{x}_2 = 0$ infolge der angegebenen Eigenschaft verschwinden.

Daher kann die Transformation von x_1^*, x_2^* in $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ in der Form

$$x_i^* = \bar{x}_i\left(1 + g_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\right) \qquad (i = 1, 2)$$

geschrieben werden, wo die g_i und ihre partiellen Ableitungen in der Umgebung des Ursprunges stetig sind, längs den Achsen verschwinden, und für $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ analytisch sind.

Bis jetzt haben wir nur den ersten Quadranten betrachtet, aber natürlich kann auch in jedem anderen Quadranten eine solche Transformation erklärt werden, und zwar so, daß diese Transformationen zusammen eine einzige Transformation bilden, welche auch in der obigen Form geschrieben werden kann, so daß g_1, g_2 die angegebenen Eigenschaften in der vollen Umgebung des Ursprungs haben.

Wenn wir nun von der Variablen $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ zu x_1, x_2 zurückgehen, so haben wir augenscheinlich eine Transformation von x_1^*, x_2^* zu x_1, x_2 definiert, welche die im Theorem behaupteten allgemeinen Eigenschaften besitzt.

Andererseits lassen die Differentialgleichungen in x_1^*, x_2^* im ersten Quadranten gemäß der Definition von τ_1^*, τ_2^* die Lösungen

$$x_1^* = e^{m_1(t+\tau)}, \qquad x_2^* = e^{m_2(t-\tau)}$$

zu. Trägt man diese in die Differentialgleichungen ein, so zeigt sich, daß sie die im Satz behauptete Normalform für den ersten Quadranten haben und ähnlich auch in den anderen.

So ist der Beweis des Satzes vollendet.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß zwar in dem Falle der Konvergenz die Normalvariablen $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, die die Gleichungen auf die Normalform reduzieren, bis auf konstante Faktoren bestimmt sind, daß aber die Normalvariablen x_1^*, x_2^* nicht so bestimmt sind. In der Tat beweist man leicht, daß die Variablen

$$\bar{x}_i^* = x_i^*\left(1 + \chi_i(x_1^{*-m_2} x_2^{*m_1})\right) \qquad (i = 1, 2)$$

die gleichen Dienste leisten, wofern $\chi_1(u)$, $\chi_2(u)$ für jeden Quadranten erklärt sind, für $u \geq 0$ mit allen ihren Ableitungen stetig sind, mit diesen Ableitungen für $u = 0$ verschwinden und für $u > 0$ analytisch sind. Das führt natürlich zu der Frage, ob nicht durch passende Wahl der χ_i die Normalvariablen weiter vereinfacht werden können.

Bei Ausdehnung unseres Ergebnisses auf die anderen spezielleren, völlig instabilen Fälle $n = 2$ und auf die völlig instabilen Fälle $n > 2$ ist die erste zu überwindende Schwierigkeit in der Bestimmung geeigneter invarianter Flächen $S_k (k < n)$ gelegen. Nur weil sich diese in dem behandelten Falle $n = 2$ auf zwei analytische Kurven reduzierten, konnte diese Schwierigkeit vermieden werden.

Ausgegeben am 13. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XII—XV

LIBRARY OF CONGRESS
DEC 4 1929
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 18. April. (S. 185)

PENCK: Geomorphologische Probleme im Fernen Westen Nordamerikas. (S. 187)

G. HOHEISEL: Über das Verhalten des reziproken Wertes der RIEMANNschen ζ-Funktion. (Mitteilung vom 7. Februar.) (S. 219)

Klassensitzung am 25. April. (S. 224)

Gesamtsitzung am 2. Mai. (S. 225)

Klassensitzung am 16. Mai. (S. 226)

v. LAUE: Über eine röntgenographische Methode, Größe und Form ultramikroskopischer krystalliner Teilchen zu bestimmen. (S. 227)

LUDENDORFF: Über den sogenannten 61 Cygni-Sternstrom. (S. 229)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XII. Gesamtsitzung. 18. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Wilcken sprach über »Philipp II. von Makedonien und die panhellenische Idee«. (Ersch. später.)

Der Vortragende bestritt die verbreitete Ansicht, daß Isokrates in seinem »Philippos« (346) dem König eine staatliche Einigung der Griechen empfohlen habe. Isokrates denkt hier wie auch im Panegyrikos (380) ebenso wie schon Gorgias im Olympiakos nur an die Herstellung einer inneren Eintracht (Homonoia). Die staatliche Einigung im Korinthischen Bunde (338/7) ist also aus der makedonischen Machtpolitik Philipps, nicht aus dem panhellenischen Programm abzuleiten. Dagegen hat Philipp die »Eintracht« des Isokrates durch den Landfrieden zu verwirklichen gesucht, der in den Symmachievertrag eingearbeitet worden ist. Den Gedanken des panhellenischen Nationalkrieges gegen Persien hat Philipp von Isokrates übernommen, um seine makedonischen Kriegsziele mit dieser Flagge zu verdecken, aber das Motiv der Rache für die von Xerxes an den griechischen Tempeln begangenen Frevel stammt nicht, wie vielfach angenommen wird, von Isokrates, dem es ebenso fremd ist wie dem Gorgias, sondern ist ein genialer Gedanke Philipps.

2. Hr. Penck übersandte im Anschlusse an seine Vorträge vom 9. Februar 1928 und 21. Februar 1929 eine Arbeit über Geomorphologische Probleme im Fernen Westen Nordamerikas.

Die Tektonik des Fernen Westens ist nur zum kleinsten Teile durch seitlichen Zusammenschub einer dünnen Schale zu erklären und führt sich größtenteils auf senkrechte Bewegungen aus der Tiefe zurück, die ihrerseits auf selbständige Bewegungen einer plastischen Unterkruste, des Geoplasma, weisen.

3. Hr. Sering übersandte sein Buch über »Internationale Preisbewegung und Lage der Landwirtschaft in den außertropischen Ländern« (Berlin 1929).

4. Vorgelegt wurde die 10. Lieferung des »Nomenclator animalium generum et subgenerum« (Berlin 1929),

5. ferner die vom vorgeordneten Ministerium überwiesene Broschüre »Wissenschaft, Kunst und Volksbildung in Preußen« (Berlin 1929), das von der Wiener Akademie der Wissenschaften übersandte Werk von Justus Schmidt »Die alte Universität in Wien und ihr Erbauer Jean Nicolas Jadot« (Wien und Leipzig 1929) und endlich der 2. Teil des 7. Bandes der Epistolae der Monumenta Germaniae Historica: Karolini aevi V (Berlin 1928).

6. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt:

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse

300 ℛℳ für die Fortführung der Studien des Hrn. Dr. Wilhelm Meise in Berlin über die Aaskrähe,

2000 ℛℳ für eine Forschungsreise des Hrn. Prof. Dr. Gottlieb Haberlandt nach Neapel,

750 ℛℳ für die Arbeiten der Weierstrass-Kommission,

450 ℛℳ für die Berliner Mathematische Gesellschaft zum Druck ihrer Denkschrift aus Anlaß der 200. Wiederkehr des Geburtstages von Joh. Heinr. Lambert,

200 ℛℳ zur Fortführung der »Opuscula Ichneumonologica« des Hrn. Prof. Dr. Otto Schmiedeknecht in Blankenburg i. Thür.;

durch ihre philosophisch-historische Klasse:

1000 ℛℳ für die Arbeiten der Orientalischen Kommission,

1600 ℛℳ für die Fortführung des »Corpus nummorum Graecorum«,

600 ℛℳ für die Bearbeitung des Interpolationen-Index durch Hrn. Prof. Dr. Rabel in Berlin,

400 ℛℳ für die Bearbeitung des Savigny-Buches des verstorbenen Hrn. Prof. Dr. Stoll in Kassel,

5000 ℛℳ für die Fortführung der Arbeiten des Hrn. Prof. Dr. Burdach an seinem Werke »Vom Mittelalter zur Reformation«.

Geomorphologische Probleme im Fernen Westen Nordamerikas.

Von Albrecht Penck.

I. Einleitung. Isostatische und andere Krustenbewegungen.

Der Ferne Westen der Vereinigten Staaten hat der Betrachtung sowohl der Erdoberfläche wie auch der Erdkruste eine Menge neuer Anregungen gegeben. Als vor mehr als einem halben Jahrhundert seine geographische zugleich mit seiner geologischen Erforschung ansetzte, drängten sich den Beobachtern mehr als irgendwo sonst die mannigfaltigen Beziehungen zwischen Oberflächengestaltung und oberflächlichem Bau auf; denn nackt und kahl ist das Land, und was bei uns nur durch mühsame Einzeluntersuchung festgestellt werden kann, liegt dort klar vor Augen. Es entwickelte sich bei Topographen und bei Geologen eine Art des Beobachtens, welche insbesondere durch J. W. Powell grundlegend für die neuere Morphologie der Erdoberfläche geworden ist. Aber nicht nur methodisch wurde der Blick geschult; auch sachlich ergab sich viel Neues. Der Gebirgsbau erwies sich als gänzlich verschieden nicht nur von dem der östlichen Vereinigten Staaten, sondern auch von dem üblichen Europas. Während hier die höchsten Erhebungen durchweg aus stark gestörten Schichten aufgebaut werden, traf man in Amerika flache Lagerung selbst in sehr großen Höhen[1]; während die Ansichten in Europa über den aktiven Einfluß des Vulkanismus auf den Gebirgsbau ins Wanken kamen, zeigte Grove Karl Gilbert[2] in den Henry Mountains, daß deren Erhebung durch die Injektion vulkanischen Materials bedingt ist; während in Europa die Ideen einer Schichtfaltung des sich kontrahierenden Erdballes, welche längst schon durch James D. Dana in Nordamerika verbreitet worden waren, festen Fuß faßten und die Lehre von starker Kompression der Kruste fast allgemeinen Eingang fand, zeigte sich im Westen Nordamerikas, daß ausgedehnte Gebiete völlig frei sind von den Wirkungen eines Seitendruckes; es erwuchs die Vorstellung, daß die verschiedenen hochgelegenen horizontalen Schichtpakete in einer gewissen Gleichgewichtslage sich befinden müßten, welche Clarence Dutton[3] Isostasie nannte.

Es war namentlich auf den Plateaus am Coloradoflusse, den östlich angrenzenden Rocky Mountains und den davorgelagerten Ebenen, ferner im Großen Becken im Innern, wo die neuen Ergebnisse gezeitigt wurden, während zugleich erkannt wurde, daß die Californischen Küstengebiete in ihrem Ge-

birgsbau mehr den Faltengebirgen der östlichen Vereinigten Staaten und Europas, den Appalachien und Alpen näherstehen.

Zahlreiche dieser neuen Ergebnisse wurden sofort in die Lehrbücher übernommen. J. W. Powells Querschnitt des Colorado-Plateaus ist oft wiedergegeben worden, aber selten sind bisher die Plateau-Gebiete und das Große Becken in ihrer Eigenart gewürdigt worden, und die Einfügung des Fernen Westens in tektonische Gesamtdarstellungen der ganzen Erde ging nicht von ihnen aus, sondern von einer erst spät bekanntgewordenen schmalen Faltungszone, die sich zwischen Becken und Plateau schaltet. Hier findet Eduard Suess[4] die Fortsetzung seines asiatischen Gebirgsbaues, den er bis zum Südende der Rockies verfolgt, während er in den Californischen Ketten ein Glied des für die beiden Amerika charakteristischen andinen Gebirgsbaues erblickt. Leopold Kober[5] erkennt im Westen Nordamerikas ein typisch alpines Gebirgsorogen, nämlich zwei Faltungszonen, die beiden erwähnten, getrennt durch ein Zwischengebirge: das Große Becken. Das Colorado-Gebiet wird bei ihm zum östlichen Vorland, das westliche soll im Pazifischen liegen. Die Rocky Mountains bezeichnet er als Präkordillere, vergleicht sie mit den Sudeten, schaltet sie also aus dem echten Faltungslande aus. Rudolf Staub[6] hingegen sieht alpinen Gebirgsbau nur an der Pazifischen Küste; das Große Becken und die Plateaus erscheinen ihm als randliche Zwischengebirge. Ablehnend verhält sich Chester Longwell[7] gegenüber Kobers Ideen. Hans Cloos[8] vergleicht die Küstenketten mit den Alpen, das Californische Gesenke mit dem Alpenvorlande, die Sierra Nevada mit der schwäbisch-fränkischen Alb. Die Rocky Montains betrachtet er ebenfalls wie Kober nicht als Faltenzug, sondern als Bruchfaltenland, ähnlich dem saxonischen Mittel- und Norddeutschland. Weit gehen alle diese Anschauungen auseinander, und nur wenig tragen sie der Eigenart des Fernen Westens Rechnung.

Der Wunsch, das großartige Arbeitsgebiet amerikanischer Geologen kennenzulernen, hat mich fünfmal nach dem Fernen Westen geführt. 1897 reiste ich mit der British Association for the Advancement of Science auf der Canadischen Pazifikbahn durch die Canadischen Rockies und kehrte dann mit W. M. Davis durch den Norden der Vereinigten Staaten vom Puget Sound über die Black Hills von Dakota nach dem Osten zurück. 1904 kam ich wieder in Gesellschaft von W. M. Davis mit einer Exkursion des Internationalen Geographenkongresses an das Südende der Rockies und auf das Coloradoplateau. 1909 querte ich mit meinem Sohn Walther Penck den Fernen Westen auf der Linie Denver–Rio Grande–Salt Lake City–Los Angeles und fuhr an der Küste nach San Francisco. 1927 fuhr ich mit Albrecht Haushofer auf der südlichen Pazifikbahn südlich des Plateaus nach Kalifornien. Unterwegs machten wir einen Abstecher zum Grand Canyon, den ich zum zweiten Male besuchte. An der Küste entlang kamen wir nach Berkeley, besuchten das Yosemitetal, fuhren quer durch das Große Becken und über die Plateaus über Ogden und Laramie nach dem Osten zurück, um dann in Gemeinschaft mit dem Internationalen Bodenkongreß abermals nach dem Westen zu gehen. Wir erreichten die Rockies bei Colorado Springs, kamen mit der Rio-Grande-Linie nach Salt Lake City, machten einen Abstecher zum Yellowstone-Park

und vereinten uns nach abermaliger Querung des Großen Beckens mit der Reisegesellschaft in San Francisco, von wo es nun an der Westküste nach Norden ging. Seattle wurde erreicht, wo ich 1897, von Canada kommend, die westlichen Vereinigten Staaten betreten hatte; durch die Canadian Rockies ging es über den Jasper-Park nach dem Osten zurück. 1928 endlich fuhr ich auf direktem Wege von Chicago nach Salt Lake City, dann aber auf der Western Pazifikbahn nach Berkeley. Von hier unternahm ich zahlreiche Exkursionen in das Küstengebirge, querte die Sierra Nevada, folgte dem Owens Valley, kam abermals nach Los Angeles und fuhr auf der Straße neben der früher besuchten Küstenlinie nach Berkeley zurück. Die Heimreise erfolgte durch das große Californische Tal, die Mojavewüste, über das Coloradoplateau, wo der Grand Canyon zum dritten Male berührt wurde, wieder an dem Südende der Rockies vorbei und an deren Ostfuß bis Denver.

Bei diesen Fahrten standen anfänglich die Probleme exogener Morphologie im Vordergrunde meines Interesses; je mehr ich aber vom Lande kennenlernte, desto mehr fesselten mich die der tektonischen Morphologie, welche bisher lediglich von Geologen weiter gepflegt worden waren, und ich wurde inne, daß auf diesem Gebiete grundlegende Fragen der Geomorphologie und der Geologie der Lösung nähergebracht werden können. Eine reiche Literatur bietet dafür Beobachtungsmaterial von seltenem Umfange. Doch würde dasselbe kaum genügt haben, um an jene Fragen heranzutreten, wenn ich nicht die Möglichkeit gehabt hätte, vieles selbst zu sehen. Oft zeigte sich dabei auf den ersten Blick, daß die Dinge anders lagen, als ich sie mir nach bloßem Literaturstudium gedacht hatte, und andrerseits wurde mir letzteres durch das selbst Gesehene vielfach erleichtert. Der Vorwurf, als Geograph Eisenbahn-Geologie getrieben zu haben, wird mir deswegen nicht erspart bleiben. Ich könnte ihm nur entgehen, wenn ich geheimhalten würde, daß ich die Gegenden, über die ich berichte, selbst gesehen habe und dadurch den Anschein erwecken, als stünde ich auf dem Boden so mancher Kritiker, welche die Erdoberfläche lediglich nach der Literatur kennen. Selbstverständlich ist die Literatur die Hauptquelle der folgenden Darstellungen, die an Einzelbeobachtungen kaum etwas Neues bieten. Aber ich möchte doch betonen, wie wichtig mir persönlich gewesen ist, ganz verschiedene Landschaftseindrücke in kurzer Zeit auf mich wirken zu lassen. Dabei gedenke ich derer, die mich an einzelne Stellen geführt haben und mir Dinge gezeigt haben, die ich als Fremder erst nach langem Suchen gefunden haben würde, und mit denen ich so manche der aufgerollten Probleme besprechen konnte, mit aufrichtiger Dankbarkeit.

Es erscheint mir zweckmäßig, zunächst einige Worte über Isostasie zu sagen. Das Wort ist von C. E. Dutton geprägt, aber vor ihm war man bei den geodätischen Arbeiten in Indien bereits auf das Wesen der Sache gekommen: Nämlich, daß in verschiedenen Prismen von gleichem Querschnitte zwischen der Erdoberfläche und einer gewissen nicht allzu großen Tiefe nahezu gleiche Massen vorhanden sind. Diese Tatsache ist seither allent-

halben auf der Erdoberfläche bestätigt worden, und William Bowie[9] spricht von einem Prinzip der Isostasie, das allenthalben auf der Erdoberfläche herrscht und in Vergangenheit geherrscht hat. Die Isostasie selbst wird verschieden erklärt. J. H. Pratt sprach von einer Kompensation der Massenerhebungen und darunter befindliche Tiefendefekte; G. B. Airy dachte sich die Erdkruste ähnlich den Balken eines Flosses auf einem Fluß über einer Unterlage von Lava. Beide Erklärungsmöglichkeiten befriedigen; Geodäten und Geophysikern, welche die Starrheit der Erde betonen, erscheint die Annahme von Pratt als die richtigere[10], Geologen neigen mehr zu der von Airy[11], sie paßt besser zu einer großen Beweglichkeit der Erdkruste, die sich in der geologischen Geschichte zu erkennen gibt.

Ein großes Experiment, das die Natur gemacht hat, spricht zugunsten von Airy. Die großen Inlandeismassen, welche im Eiszeitalter sich über den Norden Europas und Nordamerikas breiteten, haben durch ihre Last, wie bereits Thomas F. Jamieson annahm, ihre Unterlage eingedrückt, und diese steigt nunmehr nach ihrer Entlastung wieder empor[12]. Der Betrag der Eindrückung entspricht in Skandinavien ziemlich genau der Last; er war rund ein Drittel der Eismächtigkeit; das durch sie gestörte isostatische Gleichgewicht ist noch nicht ganz wieder hergestellt. Um elastische Wirkungen kann es sich nicht bloß handeln, denn nicht nur die Unterlage des Eises ist eingedrückt worden, sondern auch an dessen Saum haben Aufpressungen stattgefunden. Es muß also in der Tiefe eine Wanderung des Materials stattgefunden haben. Unter der starren Kruste befindet sich eine bewegliche Masse, aber wir möchten sie nicht mit Airy als »Lava« bezeichnen oder mit Reginald Daly als »Basaltglas«, sondern wir wollen von einem Geoplasma sprechen, um lediglich die Beweglichkeit anzudeuten, ohne damit über den Grad der Flüssigkeit oder eine bestimmte chemische Zusammensetzung etwas auszusagen. Sicher ist lediglich, daß das Geoplasma, da es die auf ihm schwimmende starre Kruste zu tragen vermag, größere Dichte als letztere haben muß. Seine Beweglichkeit ist aber nicht bloß Folge des hohen Druckes und der hohen Temperatur in der Tiefe, sondern wahrscheinlich auch von physikalisch-chemischen Vorgängen, die in ihm stattfinden.

Zwischen starrer Kruste und Geoplasma kann man sich eine scharfe Grenze denken, wie zwischen den Balken eines Flosses oder einer Eisscholle und dem darunter befindlichen Wasser. Wahrscheinlich aber sind sie durch ganz allmähliche Übergänge mit einander verbunden. Sie bilden zusammen die Außenschale der Erde, nach unten begrenzt durch die Ausgleichsfläche, über welcher das isostatische Gleichgewicht herrscht. Alle größeren Unebenheiten der starren Kruste werden durch Verschiedenheiten in der Massenverteilung darunter ausgeglichen. Die Ausgleichsfläche, deren Tiefe von Geodäten zu rund 100 km angenommen wird*, erscheint uns daher als die

---

* Eine solche Tiefe ergibt sich auch, wenn wir von den mittleren Gesteinsdichten der Erdkruste unter dem Festlande (d_l) und von der unter dem Meeresboden (d_m) ausgehen. Für letztere haben wir allerdings nur einen indirekten Anhalt durch die aus ozeanischen Gebieten entstiegenen Laven. Ist die mittlere Tiefe des Ozeans h_m und die Dichte seiner Wasserfüllung d_o,

untere Grenze aller Bewegungen, welche die Höhenänderungen der Erdoberfläche führen, als die untere Grenze von Krusten- und der mit ihnen untrennbar verbundenen Geoplasma-Bewegungen. Die Schale der Erde ist der Sitz des Diastrophismus, sie ist die Tektonosphäre Schwinners, sie bildet die Troposphäre des Erdballes im Gegensatz zu der 10mal weniger mächtigen Troposphäre der überlagernden Atmosphäre.

Jede Veränderung der Kruste zieht eine Bewegung des Geoplasma nach sich. Wird die Kruste belastet, wie während der Eiszeit oder gegenwärtig durch Ablagerung von Material, so sinkt sie ein; wird sie durch Eisschmelzen oder Abtragung entlastet, so steigt sie an. Im ersteren Falle wird das Geoplasma unter ihr seitlich herausgedrückt, im anderen strömt es unter die entlastete Kruste ein. Alle diese Bewegungen des Geoplasma, welche sich auf Belastung und Entlastung der Kruste zurückführen, wollen wir erzwungene nennen, die ihnen folgenden Bewegungen der Kruste sind isostatische. Diese isostatischen Krustenbewegungen können nie das Ausmaß der Abtragung oder Ablagerung auf der Oberfläche der Kruste völlig wettmachen. Schwimmt die Kruste auf dem Geoplasma, so muß sie leichter als letzteres sein; eine Zunahme der Dichte der einzelnen Kugelschalen mit der Tiefe wird ja auch durch anderweitige Erwägungen erheischt. Die Wegnahme einer Schicht von der Mächtigkeit h kann nur ein Aufsteigen der Oberfläche $s = \frac{hd_1}{d_2}$ zur Folge haben, wenn d_1 das spezifische Gewicht der Kruste an der Oberfläche und d_2 das stets größere des Geoplasma ist. d_1 setzen wir gewöhnlich $= 2.7$, d_2 ist uns unbekannt, es bewegt sich wahrscheinlich zwischen 3.0 und 3.3. $\frac{d_1}{d_2}$ beläuft sich also auf etwa 0.8—0.9. Die Wegnahme einer 1000 m mächtigen Schicht kann also nur eine Hebung des unterliegenden Prismas um 800—900 m nach sich ziehen, ebenso eine Belastung eines Prismas mit 1000 m Sediment ein Einsinken des Prismas von 800 bis 900 m hervorrufen. Isostatische Bewegungen mindern lediglich die Beträge der Höhenänderung durch Abtragung und Ablagerung auf 1—2 Zehntel, hindern aber nicht, daß im Laufe der Zeit Erosion und Denudation eine Einebnung der Erdoberfläche herbeiführen.

---

ferner die mittlere Höhe des Landes h_l und die Tiefe der Ausgleichfläche unter dem Meeresspiegel h_k, so ist

$$(h_k - h_m)\ d_m + h_m d_o = (h_k + h_l)\ d_l.$$

Nach Henry Washington ist $d_m = 2.87$, $d_l = 2.77$, nach Kossinna $h_m = 3.8$ km, $h_l = 0.8$ km, d_o kann $= 1$ gesetzt werden. Danach ergibt sich

$$h_k = 93 \text{ km}.$$

Natürlich ist nicht anzunehmen, daß die gesamte Kruste unter dem Meeresspiegel die Dichte 2.87, die unter den Festländern 2.77 betrage; es erheischt unsere Rechnung nur, daß die Dichtendifferenz durch die gesamten Säulen bis zur errechneten Ausgleichsfläche herab 0.1 sei, was allerdings kaum wahrscheinlich ist, da schon in geringerer Tiefe die Massen beweglich sein dürften. Die Dichtenzunahme innerhalb der Erdkruste läßt sich aus den Werten Washingtons nicht errechnen. d_l gilt für die Landoberfläche, d_m für die Tiefe, aus welcher das Magma der Vulkaninseln emporsteigt. Diese Tiefe ist unbekannt. Sie mag 1—2 Zehner von Kilometern betragen. Wichtig ist, daß wir in solchen Tiefen unter dem Meeresspiegel noch Massen von Sial-Dichte zu gewärtigen haben, und noch nicht Sima haben.

Die isostatischen Bewegungen der Erdkruste reichen nicht aus, das gesamte Bewegungsbild zu erklären, das durch deren Verbiegungen, Verwerfungen und Faltungen angezeigt wird. Sie haben stets andere Krustenbewegungen zur Voraussetzung, wie man solche immer angenommen hat. Meinte man früher, daß das Erdinnere eine aktive Wirkung auf die Kruste ausübe, so dachte man sich später, daß letztere dem sich infolge eines Wärmeverlustes zusammenziehenden Erdinnern folge, wie ein Gewölbe darüber zusammenbreche. Ein hoher Seitendruck müsste dabei zur Entwicklung kommen, genügend die Kruste in Falten zu legen. Man kann sich aber auch vorstellen, daß die Krustenbewegungen nur Teilerscheinungen von Bewegungen der Erdschale seien, und wird dann an innig miteinander verknüpfte Bewegungen der starren Kruste samt dem darunter befindlichen Geoplasma denken müssen, deren Ursache sowohl in der Kruste als auch im Geoplasma liegen könne. Die Gezeiten wirken wie eine Bremse an der starren Kruste und können diese über dem Geoplasma in Bewegung setzen, gleiches kann durch die neuerlich vielfach erörterte Polflucht der Kontinente geschehen. Andrerseits ist die Möglichkeit nicht außer acht zu lassen, daß es selbständige Bewegungen des Geoplasma geben könne, die bisher nur wenig Beachtung gefunden haben. Auf sie können wir nur aus Bewegungen der Erdkruste folgern, die ihnen folgen, so wie die Bewegungen der Schlackenkruste eines Lavastromes dessen Fließen. Drei Gruppen von Krustenbewegungen sind also denkbar, isostatische, selbständige und durch geoplasmatische Bewegungen erzwungene. Dem stehen erzwungene und selbständige Bewegungen des Geoplasma gegenüber.

Der Ferne Westen Nordamerikas bietet zahlreiche Phänomene, welche durch die herrschende Kontraktionstheorie nicht erklärt werden können. Seine Krustenbewegungen sind teilweise gewiß isostatischer Art, vornehmlich aber weisen sie auf Bewegungen des unterliegenden Geoplasma.

II. Die Hohe Tafel.

Wir unterscheiden im Fernen Westen der Vereinigten Staaten ein hochgelegenes Gebiet vorwiegend flacher Lagerung der Sedimente von einem solchen stark gestörter Schichtlagerung. Die nördlichen Rocky Mountains, die von Canada herübertreten, die Gebirge zwischen Wyoming und Idaho sowie das Wasatchgebirge sind die Grenze. Das Gebiet der flachen Schichtlagerung umfaßt die Plateaus am Colorado und am Green River sowie den hochgelegenen Teil der großen schiefen Ebenen, die voneinander durch die südlichen Rocky Mountains getrennt werden. Letztere sondern wir scharf von den nördlichen, die ganz andere Struktur haben. Das bezeichnende Merkmal des großen Gebietes ist das Fehlen jedwelcher echter Schichtfaltung in der ganzen Sedimentreihe vom Cambrium bis zum Tertiär. Die so gekennzeichnete Hohe Tafel bricht nach Süden im Colorado-Plateau steil ab, weiter östlich tritt sie bis an den Rio Grande. Unbestimmt sind ihre Grenzen im Osten. Die hochgelegenen Großen Ebenen setzen sich in solchen mit geringerer Höhe fort und bilden mit ihnen orographisch ein Ganzes. Aber strukturell zeigen ihre hochgelegenen Teile manche Anklänge an die benachbarten Rocky Mountains. Die Höhenlinie

von 1200 m ist eine Scheide, die, zwischen 102° und 103° W verlaufend, einen leichten Knick in den Abdachungsverhältnissen bezeichnet. Westlich von ihr ist der Anstieg anderthalb bis doppelt so stark als östlich.

Überwältigend wirkt der Schichtbau der Hohen Tafel am Grand Canyon des Colorado. So weit der Blick reicht, liegen die Schichten horizontal, obwohl sie über 2500 m hoch ansteigen. Man überblickt vom Endpunkt der Eisenbahn die ganze Schichtfolge vom Kambrium bis zum Oberkarbon oder Perm, ohne jedwelche in die Augen fallende Lücke. In ihrer Gesamtheit scheint eine 1000 m mächtige paläozoische Schichtfolge senkrecht emporgestiegen zu sein. Erst weiter im Osten und Westen wird man gewahr, daß nicht der ganze Block einheitlich bewegt worden ist. Man stößt auf Verwerfungen und Schichtknikkungen, die für die Kaibab-Struktur Powells bezeichnend sind und Monoklinalfalten genannt wurden. Sie begrenzen den höchstgelegenen, vom Canyon quer durchschnittenen Teil des Plateaus in meridionaler Richtung. Nach Norden und Süden biegt sich dieser höchste Streifen sanft ab. So erscheint das Kaibab-Plateau als eine großartige Schwelle mit zwei steilen Seiten, an denen die Schichten kräftig abbiegen. Erst die Isohypsendarstellung der Sohle des jungkarbonischen oder permischen Kaibab-Kalksteins, welche N. H. Darton[13] gegeben hat, läßt diese Eigenheit klar erkennen. Nicht minder imposant als die schwebende Schichtlagerung in der Mitte der Schwelle ist die Abbiegung ihrer Oberfläche gegen Osten, gegen den kleinen Colorado hin. Fast unzertalt verläuft sie, ihre Oberfläche entspricht beinahe genau einer Schichtfläche; man hat die Stirnfläche einer Erhebung von seltener Großartigkeit vor sich, an die mich gebracht zu haben ich Hrn. Prof. R. J. Russell dankbar bin. Auf den ersten Blick möchte es scheinen, als stelle diese Stirnfläche die wohl erhaltene Oberfläche einer jugendlichen Abbiegung von Schichten dar. Aber in ihrem Fuß sieht man hier und da in der einspringenden Kante Teile der Trias, die weiter im Osten zusammenhängender auftritt, und die sich auch auf dem Plateau in kleinen Einbiegungen, z. B. im Cedar Mountain, erhalten hat und anzeigt, daß die Abbiegung durch Abtragung der über dem Kaibab-Kalkstein gelegenen Schichten bloßgelegt ist. Wie sehr häufig, aber nicht allgemein, ist Kalk das Gestein, auf dessen Oberfläche die Abtragung halt gemacht hat, wahrscheinlich weil das auf ihn fallende Wasser von ihm aufgesaugt und dadurch an der Abtragung gehindert wird.

Im Tale des Colorado kommt als Sockel des Kaibab-Plateaus alter Granit, bedeckt von proterozoischen Ablagerungen zutage. Eduard Suess erblickte deswegen im Colorado-Plateau ein Stück Laurentia. Aber dieses Stück zeigt auch noch andere Anschwellungen ähnlicher Art. In den Zuñi-Bergen steigt das archaische Grundgebirge, das sich im Canyon auf 1000—1500 m Höhe erhebt, auf 2700 m empor und stößt hier durch die hangenden paläozoischen Schichten hindurch, die mitsamt den mesozoischen Schichten der Umgebung ringsum aufgebogen sind[14]. In der Nachbarschaft hebt sich die Unterlage des Kaibab-Kalksteins im Defiance-Plateau auf 2400 m empor. Inmitten einer Umgebung von Kreideschichten wölbt sich nördlich vom Kaibab-Plateau im San Rafael Swell das Karbon als flacher Buckel hervor[15]. Südlich davon liegen die Henry Mountains, die bekannten Lakkolithen, wo Intrusivmassen

ihr Dach aufgebogen haben. Auch südlich vom Kaibab-Plateau erhebt sich vulkanisches Gebirge, die Gruppe der San Francisco-Vulkane, bestehend aus Intrusiv- und Extrusivmassen[16]; während sich nördlich des Zuñi-Plateaus der Vulkan des Mt. Taylor erhebt; große Ergüsse breiten sich ferner im Westen des Plateaus, einzelne Lavaströme ergießen sich hier bis in den Einschnitt des Colorado herab. Im Osten erhebt sich das vulkanische S. Juan-Gebirge. Wie Dutton bemerkt, ist das südliche Plateaustück von vulkanischen Ausbrüchen umrahmt. Aber auch in seiner Mitte finden sich zahlreiche jungvulkanische Vorkommnisse[17], alles führt zur Annahme eines großen vulkanischen Herdes in geringer Tiefe unter dem Plateau.

Wesentlich andere Züge trägt das nördliche Plateau im Bereiche des Green River. Vulkanische Gesteine treten zurück, aber Aufwölbungen älterer Gesteine fehlen nicht. Das auffälligste ist das von Powell zuerst erforschte Uinta-Gebirge, über das F. B. Weeks[18] neuere Beobachtungnn beigebracht hat. Vorcambrische Quarzite bilden hier eine langgedehnte ostwestlich streichende Aufwölbung, in deren Mitte sie flach lagern, während sie an der Nord- und Südseite steil zur Tiefe biegen und hier einsinkan unter steil aufgerichteten paläozoischen und mesozoischen Schichten, über die sie stellenweise sogar überbogen sind. Aber zu typischer Faltung kommt es auch hier nicht. Inmitten der Eozänschichten des nördlichen Plateaus buckeln sich am Bitter Creek Kreideschichten auf, endlich treffen wir am Nordostsaume des Plateaus das von N. H. Darton[19] erforschte Bighorn-Gebirge. Hier wölbt sich das archaische Grundgebirge bis zu Höhen von 4000 m empor und ragt ähnlich wie im Zuñi-Plateau durch eine Kappe von paläozoischen Schichten, die ihm flach aufgelagert ist; aber am Rande des Gebirges sind diese Schichten ebenso wie die mesozoischen steil aufgerichtet. Es ist ein einheitlicher Struktur-Typus, welcher in den Plateaus, Schwellen oder Gebirgen der Plateauprovinz herrscht. Sie sind samt und sonders Emporwölbungen mit flachem Dach und steilen Flanken.

Es entsteht die Frage, ob wir in ihnen echte Falten vor uns haben oder anders geartete Aufwölbungen, z. B. Beulen. Das Kennzeichen der Falten ist der Zusammenschub, den ihr Material erfahren hat; es hat sich die Entfernung zwischen den beiden Flügeln der Falte vermindert. Über Beulen hingegen sind die Schichten gezerrt und gedehnt worden, so wie das Metall beim Hämmern. Dabei sind die Flügel der Wände auseinandergerückt, während sie sich in der Falte genähert haben. Bei der Faltung werden Schichten zusammengedrückt, und wenn auch die einzelnen an den Umbiegungsstellen Zerrungen erfahren haben, so gewinnt das gefaltete Paket an Höhe in dem Maße, als es an Ausdehnung verliert[20], während in einer Beule eine Raum-Mehrung für das Unterliegende geschaffen wird bei gleichzeitiger Dehnung und Zerrung. Hat ein Mittelstück vor der Faltung ein Areal A_1, nach der Faltung A_2, und sind die zugehörigen Dicken der gefalteten Massen d_1 und d_2, so ist $A_1 d_1 = A_2 d_2$; ist die Faltung nach unten begrenzt, wie dies bei den Faltungsexperimenten in der Regel der Fall ist, so schwillt das gefaltete Paket um den Betrag

$$d_2 - d_1 = \frac{(A_1 - A_2)\, d_1}{A_2}$$

an.

Das von H. N. Darton über das Bighorn-Gebirge beigebrachte Material gestattet zu entscheiden, wie das Gewölbe entstanden ist, ob durch Faltung, indem die Schichten zusammengepreßt wurden, oder durch Hebung, indem die Schichten gezerrt wurden. Er bietet eine Höhenschichtenkarte (Taf. XXXVII 1:600000) für die Basis des im Gebirge aufgewölbten Madison-Kalksteins (älteres Karbon) mit Isohypsen von 500′ zu 500′. Man könnte auf ihr die wahre Oberfläche und Mittelhöhe jener Gesteinssohle orometrisch genau ermitteln. Aber ein Querschnitt S. 109 gestattet zur ersten Annäherung ein abgekürztes Verfahren. Hier hat das Gebirge eine Breite $b = 91.5$ km, das ausgeglättete Schichtgewölbe der oberkretazischen Pierre-Schichten mißt 95.3 km. Es ergibt sich ein Überschuß $c = 3.8$ km. Damit verbunden ist eine Anschwellung $a = 3.1$ km. Nach der von Rollin T. Chamberlin[21] gegebenen Formel für die Beziehung zwischen Dicke (d) der gefalteten Schicht und des Überschusses des Profiles können wir annähernd setzen

$$(b + c)\, d = (d + a)\, b\,,$$

darnach

$$d = \frac{ab}{c}$$

und unter Einführung obiger Zahlenwerte $d = 75$ km.

Ist der Überschuß des Profils auf Verkürzung der Basis durch Faltung zurückzuführen, müßte $^3/_4$ der gesamten Schale über der Ausgleichsfläche zusammengepreßt werden, um bei einer Breitenminderung von 3.8 km eine Anschwellung von 3.1 km hervorzurufen.

Aber die Erhebung des Gebirges über seine Umgebung ist teilweise auch einer isostatischen Bewegung zu danken, welche während seiner Abtragung stattfand. Letztere beläuft sich in erwähntem Profile auf 2.2 km. Sie konnte eine isostatische Hebung von 1.8 bis 2.0 km bedingen. Die tektonische Anschwellung beläuft sich also nur auf 1.1 — 1.3 km, aber sie ist nicht mit einer Breitenminderung von 3.8 km, sondern nur mit einer solchen von 1.2 km verknüpft. Danach ergibt sich für die Dicke des gefalteten Gebietes

$$d = 550 \text{ km}.$$

Der tektonische Teil der Aufwölbung verlangt also eine Schale von fünfmal größerer Mächtigkeit als die Tiefe der Ausgleichsschicht, wenn die Erhebung des Bighorn-Gebirges ein Werk der Faltung sein soll. Wenn nun die Ausgleichsfläche die untere Grenze aller tektonischen Bewegungen bezeichnet, so ist es undenkbar, daß ein 550 km mächtiges Gebiet zusammengepreßt wird. Die Kompression kann höchstens bis zur Ausgleichstiefe herabreichen und die durch sie bewirkte Breitenminderung von 0.2 km bei 91.5 km Breite kann nur zu einer Aufwölbung von 0.22 km führen. Die wirkliche Aufwölbung ist 5—6mal so groß, als durch Kompression erklärt werden könnte. Wir müssen daher nach einer anderen Erklärung suchen: Nicht Seitendruck hat das Gebirge zusammengepreßt, sondern Tiefendruck hat es emporgehoben. Die Aufwölbung ist keine echte Faltung, sondern eine Zerrung. Daß eine solche eine große Rolle spielt, geht schon daraus hervor, daß die isostatische Hebung die Breite der aufgewölbten Fläche um 3.6 km vergrößert hat. Dieser

Betrag gibt ein Maß für die stattgehabte Zerrung durch isostatische Bewegung. Er ist viel größer, als der durch die tektonische Bewegung bewirkte.

Ganz entsprechend liegen die Dinge in den Großen Ebenen. Ihr geologischer Aufbau ist allerdings nicht so einfach zu erkennen wie der des Plateaus, denn sie haben nach ihrer Schichtstörung eine Einebnung erfahren, die vieles verschleiert. Aber die aus ihnen aufsteigenden Black Hills von Dakota stellen eine ganz ähnliche Aufwölbung archaischer Gesteine mit einer teilweise erhaltenen Kappe paläozoischer dar wie das Bighorn-Gebirge. Wieder gibt uns N. H. Darton[22] das Mittel zu untersuchen, inwieweit Seitendruck für ihre Erhebung in Betracht kommt. Auch von ihnen gibt er Isohypsen-Darstellungen der aufgewölbten Schichten, sowohl des Dakota-Sandsteins der oberen Kreide als auch des Minnekahta-Kalksteins des Perm(?). Ein Profil gestattet leicht, die Grenzlänge der oberen Kreide zu bestimmen. 102.4 km messend, ist sie nur um 0.3 km länger als die Basis. Das wäre der Betrag der allenfallsigen Kompression (c). Jene Grenze zeigt eine mittlere Aufwölbung $a = 1.8$ km, darnach ergibt sich die Mächtigkeit des gefalteten Gebietes

$$d = 610 \text{km}.$$

Also wieder erheischt die Verkürzung des Profils, wenn wir sie auf Kompression zurückführen wollen, die Zusammendrückung einer Schicht, die viel mächtiger ist als die Außenschale der Erde. Gleich dem Bighorn-Gebirge haben die Black Hills eine sehr beträchtliche Abtragung erfahren. Sie ergibt sich auf dem erwähnten Profile zu 1.6 km und würde auf eine isostatische Hebung von 1.3 bis 1.4 km deuten. Für die tektonische Anschwellung bleiben daher nur 0.4—0.5 km. Auch ihre Zurückführung auf Schichtfaltung erheischt eine dickere Schale als zur Verfügung steht. Wieder erweist sich die Annahme einer Kompression der Kruste durch Seitendruck als unzulänglich, wiederum müssen wir zur Annahme eines von der Tiefe her wirkenden Druckes greifen, um die Aufwölbung der Black Hills zu erklären, und der Profilüberschuß beruht nicht auf einer Zusammenpressung des Dakota-Sandsteins, sondern hat mit einer Ausdehnung desselben über der Grundfläche zu tun. Der Wert von c ist hier wie beim Bighorn-Gebirge der Ausdruck für eine Zerrung. Daß eine solche stattgefunden haben muß, schließen wir wiederum aus dem stattlichen Betrage der isostatischen Hebung, die die nicht abgetragenen Schichten gleichsam emporzerrte.

Bighorn-Gebirge und Black Hills sind etwas ganz anderes als Faltensättel, deren Schenkel sich bei der Erhebung genähert haben. Beide sind Beulen, wie sie beim Hämmern entstehen.

Zwischen den Plateaus und den Großen Ebenen ziehen sich die südlichen Rocky Mountains entlang. Mit steilem Abfalle erheben sie sich über die Ebenen weithin sichtbar, aber nicht mit zackiger Kammlinie wie die Alpen, sondern mehr mauerähnlich. Deutlich sieht man Stirnflächen zwischen den Mündungen der aus ihnen kommenden Täler. Eines teilen sie indes mit dem Nordsaume des europäischen Gebirges: Sie breiten heute nicht ihre Trümmer in Form gewaltiger Schuttkegel über ihr Vorland, wie sich solche vor den südcalifornischen Gebirgen dehnen; gleich dem nördlichen Vorland der Alpen

ist das Land östlich von ihnen ein Abtragungsgebiet. An ihrem Abfalle biegen sich wie am Uinta- und Bighorn-Gebirge sowie an den Black Hills die mesozoischen Schichten der Nachbarschaft mitsamt ihrer paläozoischen Unterlage auf und bilden Schichtkämme, die sich am Fuße des Gebirges nicht selten mauerartig erheben. In der Regel fallen sie vom Gebirge ab. Nur ausnahmsweise sind sie überbogen und krümmen sich etwas unter das ältere Gestein. Nirgends sind sie indessen von letzterem überschoben.

Die südlichen Rockies zerfallen in mehrere breite Ketten, die sich weithin in gleicher Höhe halten und vielfach plateauförmig dehnen. Doch zeigen ihre Hochflächen Abstufungen und ragen bisweilen in einzelnen Gipfeln auf. Zwischen den Ketten liegen breite Senken, Parks genannt. In diesen treten die am Ostfuße des Gebirges aufgebogenen Schichten wieder auf, flachwellig gelagert, aber an den begleitenden Ketten wiederum aufgerichtet. Gleiches wiederholt sich im Westen. Da grenzen die Rockies an die Großen Plateaus mit flachgelagerten Schichten, und diese biegen sich an ihrem Saume abermals auf. An einigen Stellen sitzen auch auf den Ketten Fetzen von paläozoischen, selbst mesozoischen Gesteinen auf, und gegen Süden geht das Felsengebirge in eine Schwelle karboner Schichten über. Im großen und ganzen kann man es als eine Reihe von Wellen mit dazwischen geschalteten Wellentälern betrachten. Daß sich einst paläozoische Gesteine über die Ketten breiteten, bekunden deren eben erwähnte Reste. Gleiches gilt von den Kreideschichten, die nicht mit einer Uferfazies an die Ketten stoßen. Dagegen ist das Eozän östlich und westlich der Rockies sowie im Middle-Park gutenteils bereits auf Kosten der Ketten entstanden. Diese haben sich also in vortertiärer Zeit herauszuheben begonnen, sie haben ihre Sedimentdecken seither größtenteils verloren, auf deren Kosten ist ihre Umgebung aufgeschüttet worden. Auch das Eozän zeigt Aufbiegungen, dort, wo es an die Rockies anstößt; deren Erhebung hat fortgedauert. Was sind die Ketten, sind es Falten, entstanden durch seitlichen Druck oder längliche Beulen — Upwharps —, emporgehoben von unten her?

Rollin T. Chamberlin hat für einen Querschnitt des Gebirges, zwischen Lyons (nördlich Denver) und Glenwood Springs (am Grand River) den Überschuß der Profillänge berechnet gegenüber der Breite des Querschnittes. Er findet auf dem genannten Profile von 212 km Länge einen solchen von 14 km, den er auf Zusammenpressung zurückführt. Er schließt daraus mit Recht auf eine große Dicke der zusammengepreßten Krustenteile, die im westlichen Abschnitte des Profiles auf 172 km steigt, in der Front Range 68 km, in der Park Range 95 km beträgt. Daraus leitet er einen großen Gegensatz zwischen den Rockies als einem »dickschaligen« Gebirge und den Appalachien und Alpen als »dünnschalige« Gebirgen her, bei welchen nur eine dünne Schale der Kruste in die Faltung eingeht.

Hat aber hier wirklich Faltung stattgefunden? R. T. Chamberlins Profile zeigen solche infolge ihrer großen Überhöhung. Aber sie verzeichnen auch nicht wenige Zerrungen durch normale Verwerfung (Fig. 7, 8, 10, 11), und sicher ist, daß die Rockies eine sehr starke Abtragung erfahren haben, die ein ansehnliches isostatisches Ansteigen zur Folge haben mußte. Man kann dasselbe

auf 2500—3500 m veranschlagen. Infolgedessen sind alle Sättel in die Höhe, alle Mulden in die Tiefe gezogen und die Profillinie vergrößert. Den Betrag dieser Zerrungen schätzen wir auf das vierfache der isostatischen Hebung, nämlich auf etwa 12 km. Da bleibt wenig für eine Kompression über. Die Dinge liegen ebenso wie beim Bighorn-Gebirge und den Black Hills. Wir haben es bei den Rocky Mountains ebenso wie bei ihnen nicht mit Zusammenschub von der Seite her, sondern mit Hebung von unten zu tun. In dieser Anschauung begegnen wir uns mit Willis T. Lee[23]. Nach ihm danken die südlichen Rockies — von diesen ist hier allein die Rede — ihre Entstehung senkrechter Hebung; er bemerkt über deren Ursache: »Örtliche Kräfte in der Kruste unter dem Gebirge scheinen genügend es aufzubauen und es ist nötig, an Kräfte zu denken, die in großer Entfernung ihren Ursprung haben«. Aber die Berechnung der Wirkung thermaler Ausdehnung in der Kruste, die er mitteilt, ergibt viel geringere Werte, als zur Erklärung der stattgehabten Bewegungen nötig sind. Auch Lee vergleicht die Black Hills inmitten der Großen Ebenen mit den südlichen Rockies. Sie haben dieselbe Struktur, nur sind sie nicht längsgedehnt wie letztere, sondern mehr rundlich. Auch sie müssen als ein senkrecht gehobenes Krustenstück angesehen werden.

Ein und derselbe Strukturtypus beherrscht die Plateaus westlich der Rockies, diese selbst und den westlichen Teil der Großen Ebenen. Senkrechte Hebungen herrschen vor, breite Beulen, langgedehnte Wellen, die ersteren einzelnd stehend, die letzteren dichter geschaart. Und dieser Strukturtypus vergesellschaftet sich weithin mit lebhafter vulkanischer Tätigkeit. Wie dies auf dem Colorado-Plateau der Fall ist, haben wir bereits gezeigt. Sie begleitet die südlichen Rockies fast in ihrer ganzen Länge und setzt schon auf den Wellen von Karbonkalken ein, die sich südlich von ihnen bis zum Rio Grande ziehen. Das San-Juan Gebirge auf ihrer Westseite ist ein jungvulkanisches Gebirge. Zahlreiche Vorkommnisse begleiten die Sangre de Cristo-Kette, treten in der Front Range auf, in den Parks und den westlichen Ketten. Bis 41°N verfolgt man sie hier, bis 40° an der Front. Dann setzen sie allerdings aus, wie weiter westlich auf dem Green River-Plateau. Der östliche Zinken der Gabel, in die sich die Rockies teilen, die Laramie-Kette, ist frei von jungvulkanischen Vorkommnissen, ebenso das Bighorn-Gebirge. Aber westlich davon liegen die riesigen Ergüsse des Yellowstone-Parks und seiner Umgebung, welche sich in gleicher Weise über das Nordende des Plateaus wie über die westlich angrenzenden Gebiete breiten und die Fortsetzung der nördlichen Rockies nach Süden verhüllen. Weiter gegen Norden, wo die Plateaus angrenzen an die weit nach Westen bis an den Fuß der nördlichen Rockies reichenden Großen Ebenen, tritt ein ganzer Schwarm von Lakkolithen im Grenzgebiete auf in denen etwas anderes Magma gefördert ist, als sonst in den Rockies, welche noch entschiedener als die Henry Mountains ihre Dächer wölben und mitten im Bereiche der Kreideschichten nicht nur von paläozoischen Gesteinen, sondern selbst von archaischen Gesteinen begleitet werden[24].

Die vulkanische Tätigkeit der Rockies reicht auch östlich der Rockies in das Bereich der Großen Ebenen. Östlich der Sangre de Cristo-Range entsteigt ihnen der erloschene Vulkan Capulin mit wohlerhaltenem Krater. Lava-

ströme gehen von ihm aus, Lavadecken breiten sich über die Höhen zwischen ihm und den Rockies, decken die Raton Mesa und reichen in die Nähe von La Vegas. Mehr den Rockies genähert sind weiter nördlich die beiden Spanish Peaks[25], die wie Vorposten vor den hohen Gebirgen stehen, dessen Gipfelhöhe erreichen, obwohl sie den Ebenen angehören. Sie sind Intrusionen von Massengesteinen, der westliche Peak (4152 m) von Augit-Diorit, der östliche (3873 m) von Monzonit und Granitporphyr. Das angrenzende Eozän ist steil aufgebogen und metamorphosiert. Aus der Tiefe sind stark metamorphosierte Kreideschichten emporgeschleppt. Eine Verwerfung von 1500 m größter Sprunghöhe umschließt U-förmig das gehobene Gebiet. Die so lange bestrittene Aktivität des Magma wird hier augenfällig. Von den beiden Peaks strahlen zahlreiche Gänge aus, mehr nach Osten und Westen als nach Nord und Süd. Sie stehen meist saiger, und hängen dann und wann nach der einen oder anderen Seite über; stellenweise sind sie mauerförmig ausgewittert. Mehrfach sind sie in Verbindung mit Lagergängen, welche sich zwischen Eozän- und Kreideschichten drängen. 20—25 km strahlen sie nach Osten aus. Neben diesen vom Westpeak ausgehenden Gängen gibt es längere, ostwestlich streichende, die eine 100 km breite, 160 km lange Zone zwischen den Greenhornbergen — dem Südende der West Mountain-Kette der Rockies — und dem Cimarron-Flusse durschsetzen. Sie deuten auf einen großen Körper vulkanischer Gesteine in geringer Tiefe auf einer Fläche von 16000 qkm. Weit hinein in die Großen Ebenen erstreckt sich die vulkanische Tätigkeit. 220 km östlich der Spanish Peaks ragt die Twin Butte[26] auf, ein Lakkolith, der Karbon zu Tage bringt. Solches wird auch in der Nachbarschaft sichtbar. Es bildet hier südlich vom Arkansas-Flusse eine große Aufwölbung angesichts der Rocky Mountains, ein schwächliches Seitenstück zu den Black Hills. Auch an deren Beule knüpft sich jungvulkanische Tätigkeit, die sich vornehmlich in Intrusionen äußerte[27].

Die sehr aktive vulkanische Tätigkeit im Bereiche der Hohen Tafel setzt gleichzeitig mit den starken Aufwölbungen ein, deren Werke wir kennengelernt haben. Die Wende der Kreide zur Tertiärperiode bezeichnet ihren Beginn. Er ist mit dem Rückgang des Meeres aus dem Gebiete verbunden. Es entstanden hier von nun an lediglich kontinentale Ablagerungen, die anfänglich für lakustre angesehen wurden. Diese kontinentalen Ablagerungen aber sind im Gegensatze zu den kretazischen nur Lokalbildungen, abgelagert in einzelnen Becken, welche durch die Aufwölbungen voneinander geschieden waren. Die Gegend von Denver gibt hierüber ausgezeichnete Aufschlüsse. Während die Kreideschichten am Fuße der Rockies auch bei Golden in keiner Weise Ufernähe verraten[28], treten in die Zusammensetzung der ihnen diskordant auflagernden Arapahoe-Schichten Trümmer der Rockies ein; die diskordant darüber folgenden Denver-Schichten bestehen in ihrer unteren Partie aus Trümmern jungvulkanischen Gesteins, in ihrer oberen aus Granit. Kaum hatten sich die Rockies soweit herausgehoben, daß sie Material für ihre Umgebung spenden konnten, so setzte in ihnen eruptive Tätigkeit ein, und als deren Gesteine abgetragen waren, kamen die Krystallinen an die Reihe[29]. Gleichzeitig erfolgten anhaltend Störungen der erwähnten Grenz-

schichten zwischen Kreide und Tertiär; an zahlreichen Stellen ist auch das Eozän aufgerichtet worden und das Oligozän transgrediert über letzteres. Die Emporhebung einzelner Beulen hielt durch das ganze ältere Tertiär an. Teilweise geschah sie aus isostatischen Gründen; die Gewölbe wurden abgetragen und mußten weiter steigen und die an ihrem Fuße abgelagerten Schichten randlich emporschleppen, während diese ihrerseits vermöge ihrer Last ihre Unterlage eindrückten. Aber auch eben dieselben Ursachen, welche die Emporwölbungen einleiteten, wirkten andauernd weiter, und die vulkanische Tätigkeit erlosch nie. Sie war noch in jüngster geologischer Vergangenheit wirksam, sowohl im Süden als auch im Norden im Gebiete des Yellowstone-Parks. Bereits 1896 hat Israel C. Russell die Lakkolithen mit der Emporwölbung einzelner Beulen in Beziehung gebracht[30], und letztere als subtuberante Gebirge bezeichnet. Neuerlich hat R. T. Chamberlin[31] die engen Beziehungen zwischen den dickschaligen Gebirgen vom Typus der südlichen Rocky Mountains zum Vulkanismus betont.

Ob neben den Aufpressungen einzelner Erhebungen in unserem Gebiete auch entsprechende Einsenkungen — Downwharps — echte Gesenke, vorkommen, ist schwer zu entscheiden. Das von Cassius A. Fisher[32] beschriebene Bighorn-Bassin könnte als eine solche gelten. Aber zwischen dem Bighorn- und dem Shoshone-Gebirge gelegen, kann es auch als eine minder gehobene Partie gelten; sicher trifft dies von dem Gebiete zu, das sich an der Grenze von Arizona gegen New Mexico zwischen die Defiance- und Zuñi-Beulen schaltet. Vor der Zeit der großen finikretazischen Erhebung sind aber in unserem Gebiete sicher große Einsenkungen erfolgt. Auf sie schließen wir aus der wechselnden Mächtigkeit der oberkretazischen Schichten, welche durchaus Seichtwasserbildungen sind und auf sinkendem Meeresboden abgelagert wurden. Angesichts der Rockies haben sie im Süden, in New Mexico, Mächtigkeiten von 800 bis 1000 m, bei Denver in Colorado solche von 2800 bis 3100 m, bei Laramie in Wyoming von 2000 bis 2100 m. Es sind insbesondere die Pierre Schichten, deren Mächtigkeit schwankt. Bei Trinidad im Süden 360—400 m mächtig, schwellen sie bereits bei Colorado Springs auf 760 m an, messen bei Denver 2350—2400 m, um im Norden bei Laramie ihre Dicke auf 1520 m, im Bighorn-Gebirge auf 360—1070 m und in Norddakota auf 340 m zu mindern[33]. Das besagt, daß die Gegend von Denver während der jüngeren Kreideperiode der Schauplatz einer besonders starken Senkung gewesen ist, die 3000 m überschritt, aber im ganzen Gebiete zur Geltung kam. Auf sie folgte dann eine allgemeine Hebung, die die oberen Kreideschichten, wie N. H. Darton[34] zeigt, stellenweise in den großen Ebenen bis 1800 m, in den Black Hills bis 4200 m, im Bighorn-Gebirge bis über 8000 m und in den Rocky Mountains vielleicht noch höher aufgetrieben hat. Daß diese Hebungen in den Gebirgen nicht durch seitlichen Schub erfolgten, hat sich gezeigt. Dafür, daß die Senkungen durch solchen bewirkt wurden, fehlt jedwelcher Anhalt. Wir haben es mit einem Auf und Ab der Kruste zu tun, dessen Ursachen wir nur im Geoplasma suchen können. Ein solches Auf und Ab zeigt sich vielfach im Gebiete von Geosynklinalen. Aber während in solchen die mächtigen, während langer Senkung entstandenen

Sedimente meist zusammengestaut werden, sind sie hier unter Beibehaltung ihrer flachen Lagerung in der Senkrechten bewegt worden. Das ist die Eigenart des Plateaugebietes, der südlichen Rockies und der Großen Ebenen.

Nach Kober steht das Plateaugebiet dem gefalteten Westen in ähnlicher Weise gegenüber, wie das böhmische Massiv den Alpen. Aber das böhmische Massiv hat die herzynische Faltung erfahren, das Plateau nicht: Es spielt die Rolle der russischen Tafel, und wenn ich auch die südlichen Rockies mit den Sudeten verglich[35], so ist der Vergleich nur ein morphologischer, kein geologischer. Aber die Sudeten gehören gleich dem Harz und dem Thüringer Walde zu den Erhebungen, die ebenso wie die südlichen Rockies, das Bighorn- und Uinta-Gebirge sowie die Black Hills ihren Fuß mit Schichtkämmen umspannen. Das ist eine morphologische Eigentümlichkeit, die nur stellenweise wiederkehrt.

Nicht bloß einzelne Aufwölbungen haben während des Tertiärs im Bereiche der Hohen Tafel fortgedauert, sondern auch deren einzelne Teile haben eine verschiedene Entwicklung durchlaufen. Die Plateaus im Westen der Rockies wurden, nachdem sie während des älteren Tertiärs größtenteils ein Gebiet der Ablagerung gewesen, ein solches der Abtragung. Diese waren am energischsten im Süden; auf dem Colorado-Plateau erfolgte die von Cl. E. Dutton[36] geschilderte Denudation, welche das Eozän, soweit es zur Ablagerung gekommen war, sowie das Mesozoikum fast gänzlich entfernte, sodaß Oberkarbon (oder älteres Perm) weithin die Oberfläche bildet. Ein sehr ansehnlicher isostatischer Anstieg muß daher hier stattgefunden haben; aber er ist nicht denkbar ohne eine ursprüngliche Hebung, die das Plateau schräg stellte. Das geschah im jüngeren Tertiär, nachdem der Colorado bereits seinen Lauf nach Süden eingeschlagen hatte. Die Großen Ebenen östlich der südlichen Rockies waren während des älteren Tertiärs in deren Nähe ein Ablagerungsgebiet, das weit nach Norden reichte. Dann doch wurden auch sie ein Abtragungsgebiet, und alle ihre Wellungen wurden eingeebnet. Hierauf bogen sie südlich der Black Hills ein und wurden neuerlich Ablagerungsgebiet, das im Norden nahe an den Missouri, im Süden in geminderter Breite bis an den Pecos reichte. Hier häuften sich die Trümmer der Rockies an, hier wurde während des Neogen eine wahre Vorlandformation abgelagert, die heute vor den Rockies fehlt[37]. Man kann sich ihre Entstehung nicht anders vorstellen als durch die Annahme, daß angesichts des Gebirges ein weiter Raum einsank. Aber heute ist er nicht mehr Aufschüttungsgebiet, sondern Abtragungsgebiet, das von den Abflüssen der Rockies, vom Platte-, Arkansas- und Canadian River zerschnitten wird. Dazwischen bildet es die High Plains. Auf eine Senkung ist eine Hebung gefolgt.

Nur an einer Stelle treten die High Plains unmittelbar an die Rockies heran. Das geschieht zwischen Cheyenne und Laramie, wo die Union Pacific Railroad zum Sherman-Passe emporführt. Herrn Professor S. H. Knight in Laramie danke ich, daß ich 1927 diese einzigartige Stelle kennenlernen konnte, die durch Eliot Blackwelder[38] zuerst bekanntgeworden ist. Das junge Neogen der High Plains stößt nämlich nicht etwa an den Fuß des Gebirges an, sondern hebt sich in allmählichem Anstiege zu dessen Höhe empor, und diese setzt

jenen Anstieg noch eine Strecke weiter fort. Die Oberfläche der Rockies am Sherman-Passe ist das korrelate Abtragungsgebiet zum Ablagerungsgebiete der High Plains; wenn diese in ihrer Gesamtheit gehoben worden sind, so müssen es mit ihnen auch die Rockies sein. Zu finikretazischer Aufwölbung ihrer einzelnen Ketten gesellt sich eine finitertiäre des ganzen Gebirges mitsamt dem Westen der Großen Ebenen.

Die Abtragungsfläche des Sherman-Passes wird im Norden von den 2600 m hohen Shermanhügeln überragt, die sich aus ihr in der Form von Klippen erheben. Es sind Überreste von Erhebungen, welche bereits zur Neogenzeit existierten und dartun, daß eine allgemeine Einebnung damals nicht stattgefunden hat. Vielmehr erinnert das Verhältnis der Hügel und Klippen zur anstoßenden Ebene an das Verhältnis der Erhebungen Arizonas zum angrenzenden Pediment, zumal das aufgeschüttete Material vornehmlich aus nur wenig gerolltem Materiale besteht und eine Arkose darstellt, deren Muttergestein der tiefgründig zerfallene und kaum zersetzte Granit des Sherman-Passes ist. Weiter westlich, auf der Medicine Bow Range hat E. Blackwelder eine ähnliche, erheblich höher gelegene Abtragungsfläche gefunden, die er für älter hält als die des Sherman-Passes. Ihr entsteigen die vergletschert gewesenen Gipfel der Kette. Er schreibt ihr eozäne Anlage zu. Darnach möchte es scheinen, als ob an der Gabelung der südlichen Rockies eine Piedmonttreppe vorhanden wäre, wie sie Walther Penck (53, S. 165) an den deutschen Mittelgebirgen nachgewiesen hat. Zu gleicher Annahme kommt man auch weiter südlich. Hier hat W. M. Davis[39] in der Hochfläche über der Stirn der Rockies in Colorado eine Abtragungsfläche, eine Peneplaine mit Monadnocks erkannt. Bei Golden setzt sie über der Stirn in 2400—2600 m ein — nach R. T. Chamberlin entspricht sie der Hochfläche des Sherman-Passes. Dann erfolgt ein neuer Anstieg zum Gebiete der Hochgipfel. Wir möchten in ihm eine weitere Stufe erblicken. Etwas abweichend liegen die Dinge bei Colorado Springs. Der Pikes Peak (4300 m) ist hier eine isolierte Aufragung aus einer Hochfläche von nicht ganz 3000 m Höhe; diese aber setzt sich längs der Utepaß-Verwerfung gegen eine 1000 m tiefere Fläche ab. Junge Brüche spielen zweifellos in der Oberflächengestaltung der südlichen Rockies auch eine Rolle neben den langanhaltenden Ablagerungsvorgängen, die nie ganz zur Einebung geführt haben. Jüngere Brüche haben dieselbe gestört. Die Stirn selbst, so imposant sie erscheint, fällt ganz oder größtenteils unter das Niveau der Neogenschichten, wenn man sich deren Anstieg zum Gebirge hin fortgesetzt denkt. Sie ist nicht, wie auf den ersten Blick scheinen möchte, das Ergebnis einer jungen Erhebung, sondern dankt, wie W. M. Davis gezeigt, ihre Entstehung vornehmlich der Ausräumung der vor den Rockies gelegenen Schichten, die noch während des Neogens bis mindestens 2500 m am Gebirge anstiegen. Die Stirn ist also ein Werk der Denudation, und die dann und wann deutlich entgegentretenden Stirnflächen zwischen den Tälern knüpfen sich wie im Ostabfalle des Kaibab-Plateaus an wiederständiges Gestein. Bei Golden werden sie von der Basisfläche der sich hier auf das vorkambrische Grundgestein direkt auflagernden Red Beds (Jura-Trias) gebildet. Dicht über den Schichtkämmen, die den Fuß des Gebirges

begleiten, sind sie beinahe intakt erhaltene Stücke einer Rumpffläche; höher ist letztere der Denudation zum Opfer gefallen, aber sie bestimmt noch die Anlage der Stirnflächen.

Die eigenartige Staffelung des Fußes der Rocky Mountains[29. 34], von Hayden Folds en echelon genannt, hat mit der letzten Emporhebung des Gebirges nichts zu tun. Sie knüpft sich an die finikretazische Aufpressung des genannten Gebirgskörpers und besteht in folgendem: Von Norden nach Süden zu springt der Abfall des Gebirges schrittweise zurück, so daß eine Reihe einspringender Winkel entsteht, wie zwischen hintereinanderstehenden Kulissen. Wo eine vordere Kulisse aufhört, taucht sie südwärts als flacher Sattel unter, der von der nächsten Kulisse durch eine flache Mulde getrennt wird. In diesen Sätteln und Mulden hat sich das paläozoische Dach der Rockies in ziemlich flacher Lagerung erhalten; an ihren Grenzen sind dessen Schichten ebenso wie das Mesozoikum steil aufgerichtet. Das erweckt den Eindruck, als ob die Rocky Mountains ein Paket dicht gedrängter Falten wären. Aber es lassen sich die Falten nicht tiefer hinein ins Gebirge verfolgen, und wir haben es wohl nur mit einer Grenzerscheinung an dem unregelmäßig begrenzten, sich heraushebenden Gebirgspfeiler zu tun. Daneben gibt es noch andere Unregelmäßigkeiten. In der Fortsetzung der Ute Verwerfung schiebt sich bei Colorado Springs der Fuß der Rockies um 10 km nach Südsüdost vor, die ihn sonst begleitenden Schichtkämme setzen auf dieser Strecke bis zum vielbesuchten Cheyenne-Berge aus, und jüngere Schuttablagerungen treten hart an den Fuß des Gebirges. Hier liegt sichtlich eine jüngere Störung, möglicherweise ein Riß vor, welche anzeigt, daß Krustenbewegungen hier bis in die jüngste geologische Vergangenheit angedauert haben[40].

Angesichts der Rockies stoßen die Gebiete des South Platte-, Arkansas und Canadian River zusammen; hier fehlt das Neogen, das in einer Entfernung von 30 bis 100 km gegenüber dem Gebirge abbricht. Seine Stirn ist zugleich Wasserscheide zwischen den genannten, für die Großen Ebenen allochthonen Flüsse und autochthonen, die gleichfalls ostwärts fließen. Weiter im Süden zwischen Canadian River und Rio Pecos bildet das Neogen die Hochfläche der staked plains, ein fast ebenes flußloses Gebiet, das seine Umgebung allenthalben überragt. Ob es eine flache Mulde darstellt oder eine flache Aufwölbung, ist geologisch nicht zu entscheiden. Morphologische Erscheinungen sprechen für eine flache langgedehnte Beule vor den Rockies, die von den Black Hills von Dakota bis zum Rio Pecos läuft, von den Flüssen der Rockies entweder durchbrochen oder — vom Pecos — umgangen wird und zahlreichen Abdachungsflächen der Großen Ebenen Ursprung gibt. Trifft diese Annahme zu, so liegt der Scheitel der finineogenen Aufwölbung östlich der Rockies, dort, wo wir die Ostgrenze der Hohen Tafel annehmen.

Wie dem auch sei: In den westlichen Großen Ebenen hat während des Neogens eine ganz ebensolche Abwärts- und Aufwärtsbewegung wie im gesamten Bereiche der Hohen Tafel während der jüngeren Kreideperiode stattgefunden.

III. Das Große Becken.

Während man unter 40° N den Fuß der Rocky Mountains bereits bei 105° w. L. erreicht, kommt man 1000 km weiter nördlich erst unter 114° w. L. zu ihm und hat ein ganz anderes Gebirge vor sich als bei Denver: Keine glatt verlaufende, sondern eine zerfranste Stirn, die in gewisser Hinsicht an die der Rauhen Alb erinnert: Sie wird von harten Sand- oder Kalksteinen gebildet, die auf weichen tonigen Sandsteinen aufsitzen. Aber die Schichtfolge ist verkehrt, die hangenden Schichten sind die älteren, sie sind proterozoisch oder paläozoisch, der Sockel ist mesozoisch. Über Hunderte von Kilometern zieht sich von Norden nach Süden diese gewaltige Überschiebung. Ich sah sie 1897 unter der Führung von George Dawson bei Kananaskis (51° N) an der Canadian Pacific Railroad[41], von wo sie von R. S. Mc. Connell beschrieben worden war[42]. Bei der Rückkehr aus dem Westen passierte ich auf der Great Northern Railroad das Gebiet der 250 km weiter südlich gelegenen Überschiebung des Glacier National Park und notierte: »Höchst auffällig ist der Schichtbau bei Summit: Kreideschichten, anscheinend überlagert von älterem Gestein . . . . Man hat eine Analogie zur Struktur der Rockies bei Kananaskis.« Seither hat Bailey Willis den Nachweis einer großen Überschiebung dahier erbracht[43]. M. R. Campbell verfolgte ihren Verlauf 85 km weit in gerader Linie; 24 km mißt mindestens ihre Breite in westöstlicher Richtung[44]. W. H. Emmons und F. C. Calkins meinen ihre Fortsetzung bei Philipsburg westlich Helena zu erkennen[45]. Das Kennzeichen aller dieser Verschiebungen ist, daß flach gelagerte paläozoische oder proterozoische Gesteine auf eine stark gestörte Unterlage von Westen her aufgeschoben sind.

320 km weiter südlich setzt an der Grenze zwischen Idaho und Wyoming, zwischen Snake- und Bear-River typisch gefaltetes Gebirge ein, das einer großen Überschiebung aufsitzt. G. R. Mansfield[46] hat das Gebiet eingehend beschrieben. Es erinnert strukturell an die nördlichen Kalkalpen in den Ostalpen. Eine Zone von nicht gerade stark gefaltetem Karbon, Trias und Jura ist ostwärts überschoben über eine stärker gefaltete Kreidezone, ähnlich wie die nördlichen Kalkalpen über die Flyschzone. Die Überschiebungsfläche des Bannock Thrust verläuft indes oberflächlich viel reichlicher gegliedert und ist flacher geneigt als die Grenze zwischen Kalkalpen und Flysch. Sie umgrenzt eine Überschiebungsdecke von mindestens 20 km Breite; die Gesamtlänge der Überschiebung mißt nach Mansfield 430 km; sie reicht bis Utah, und hier sind weitere Überschiebungen im Wasatch-Gebirge nachgewiesen[47]. 600 km weiter südwärts endlich werden in der Gegend von Las Vegas in jüngster Zeit Überschiebungen festgestellt[48], die gleich der Bannock-Überschiebung Mansfields sich nach Osten richten. Sie sind wesentlich jünger als letztere, halten sich aber auch an der Westseite des Hohen Plateaus von Wyoming, Utah und Arizona und fallen in die Flucht der Überschiebungen der nördlichen Rockies. Nördliche und südliche Rockies haben, wie bereits R. T. Chamberlin ausgesprochen hat, ganz verschiedene Struktur. Die nördlichen Rockies sind ein Gebirge mit dünnschaliger Faltung, die südlichen ein Gebiet senkrechter Hebung, wie wir zeigen konnten.

Die nördlichen Rockies können mit den Beskiden, die südlichen mit den Sudeten Mitteleuropas verglichen werden, und wie an der mährischen Pforte die Beskiden den Sudeten sehr nahe kommen, ohne daß die einen die anderen fortsetzten, so stoßen im nördlichen Montana Ausläufer der südlichen Rockies mit den nördlichen beinahe zusammen, aber die Überschiebungen der letzteren setzen sich nicht in ihnen fort. Wenn R. T. Chamberlin nördliche und südliche Rockies als ein Gebirge bezeichnet, so folgt er dem landesüblichen Sprachgebrauch. Das erste Gebirge, das der aus den Großen Ebenen kommende antraf, bezeichnete er eben als Rocky Mountains. In ähnlicher Weise hätten die Flachländer die Sudeten und Beskiden als Felsengebirge benennen können, aber daraus erfolgt nicht, daß sie ihrem Wesen nach ein und dasselbe Gebirge sind. Nördliche und südliche Rockies haben nur eines miteinander gemeinsam, den Mangel eines von ihren Trümmern aufgeschütteten Vorlandes; die an sie stoßenden Großen Ebenen sind in beiden Fällen Erosionsgebiete.

Die Fortsetzung der nördlichen Rockies erblicken wir in den Faltengebirgen zwischen Idaho und Wyoming, die freilich keinen Hochgebirgscharakter tragen. Zwar ragen sie bis 2700 m auf, aber ihre Reliefenergie ist selten 1000 m. In ihren Formen gleichen sie mehr den Beskiden als den Alpen. Durch ihre stattlichen Überschiebungen stehen sie beiden nahe, ebenso dadurch, daß sie eine andere Schichtfolge haben als die angrenzenden Plateaus. In ihnen sind Trias und Jura vornehmlich marin ausgebildet; weiter östlich ist die erstere ganz, der letztere größtenteils kontinental. Umgekehrt kommt in ihnen nicht das laurentische Sockelgestein zum Vorschein, das dicht vor ihnen in der Windriver-Kette hoch aufragt. Das ist der große Unterschied zwischen dem Plateau-Gebiete und den südlichen Rockies auf der einen Seite und den Falten zwischen Bear- und Snake-River, daß in letzteren altes Gestein gänzlich fehlt, ebenso wie in den nördlichen Kalkalpen im Vergleich zum böhmischen Massiv. Die Faltung kann daher hier wie da nicht tief gehen, in beiden Fällen ist es nur eine beschränkte Schichtfolge, die sich an der Zusammensetzung einer Schubdecke beteiligt. Es sind nicht Kontinente, die aneinanderstoßen, wobei der eine mit seiner ganzen Schichtfolge am anderen brandet, sondern in Bewegung geraten sind nur Pakete von 1 bis 2 km Mächtigkeit. Darunter haben wir Gleitflächen zu denken, auf denen sie sich bewegten und zusammenstauten. Als solche dienen gewisse Schichtgrenzen. Im Idaho-Wyoming-Grenzgebirge besteht das eine Paket aus Karbon bis Jura, ein westlicher gelegenes aus älterem Paläozoikum. Beide liegen getrennt nebeneinander auf der Bannock-Schubfläche. In zwei Dingen ist die europäische Entwicklung von der nordamerikanischen verschieden: Hoch erheben sich die Alpen in Mitteleuropa über ihren Vorlagen und sind von ihnen durch ein Vorland getrennt, das sie und die Karpathen umschlingt. Die Faltungszone des Fernen Westens hingegen bleibt hinter den vorgelagerten Gebirgen zurück und entbehrt eines solchen Vorlandes. Zwar sind die Kreideschichten, auf die sie aufgeschoben ist, kontinental, wie die jüngere Süßwassermolasse des Alpenvorlandes und gleich dieser in großer Mächtigkeit in einer Geosynklination abgelagert, aber diese Zone ist in ihrer Ausdehnung beschränkt und ihre Beziehungen zur marinen Kreide Wyomings nicht geklärt,

der die Beulen des Bighorn-Gebirges oder die Ketten der südlichen Rocky Mountains entsteigen; ausgedehnte Eozänablagerungen schalten sich dazwischen und greifen auf die gefalteten Kreideschichten der Grenzketten diskordant über.

Nach Norden tauchen die Faltenketten von Wyoming-Idaho unter mächtige jüngere Effusivgesteine, nach Süden dünnen sie sich aus, nach Westen verlieren sie ihre morphologische Selbständigkeit und weichen den Basin Ranges, jenen merkwürdigen Ketten, die für das abflußlose Große Becken zwischen dem Wasatch-Gebirge und der Sierra Nevada kennzeichnend sind. Nie sind sie so breit wie die Beulen-Ketten des Plateaugebietes, und vor allem, es fehlt ihnen die Umrahmung mit Schichtkämmen. Meist sind sie schmal und langgedehnt, voneinander getrennt durch breite Senken. Darin dehnen sich jugendliche Aufschüttungen jungneogenen oder pleistozänen Alters, entstanden auf Kosten des meist paläozoischen Gesteins der Ketten. Kleine Abtragungsgebiete und ausgedehnte korrelate Ablagerungen liegen nebeneinander. In ihrer Struktur offenbart sich dort, wo die Ketten aus Schichtgesteinen bestehen, Faltung, jedoch gehen Schicht und Gebirgsstreichen, wie beim Harze, auseinander; sie schneiden sich unter meist spitzem Winkel.

Grove Karl Gilbert[49] hat zuerst die Aufmerksamkeit auf die Eigenart der Basin Range-Struktur gelenkt und darauf hingewiesen, daß hier Erhebung längs Verwerfung scharf zu trennen ist von älterer Schichtfaltung. Aber nachgewiesen sind nur sehr wenige Verwerfungen. Gilbert[50] ließ sich, wie er selbst schreibt, bei der Betrachtung der einzelnen Ketten vornehmlich von morphologischen Erwägungen leiten. Welche Erscheinungen hier maßgebend sind, hat William Morris Davis[51] scharf herausgearbeitet. Er legt namentlich Gewicht auf die Stirnflächen der Ketten, die er Facetted Spurs nennt und auf Verwerfungen zurückführt. Eine ganze Reihe von Arbeiten, namentlich von George D. Louderback[52], verwerten seine Gesichtspunkte, während Walther Penck[53] die Stirnflächen als Flexuren deuten möchte und in den Basin Ranges gleich wie in ähnlichen Erscheinungen Südamerikas Großfalten erblickt. Andere Meinungen über ihre Entstehung bespricht Gilbert in seiner nachgelassenen Arbeit[50], welche die Literatur bis 1912 eingehend würdigt.

Das Große Becken dehnt sich zwischen Wasatch-Gebirge im Osten und der Sierra Nevada im Westen. Beide Gebirge werden als Kippschollen (Tilted Blocks) aufgefaßt, welche nach außen hin sanft abfallen, gegen das Becken mit seinen Ketten hin aber jäh abbrechen. Der Steilabfall des Wasatch-Gebirges in der Nähe von Salt Lake City schneidet das Schichtstreichen unter einem halben rechten Winkel und läuft schräg zu einer Synklinalen, welche paläozoische und mesozoische Gesteine zwischen zwei Aufragungen archaischer Gesteine einsenkt. Ihre einzelnen Glieder bilden die Berge bei Salt Lake City, deren Aufbau durch Hyrum Schneider[54] klargelegt worden ist. Diskordant über diese gefalteten Schichten breitet sich in flacher Lagerung die eozäne Wasatch-Formation, die nördlich der Stadt in ansehnlicher Mächtigkeit ausstreicht. Die Schichtfaltung ist älter, der Gebirgsabfall ist jünger. An seinem Fuße fand Grove Karl Gilbert[55] ganz junge Verwerfungen. Die am Rock Creek Canyon bei Provo besuchte ich 1909 mit meinem Sohne. Sie laufen quer über das Delta, das der Fluß in den Bonneville-See geschüttet

hat und zeigen eine jugendliche Erhebung des östlich von ihnen gelegenen Gebirges an. Gleiches bezeugen die Verwerfungen, welche die Endmoränen des Dry und Little Cottonwood-Gletschers, zu denen mich 1928 Prof. Hyrum Schneider führte, durchsetzen. Sie schließen am Gebirgsfuße einen etwa 4 km langen, 150—200 m breiten grabenförmig gesenkten Streifen Landes ein. Dessen Flanken sind nackt, die Vegetation hat noch nicht Besitz von ihnen ergreifen können. Zeichen eines Herabbiegens vom Gebirge fehlen hier; auch ich kann dessen Abfall nur mit einem Bruche in Verbindung bringen, an dem noch gelegentlich Nachsitzen stattfindet. Von Hyrum Schneider entdeckte Rutschflächen nördlich Salt Lake City veranschaulichen die Verwerfungsfläche.

Die jungen Brüche liegen nicht am Fuße der Facetted Spurs von Davis. Letztere steigen erst in einiger Entfernung von ihnen an. An der Mündung des Parley Canyon bei Salt Lake City liegt vor ihnen noch eine breite Felsterrasse, teilweise bedeckt mit den Uferbildungen des alten Bonneville-Sees. Unter diesen bricht sie jäh ab; wo dies geschieht, suchen wir die Hauptverwerfung. Ob die Felsterrasse auch gegen das Gebirge hin durch einen Bruch begrenzt ist und eine Staffelscholle darstellt, konnte ich nicht erkennen. Ich vermag daher nicht zu entscheiden, ob sie gleich der Felsfläche, auf der weiter nördlich das St. Marys-Kloster steht, zu den »Spurs« von Gilbert gehört oder eine Fußfläche nach der Art eines Pediments ist, oder eine alte Felsterrasse, wie sie H. Hassinger[56] aus der Umgebung von Wien beschrieben hat. Sollte dies zutreffen, so wären die Facetted Spurs jenen Abtragungsflächen an die Seite zu stellen, welche über den Pediment ansteigen. Gilbert hegt keinen Zweifel, daß die Facetted Spurs des Wasatch-Gebirges ziemlich wenig abgetragene Verwerfungsflächen sind, zumal er am Fuße des Gebirges hie und da Rutschflächen fand, die ihnen parallellaufen und im Mittel unter einem Winkel von 33° westwärts fallen. 120 km weit hat er den Bruchrand des Gebirges verfolgt, der nur annähernd geradlinig verläuft und im einzelnen einige Knickungen aufweist. Die Sprunghöhe schätzt er unfern Salt Lake City auf 3000 m; dem entspricht beim mittleren Fallen der Verwerfungsfläche ein Abrücken (heave) der Hangendscholle um 4,4 km. Gegen Norden wird die Sprunghöhe kleiner, über dem scharfen oberen Rande des Gebirgsabfalles dehnt sich hier eine westwärts geböschte Fläche: Möglicherweise hat sie mit einer Verbiegung zu tun, die der Verwerfung vorausging.

Am Ostabfalle der Sierra Nevada fuhr ich 1928 mit Prof. Richard J. Russell vom Mono-See aus entlang. Er ist am ansehnlichsten in Owens Valley, der breiten Einsenkung zwischen Sierra Nevada und Inyo-Kette. 180 km streckt sich dieses mit einer Bodenbreite von 3 bis 13 km zwischen Gebirgen, die im Westen 4000 m, im Osten 3000 m überschreiten. Dabei ist die Bodenhöhe zwischen 1100 und 1200 m. Der landschaftliche Eindruck ist der eines Grabens von geringerer Länge und Breite, aber größerer Tiefe als die oberrheinische Tiefebene. Am 26. März 1872 war Owens Valley der Schauplatz eines sehr starken Erdbebens[57], welches den Ort Lone Pine gänzlich verheerte. Heute noch sieht man die damals entstandenen Brüche. Sie begleiten den Fuß der Alabama-Hügel, die sich im Tale erheben. Der Ostflügel ist meist der gesenkte; nördlich Lone Pine ist er um beinahe 10 m herabgesenkt,

und ein Verwerfungsabfall kann hier fast 9 km weit ununterbrochen verfolgt werden. Quellen treten an ihm zu Tage, denn er bringt die tonigen Sedimente des alten Owens-Sees über Tal. Die Straßenverbreiterung dicht nördlich Lone Pine legte August 1928 seine Struktur bloß. Deutlich waren die hangenden schwarzen Schichten am Verwerfungsabfalle abwärts gebogen. Auch konnte ich im Dorfe noch deutlich die 1872 verursachte Verschiebung einer quer zur Verwerfung laufenden Baumreihe sehen: Das westliche Stück liegt heute 3 m nördlicher als das Oststück. Der Ostflügel der Verwerfung liegt also nicht bloß stellenweise 10 m tiefer, sondern auch stellenweise 3 m südlicher als der Westflügel (Tafel XIX bei Hobbs).

Die Monographie von Adolph Knopf[58] verzeichnet außer den 1872 entstandenen Brüchen noch mehrere andere jugendliche in Owens Valley, die sich meist in der Talsohle oder wenigstens nahe derselben strecken. Die Flanken des Tales verlaufen vielfach glatt zwischen den als Stirnflächen der angrenzenden Gebirge in tiefen Schluchten mündenden Seitentälchen und machen darum den Eindruck, aus Verwerfungsflächen hervorgegangen zu sein. Dies gilt insbesondere von der Westflanke dicht bei Bishop unfern Rawson Creek. Nackt und steil fällt ihre untere Partie ab, nur ganz leicht gekerbt, oben steigt sie sanfter an, schütter bewaldet; vor ihr dehnen sich Schuttkegel, überstreut mit riesigen Blöcken. Dort, wo neben den glatten Stirnflächen der Schutt höher ansteigt, wird er geradlinig von einem Absatze durchzogen, dem Anscheine nach eine jugendliche Verwerfung; vor der Mündungsschlucht eines Tälchens eine Therme. Hier kann ich die von Walther Penck ausgesprochenen Zweifel an der Bruchnatur der Stirnflächen nicht teilen, aber, wie wir gesehen haben, knüpfen sich nicht alle Stirnflächen an Brüche. Auch in Owens Valley liegen die Dinge nicht allenthalben gleich. Unweit des Crater-Berges treppt sich die Oberfläche von Westen herab zur Talsohle und ist nur unten steil abgestutzt; nordwestlich Independence meint man eine Herabbiegung zu sehen. Weiter südlich folgen allerdings abgestutzte Riedel und eine Schuttkegelentwicklung von seltener Großartigkeit. Sie überschwemmt beinahe die Alabama-Berge bei Lone Pine, deren Granite noch ziemlich weit unter ihnen verfolgt werden können. Owens Valley ist nicht aus einem Gusse. Herabbiegungen und staffelförmiges Absitzen scheinen zu verschiedenen Zeiten an seiner Entstehung zusammengewirkt zu haben. Die Inyo-Berge in seinem Osten sind bereits eine typische Basin Range, deren Begrenzung durch Verwerfungen hier zweifellos ist.

Die Westseite von Owens Valley ist nur der südlichste Teil des Ostabfalles der Sierra Nevada; auch weiter nördlich trägt er den Charakter eines Bruchrandes. Allerdings sind auch hier durch Louderback die Brüche nur morphologisch erwiesen, aber Abbiegungen fehlen nicht. Der Ostabfall der Sierra Nevada ist ein genaues Gegenstück zum Westabfalle des Wasatch-Gebirges. Das zwischen beiden Gebirgsabfällen gelegene Gebiet senkt sich nach beiden hier im allgemeinen ein und hat mitten zwischen beiden eine Anschwellung von über 2000 m Höhe, aus der die Snake Range bis 3980 m, die Humboldt- oder Ruby-Kette bis 3450 m ansteigt. Daneben gibt es ganze Schwärme anderer Basin Ranges, voneinander durch breite Bolsone getrennt,

in denen hier und da Endseen liegen, die aber meistens leer sind und nicht immer Reste alter Seen bergen.

Im Osten bestehen die Basin Ranges meist aus offen gefalteten paläozoischen oder proterozoischen Gesteinen; manche, wie z. B. die Humboldt-Range, haben antiklinalen Bau, andere, wie die in ihrer Fortsetzung gelegenen White Pine Range, die Quinn Canyon und Grant Ranges, dagegen synklinalen[59]. Ausgeschlossen ist daher, daß die Ketten unmittelbar durch die Faltung gebildet sind. Auf letztere ist eine starke Abtragung gefolgt, die stellenweise zu einer Umkehrung des Reliefs führte. Die westlichen Ketten werden vornehmlich aus jungvulkanischen Gesteinen aufgebaut, die einer flachen Abtragungsfläche älterer Sedimente aufruhen; die Trias ist unter denselben vertreten. Von einigen dieser Ketten ist sicher, daß sie durch Verwerfungen begrenzt werden. Das gilt namentlich, wie Richard Joel Russell[60] gezeigt, von der Warner Range im Nordosteck von Californien. Sie ist im Norden beiderseits, im Süden nur auf der Ostseite von Verwerfungen begrenzt, durch die sie stellenweise um 1800 m über ihre Umgebung hervorgehoben ist. Ausdrücklich bemerkt R. J. Russell, daß in ihnen jede Spur von Kompression fehlt. Schichtbiegungen kommen nicht vor; die Verwerfungen fallen normal unter 55°; die Auseinanderrückung der verschobenen Flügel ergibt sich auf jeder Seite zu 1.26 km. Die Krustenbewegungen dauern noch an; weithin ziehen sich am Fuße des Gebirges junge Verwerfungen entlang.

Hier gewinnen wir einen Anhaltspunkt für das Alter der Ketten. Sie sind jünger als die Massenergüsse im Westen des Großen Beckens und mit Gilbert und Louderback fassen wir dessen Entwicklung wie folgt auf: Auf die Faltung der paläozoischen Schichten im Osten, der paläozoischen und triasischen im Westen folgte eine lange Zeit der Abtragung. Während des Neogen geschahen dann enorme Lavaergüsse, begleitet von Tuffablagerungen. Nach dieser heftigen vulkanischen Tätigkeit zerbrach das Land in einzelne Schollen, welche nicht nur in der Vertikalen, sondern auch in der Horizontalen gegeneinander verworfen wurden; die zwischen ihnen entstandenen Gesenke wurden durch ihre Abtragungsprodukte verschüttet, was stellenweise schon im Jungtertiär begann. Heute noch dauert diese Schollenbewegung an. Es sind aber nicht die Ketten, welche emporsteigen, sondern die zwischen ihnen befindlichen Bolsone, welche wieder sinken. Death Valley biegt sich bis unter den Meeresspiegel. Der Boden von Owens Valley wird förmlich in die Tiefe gezogen; auch andere Senken sacken sich weiter ein, wie die so häufigen jugendlichen Randverwerfungen lehren. Sehr bedeutend ist die Mächtigkeit junger Ablagerungen in diesen Senken. Am Jordan, südlich vom Großen Salzsee, sind sie mit 400 m noch nicht durchbohrt worden, sie reichen also bis unter 900 m Meereshöhe herab. So flache Verwerfungen, wie sie nach Gilbert den Abfall des Wasatch-Gebirges bedingen, sind auch leichter zu verstehen als Absinken des hangenden Teiles, denn als Aufpressen des Liegenden; bei letzterem Vorgange wäre dieses nicht bloß zu heben, sondern müßte auch die Reibung an seinem flachen Dache überwinden. Die jungen Brüche am Fuße des Wasatch-Gebirges mahnen an die Randklüfte von Gletschern: Es bewegen sich die jungen Aufschüttungen vom Fuße des Ge-

birges weg, sie gleiten nach abwärts und reißen dabei von jenem ab. Die kleine Grabenverwerfung vom Little Cottonwood Canyon ist nur eine Randkluft, in die ein Teil ihrer Flanke eingesunken ist, kein Spalt, der in große Tiefe führt. Auch diese jüngsten Krustenbewegungen werden von vulkanischer Tätigkeit begleitet. Junge Vulkane begleiten den Ostfuß der Sierra Nevada vom Mono Lake nach Süden und treten vor dem Westfuße des Wasatch-Gebirges im Gebiete des Großen Salzsees auf. Der einzige noch tätige Vulkan der Vereinigten Staaten ferner, der Lassen Peak, sitzt auf der nördlichen Sierra Nevada auf, die ganz von jungvulkanischen Gesteinen überdeckt ist.

Diese Entwicklungsgeschichte stellt uns vor einige schwierige Probleme. Das Große Becken mißt 700 km Breite, und wenn seine Sedimente durch Faltung ein mittleres Einfallen von 30° haben, so sind sie um 100 km zusammengepreßt worden. Dabei sind aber von ihr nur paläozoische und im Westen triasische Schichten ergriffen, die archaische Unterlage wird nicht zutage gebracht. Wo sie noch auf Bailey Willis' geologischer Karte von Nordamerika am Humboldt-Gebirge angegeben ist[61], hat sich seither gezeigt, daß jüngere Granite vorliegen[62], und vielleicht verhält es sich ebenso an den wenigen anderen Stellen. Deswegen rücken die Basin Ranges durch ihren Schichtbau in dieselbe Reihe wie die Ketten an der Grenze zwischen Idaho und Wyoming, und wieder entsteht der Eindruck, daß die Faltung ein sehr oberflächliches Phänomen der Erdkruste ist, nicht entstanden durch einen ungeheuren in ihr herrschenden Seitendruck, sondern eher durch Herabgleiten auf geneigter Unterlage. Das weitere Problem ist, daß die Heraushebung der Ketten mit Zerrungen begleitet war. Einige Beträge konnten wir von solcher vom Fuße des Wasatch-Gebirges und von der Warner Range mitteilen; sie werden sich erheblich summieren, wenn sich herausstellen sollte, daß alle Ketten nach demselben Plane gebaut sind. Aber wohin dehnte sich das Große Becken, wenn es an Breite um Dutzende von Kilometern gewann? Sind nicht vielleicht die Bolsone die Stellen, wo in der Tiefe Zusammenpressungen die Zerrungen an den Flanken wett machen, oder geschieht solches durch die von Hewett entdeckten Überschiebungen im Süden? Sehr vieles ist noch offen.

IV. Schluß. Bewegungen des Geoplasma.

Nur wenige, allerdings bedeutsame Züge hat das Große Becken mit der Hohen Tafel gemein: Beide Gebiete sind Hochländer, die ihre letzten Krustenbewegungen nicht durch Kompression erfahren haben und in das Bereich jungvulkanischer Tätigkeit fallen. Letztere zeichnet den ganzen Westen beider Amerika aus und dringt mit der Hohen Tafel tiefer als sonst in das Innere ein. Aber sonst sind sie grundverschieden, nach Oberflächengestaltung und geologischer Geschichte. Schwärme langgedehnter schmaler Ketten im Westen, breite Plateaus, aus denen plumpe Ketten oder rundliche Beulen entsteigen, im Osten. Hier flach gelagerte Schichten, nur aufgerichtet und selten überbogen an Pfeilern, die sie durchstoßen, im Westen ziemlich stark gestörte Lagerung, die sich aber nicht auf den Saum von Pfeilern beschränkt. Große Effusionen im Westen, mächtige Intrusionen im Osten, aber daneben auch hier Effusionen von Belang,

während die Intrusionen im Westen selten zu sein scheinen. Auf der Tafel Wirkungen eines von unten kommenden Druckes, im Becken Zeugen eines nach unten wirkenden Zuges.

Beides läßt sich nicht durch Annahme eines Gewölbedruckes innerhalb einer sinkenden Kruste erklären. Welche Festigkeit müßte diese haben, um einen solchen Gewölbedruck Hunderte von Kilometern weiterzuleiten, damit sich dann die Kruste in den Black Hills und den Rockies so aufbiegt, daß sie dem unterliegenden Archaikum ein Aufsteigen ermöglicht. Ließe sich ein solches Aufbiegen allenfalls noch verstehen, so lassen sich die Einbiegungen der Kruste, die wir Gesenke nennen möchten, durch einen in der Kruste fortgepflanzten Gewölbedruck nicht erklären; denn solche Einbiegungen könnten sich nicht frei aufwölben, sondern müßten die Massen unter sich verdrängen. Dabei finden sie sich in Gebieten, in denen jetzt gar kein seitlicher Druck, sondern nur seitlicher Zug in der Kruste zu erkennen ist. Hierin wurzeln die Schwierigkeiten, die sich der Anwendung der Kontraktionstheorie im Fernen Westen von jeher entgegengestellt haben. Allerdings gibt es im Großen Becken Anzeichen eines Zusammenschubs und an seiner Grenze treten bedeutende Überschiebungen auf. Aber sie sind dünnschalige, sie verraten nicht eine Kompression der ganzen Kruste, sondern nur ein Zusammenstauen ihrer obersten Partie, wie es z. B. infolge des Herabgleitens auf geneigter Unterlage entsteht. Eine steil zu einem Gesenke abfallende Aufwölbung bietet alle Vorausbedingungen sowohl für ein Abgleiten seiner Schichten als auch deren Überschiebung über die im Gesenke abgelagerten Sedimente. Eine hohe Geoantiklinale und eine danebenliegende Geosynklinale, eine große Grundfalte, erscheint mir heute noch wie vor mehr als 20 Jahren[63] als die Voraussetzung ansehnlicher Krustenbewegungen in der Horizontalen, die also im wesentlichen wie alle Rutschungen Gravitationswirkungen wären. Das Bewegungsbild der Wyoming-Idaho-Grenzketten paßt vorzüglich zu dieser Vorstellung. Sie sind hineingerutscht in eine Geosynklinale, in der sich außergewöhnlich mächtige kontinentale Sedimente der Kreide abgelagert hatten. Diese wurden unter ihnen gefaltet; aber es entstand dabei kein Gebirge, sondern es wurde nur ein Loch zugeschoben; flach gelagertes Eozän breitet sich weithin über das Überschiebungsgebiet. Es ward aber die Geosynklinale nicht durch Wandern der Grundfalte emporgewölbt, so wie es in den Alpen geschehen ist.

Wir haben keinen anderen Anhalt, die Ursache der Krustenbewegungen in der Kruste selbst zu suchen. Für die Annahme einer Drift nach Westen gibt es im Fernen Westen ebensowenig Grund wie für eine Polflucht. Wir können den geologischen Bau des Fernen Westens, sowohl des Großen Beckens wie der Hohen Tafel, nur unter Annahme von Zustandsänderungen oder von Bewegungen in der Tiefe verstehen.

Zustandsänderungen in der Tiefe können eintreten, wenn hier Massen aus dem krystallinen in den geschmolzenen Zustand übergehen. Erstarrt in der Tiefe des Großen Beckens eine liquide Masse krystallin, zieht sie sich zusammen und ihr Dach sinkt ihr nach, sind ferner in demselben Flächen geringen Widerstandes vorhanden, so kann dabei eine Basin-Range-Struktur entstehen. Umgekehrt, wenn unter der Hohen Tafel Massen vorhanden sind, die aus dem

krystallinen in den geschmolzenen Zustand übergehen, so können sie sich in ihr Dach drängen, Pfropfen darin treiben, die Beulen über sich aufwölben oder an Flächen geringsten Widerstandes sich in langgedehnten keilförmigen Streifen emporschieben und über sich eine Gebirgskette nach der Art der südlichen Rocky Mountains auftreiben. Derartige Zustandsänderungen der Massen in der Tiefe würden nicht mit Änderungen des isostatischen Gleichgewichts verbunden sein. Die Massen in den einzelnen Prismen bleiben unverändert. Sie erscheinen uns heute nicht mehr so undenkbar wie früher, seitdem wir radioaktive Vorgänge kennen, die zu örtlicher Wärmeentwicklung auch in der Schale der Erde führen können. Ihnen zufolge könnten Schmelzungen in der Tiefe erfolgen, die zu Aufwölbungen und Ergüssen führen, während die darauf folgende Erstarrung Kontraktion bedingt. So könnte der Mechanismus der letzten Bewegungen im Großen Becken verstanden werden; der im Bereiche der Hohen Tafel würde jedoch etwas andere Annahmen erheischen. Aber das wechselnde Auf und Ab des Großen Beckens und der Hohen Tafel würden wiederholte Zeiten der Schmelzung und des Wiederkrystallierens erheischen, die in den beiden Gebieten miteinander alternieren müßten. Letztere Tatsache macht die Annahme von Bewegungen in der Tiefe plausibler. Dies erhellt aus einem Blick auf die geologische Geschichte beider Gebiete[64].

Seit Beginn des Mesozoikums verhalten sie sich verschieden, meist entgegengesetzt. Meer breitete sich während der Triasperiode über das Große Becken und reichte zeitweilig bis zu den Grenzketten von Wyoming und Idaho; weiter östlich, im Bereich der Hohen Tafel, dehnte sich währenddem Land, auf dem kontinentale Schichten abgelagert wurden. Vulkanische Tätigkeit setzte nur im äußersten Westen des Beckens ein. Während der Juraperiode entwickelte sich in dessen Osten eine Schwelle; sie trennte das westliche Meer von einem östlichen, das sich nur über den Norden der Hohen Tafel breitete. Während der Kreideperiode wuchs diese Schwelle gegen Westen, das Meer im Osten vertiefte sich mehr und mehr und gewann an Ausdehnung, es breitete sich schließlich über das ganze Gebiet der Hohen Tafel, während das Große Becken in seiner gesamten Ausdehnung Land geworden war. Die Verhältnisse hatten sich im Vergleich mit der mittleren Triasperiode gänzlich umgekehrt. Wahrscheinlich nun erst erfolgten die Überschiebungen an der Grenze zwischen Idaho und Wyoming am Saume des Großen Beckens sowie die der nördlichen Rockies. Gleichzeitig oder kurz danach begann die Heraushebung der südlichen Rockies, des Bighorn- und Uinta-Gebirges sowie der Black Hills von Dakota. Das waren, wie wir gezeigt haben, zwei ganz verschiedene Arten von Krustenbewegungen; nur von der einen, der Heraushebungen im Bereiche der Großen Tafel, wissen wir, daß sie zur Bildung von Gebirgen führte, während die ausgedehnte Überdeckung der Kreidefalten des Wyoming-Idaho-Gebirges durch flach gelagertes Eozän bekundet, daß sie kein Gebirge bildeten. Ein solches dürfte sich weiter westlich erhoben haben.

Während des älteren Tertiärs war das Große Becken durchaus Abtragungsgebiet, während sich auf der Hohen Tafel zwischen den Gebirgsbeulen ungeheure Sedimentmassen ablagerten: Anhaltende Hebung daher im Westen,

fortdauernde aber lokalisierte Senkung im Osten. Während des jüngeren Tertiärs aber biegt hier vor den Rockies ein Streifen Landes ein, während das Gebirge samt den westlich von ihnen gelegenen Plateaus abgetragen wird; über den westlichen Teil des großen Beckens breiten sich ungeheure Lava- und Tuffmassen. Hierauf folgt der Einbruch des Großen Beckens, wobei es in langgedehnte, schmale, gebirgige Schollen zerfällt, voneinander getrennt durch Bolsone. Das Senkungsgebiet östlich der Rockies steigt hingegen mit diesem an, und die Hohe Tafel erhält nun erst ihre ansehnliche Höhe.

Charakteristisch für diese Entwicklung ist, daß beide Gebiete einen wiederholten Wechsel ihrer Bewegungsrichtung aufweisen. Zu Beginn des Mesozoikums senkt sich das Große Becken, dann steigt es anhaltend bis zum jüngeren Tertiär, um hierauf einzubrechen. Die Tafel steigt anfänglich, senkt sich dann, nur örtlich durch Aufwölbungen unterbrochen, um sich schließlich neuerlich zu heben. Das Bemerkenswerte dabei ist, daß in allem diesem Auf und Ab sich die Hohe Tafel immer in entgegengesetzter Richtung bewegt wie das Große Becken; man meint in beiden Gebieten Schwingungen zu sehen, im Osten und Westen mit verschiedener Phase, in der Mitte ein Schwingungsknoten an der Grenze der beiden Gebiete. Dies erinnert an die isostatischen Bewegungen, welche während des Eiszeitalters in den Gebieten der großen Vergletscherungen und ihrer Umgebung erfolgt sind. Aber während hier die Ursache der Bewegungen in einer Belastung und einer Entlastung der Kruste von oben her liegt, ist eine solche Annahme hier ausgeschlossen. Zwar werden isostatische Bewegungen stattgefunden haben; das aufsteigende Gebirge wurde abgetragen und dadurch entlastet, das sinkende belastet. Aber beide Vorgänge setzen Krustenbewegungen voraus, und aus diesen haben wir auf ein Hin und Her des Geoplasma zu schließen. Daß im Fernen Westen große Bewegungen unter der Kruste stattgefunden haben, lehrt seine große, mit seinen Krustenbewegungen verknüpfte vulkanische Tätigkeit. Sie entfaltete sich bereits während der Trias und des Jura im pazifischen Gebiete, und verbreitet sich dann während des Tertiärs in der geschilderten Weise sowohl über das große Becken wie auch über die Hohe Tafel; allenthalben sind es dieselben Gesteine, wie Henry Washington[65] gezeigt hat, reich an Kieselsäure mit mäßigem Kalk- und Alkaligehalt, arm an Eisen und Magnesia, die zum Erguß gelangen oder eingespritzt wurden in die starre Kruste, mit einem mittleren spezifischen Gewichte von 2.717 im Großen Becken und 2.735 in den südlichen Rocky Mountains. Sie weisen auf einen gemeinsamen Magma-Herd in der Tiefe. Gleichwohl möchte ich nicht ohne weiteres Magma und Geoplasma für ein und dasselbe halten. Die Möglichkeit, daß sie etwas Verschiedenes darstellen, oder daß das Magma nur eine bestimmte Erscheinungsform des Geoplasma ist, ist durchaus gegeben; denn nicht alle Krustenbewegungen sind in der Weise mit Magma-Bewegungen verbunden, wie dies im Fernen Westen der Fall ist. Die großen isostatischen Bewegungen während des Eiszeitalters stehen, soweit sich erkennen läßt, außer Beziehungen zu Magma-Bewegungen. Aus ihnen können wir nur auf Beweguugen des Geoplasma schließen.

Finden selbständige Bewegungen des Geoplasma unter der Kruste statt, so sind Störungen des isostatischen Gleichgewichtes zu gewärtigen. Dasselbe ist in der Tat nirgends auf der Erdoberfläche ein vollständiges. Um welche Abweichungen es sich handelt, kommt allerdings in sehr verschiedener Weise zum Ausdruck, je nach der Methode, nach welcher man die Schweremessungen reduziert. Ein Kärtchen, das ich nach den neuesten, von W. Bowie[66] mitgeteilten Schweremessungen in den Vereinigten Staaten mit Bouguerscher Reduktion entworfen habe, zeigt im gesamten Fernen Westen ein ungeheures Schweredefizit, welches ziemlich parallel zu den Erhebungsverhältnissen läuft, und nichts weiteres lehrt, als daß unter den Höhen ein Schweredefizit vorhanden ist, daß also in großen Zügen isostatisches Gleichgewicht herrscht. Ein Kärtchen der Schwereanomalien nach der Hayfordschen Reduktion, das W. Bowie mitteilt, zeigt hingegen nur im Großen Becken und auf dem Colorado-Plateau ein Schweredefizit, im Bereiche der Rocky Mountains, sowohl der nördlichen wie auch der südlichen, einen Massenüberschuß an, der seinen höchsten Wert nahe den Black Hills von Dakota erreicht. Ein solcher wird auch von einem älteren Kärtchen Bowies[67] der Schwerebeobachtungen nach der Fayeschen (Freiluft) Reduktion angezeigt. Danach könnte es in der Tat scheinen, als ob im Fernen Westen das isostatische Gleichgewicht gestört sei; allerdings in nicht größerem Umfange als am Puget Sunde und südwestlich vom Oberen See.

Es kann scheinen, als ob sich das Große Becken und die Hohe Tafel in bezug auf die Bewegungen des Geoplasma wie zwei korrelate Gebiete verhielten, zwischen denen es in einem gewissen Rhythmus hin und her schwankt. Aber es bieten sich auch andere Erklärungsmöglichkeiten. Man muß nicht unbedingt, sozusagen, an stehende Wellen des Geoplasma unter ihnen denken. Es könnte sich auch um fortschreitende Wellen handeln. Man könnte annehmen, daß erst ein Wellenberg, dann ein Wellental vom Großen Becken zur Hohen Tafel gelangt. Würde man sich vorstellen, daß der Wellenberg aus weniger dichtem, das Wellental aus dichterem Material besteht, so müßte eine solche Bewegung keine ansehnlicheren Störungen des isostatischen Gleichgewichts erheischen. Eine Tatsache spricht zu ihren Gunsten: Während im Neogen der Streifen der High Plains einsank, haben wir heute ein Senkungsgebiet östlich davon, am mittleren Mississippi. Man könnte glauben, daß das Wellental der High Plains hierher gelangt sei, während in letzterem ein Wellenberg angerückt sei. Aber wenn wir hiernach auf eine fortschreitende Bewegung des Geoplasma schließen müßten, entsteht die Frage: wohin strömt es? Haben wir es mit einem Systeme geoplasmatischer Bewegungen zu tun? An ein solches denkt z. B. Robert Schwinner[68] unterhalb der starren Kruste, und Walther Penck[69] nimmt hier magmatische Bewegungen an, welche sich im Bewegungsbilde der Kruste spiegeln.

Wir können diese Fragen nicht weiter verfolgen. Es soll uns vorerst genügen, selbständige Bewegungen des Geoplasmas wahrscheinlich gemacht zu haben und durch einige Ausblicke Richtungen anzudeuten, in denen sich weitere Untersuchungen bewegen möchten. Sie werden nur durch das Zusammenwirken geologischer und geophysischer Methoden gefördert werden

können. Zu welchen Fragestellungen die ersteren führen, ist hier zu zeigen versucht worden. Dabei könnte vor allem angeknüpft werden an die großartigen geologischen Untersuchungen des Fernen Westens, welche vor 60 Jahren begannen und denen noch viele andere gefolgt sind. Gleichwohl ist unsere geologische Kenntnis, insbesondere im Großen Becken in Utah und Nevada, noch eine beschränkte, und neue Beobachtungstatsachen können zu anderen Schlußfolgerungen führen. Vor allem wird erst durch die Ausdehnung der Schweremessungen noch viel Neues gewonnen werden. In Californien ist damit begonnen worden. Möchten diese intensiveren Untersuchungen bald über das Gebiet ausgedehnt werden können, das hier behandelt wurde. Es ist ein klassisches. Hier unterschied 1890 G. K. Gilbert die länderbildende Epirogenese und die gebirgsbildende Orogenese. Beide Ausdrücke haben seither allgemeinen Eingang gefunden. Aber der Sinn des einen hat, wenigstens in der deutschen Literatur, eine Änderung erfahren, und Orogenese ist vielfach mit Gebirgsfaltung in Verbindung gebracht worden. Das entspricht nicht der ursprünglichen Fassung des Begriffes; er ist nicht aufgestellt worden für eine bestimmte Struktur, sondern für eine bestimmte Oberflächenform, die sich heraushebt über ihre Umgebung. Diese Heraushebung ist wenigstens im Fernen Westen nicht ein Werk der Faltung, sondern senkrecht wirkender Kräfte, die für die Bildung des Antlitzes der Erde eine weit bedeutendere Rolle spielen, als vielfach angenommen wird.

Nur wenn wir das Wort Orogen in seiner ursprünglichen Bedeutung nehmen, ist es gestattet, von einem Orogen am Boden der Ozeane zu reden und den atlantischen Rücken als Orogen zu deuten. Aber wir wagen ihn nicht mit L. Kober[70] als ein alpines Orogen auszusprechen. Wir haben keinerlei Anhalt für seine Struktur; die Tatsache, daß das höchste Gebirge der Vereinigten Staaten, die südlichen Rocky Mountains, keine »alpine« Struktur haben, mahnt uns zu Vorsicht; es geht nicht an, bloß aus dem Relief auf die Struktur zu schließen. Auch hat uns die Betrachtung des Fernen Westen gezeigt, daß der Gebirgsbau der Erde keineswegs ein so einheitlicher ist, daß wir bereits heute von einem natürlichen Gestaltungsplane der Erdoberfläche sprechen könnten. Erst müssen wir die einzelnen Teile in ihrer Eigenart erkannt haben, ehe wir sie zu einem einheitlichen Bilde zusammenfassen können.

Anmerkungen.

Abkürzungen: A. Rep. = Annual Report, Bull. = Bulletin, Mon. = Monographs, Prof. Pap. = Professional Paper of the U. S. Geological Survey, Folio = Geological Atlas of the U. S. Folio, Geological Survey, fette Zahlen: Band.

1. J. W. Powell: Report on the geology of the eastern portion of the Uinta Mountains. U. S. Geological Survey of the Territories. 2nd Div. 1876. G. K. Gilbert: The Colorado plateau region considered as a field for geological study. Amer. Journ. of Science and Arts. 1876. Juli/Aug.
2. G. K. Gilbert: Report on the geology of the Henry Mountains. U. S. Geological Survey of the Rocky Mountain Region. Washington 1877.
3. Cl. E. Dutton: On some of the greater problems of physical geology. Bull. Philos. Soc. Washington. **9**. 1892. S. 51.
4. E. Suess: Das Antlitz der Erde. $\mathbf{3}_2$. Wien 1909. S. 435.
5. L. Kober: Der Bau der Erde, eine Einführung in die Geotektonik. 2. Aufl.

Berlin 1928. Gestaltungsgeschichte der Erde. Sammlung Borntraeger. **7**. Berlin 1925.

6. R. Staub: Der Bewegungsmechanismus der Erde, dargelegt am Bau der irdischen Gebirgssysteme. Berlin 1928.
7. Ch. R. Longwell: Kobers theory on orogeny. Bull. Geolog. Soc. Am. **34**. 1923. S. 231.
8. H. Cloos: Bau und Bewegung der Gebirge in Nordamerika, Skandinavien und Mitteleuropa. Soergels Fortschritte der Geologie und Paläontologie. **7**. H. 21. Berlin 1928.
9. W. Bowie: Isostasy. New York (1927).
10. F. R. Helmert: Die Tiefe der Ausgleichfläche bei der Prattschen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Phys.-math. Kl. 1909. S. 1192.
11. A. Born: Isostasie und Schweremessung, ihre Bedeutung für geologische Vorgänge. Berlin 1923.
12. Fr. Nansen: The strandflat and isostasy. Videnskapselskapets Skrifter. Kristiania. Mat. naturw. Kl. Nr. 11. 1922. The earth's crust, its surface forms, and isostatic adjustment. Avhandl. Norske Videnskaps-Akademi Oslo. Mat. naturv. Kl. 1927. Nr. 12.

    A. Penck: Glaziale Krustenbewegungen. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Phys.-math. Kl. 1922. S. 305.

    R. Daly: Our mobile Earth. 1926.
13. N. H. Darton: A Resumé of Arizona Geology. Univ: of Arizona. Bull. College of Mines and Engineering. Geolog. Series. **3**. 1925.
14. Cl. E. Dutton: Mount Taylor and the Zuñi plateau. A. Rep. **6**. 1884/85. S. 105.
15. Cl. E. Dutton: The physical geology of the Grand Cañon District. A. Rep. **2**. 1880/81. S. 49.
16. H. H. Robinson: The San Franciscan volcanic field. Prof. Pap. **76**. 1913.
17. Wh. Cross: The laccolitic mountain-groups of Colorado, Utah and Arizona. A. Rep. **14** II. 1892/93. S. 165.
18. F. B. Weeks: Stratigraphy and Structure of the Uinta Range. Bull. Geolog. Soc. Am. **18**. 1907. S. 427.
19. N. H. Darton: Geology of the Bighorn Mountains. Prof. Pap. **51**. 1906.
20. A. Penck: Geomorphologische Studien aus Nordwest-Schottland. Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde Berlin. **32**. 1897. S. 146.
21. R. T. Chamberlin: The building of the Colorado Rockies. Journal of Geology. **27**. 1919. S. 145, 225.
22. N. H. Darton: Preliminary description of the geology and the water resources of the Southern half of the Black Hills. A. Rep. **21** IV. 1899/1900. S. 489.
23. W. T. Lee: Building of the Southern Rocky Mountains. Bull. Geolog. Soc. Am. **34**. 1923. S. 285.
24. W. H. Weed and L. V. Pirsson: The geology of the Little Rocky Mountains. Journ. of Geology. **4**. 1896. S. 397.

    — — Geology and mineral resources of the Judith Mountains of Montana. A. Rep. **18**. III. 1896/97. S. 437.

    — — Geology of the Little Belt Mountains. Ebenda. **20**. 1898/99. S. 257.

    — — Geology of the Shonkin Sag and Palisade Butte laccolites in the Highwood Mountains of Montana. Am. Journ. of Science. **12**. 1904. Juli.
25. R. C. Hills: Folio 71. Spanish Peak. 1901.
26. G. K. Gilbert: Laccolites in South-Eastern Colorado. Journ. of Geology. **4**. 1896. S. 816.
27. J. C. Russell: Igneous intrusions in the neighbourhood of the Black Hills of Dakota. Journ. of Geology. **4**. 1896. S. 23.
28. V. Ziegler: Foothill structure in Northern Colorado. Journ. of Geology. **25**. 1917. S. 715.
29. S. F. Emmons, W. Cross and A. E. Eldridge: Geology of the Denver Basin in Colorado. Mon. **37**. 1896.
30. J. C. Russell: On the nature of igneous intrusions. Journ. of Geology. **4**. 1896. S. 177.
31. R. T. Chamberlin: Vulcanism and mountain-making. Journ. of Geology. **29**. 1921. S. 166.
32. C. A. Fisher: Geology and water resources of the Bighorn Basin, Wyoming. Prof. Pap. **53**. 1906.
33. Schichtmächtigkeiten nach den Folios 30 (Pueblo), 58 (Elmoro), 68 (Walsenburg), 71 (Spanish Peaks), 135 (Nepesta), 173 (Laramie), 186 (Apishapa), 198 (Castle Rock), 203 (Colorado Springs) und nach Emmons.
34. N. H. Darton: Preliminary report on the geology and underground water resources of the central Great Plains. Prof. Pap. **32**. 1905.

    N. H. Darton: Geology and underground waters of the Arkansas valley in Eastern Colorado. Prof. Pap. **52**. 1906. Tafel XXVI. Höhenschichtenkarte des Dakota-Sandsteins in Ostcolorado.

35. A. Penck: Das Felsengebirge von Nordamerika. Forschungen und Fortschritte **4.** 1928. S. 79.

36. Cl. E. Dutton: Tertiary history of the Grand Cañon District. Mon. **2.** 1882. Vgl. dazu H. H. Robinson: A new erosion cycle in the Grand Canyon District, Arizona. Journ. of Geology. **18.** 1910. S. 712.

37. W. D. Johnson: The high plains and their utilization. A. Rep. **21.** IV 1899/1900. S. 601.

38. E. Blackwelder: Cenozoic history of the Laramie region Wyo. Journ. of Geology. **17.** 1909. S. 429.

N. H. Darton, E. Blackwelder and C. E. Siebental: Folio 173. Laramie-Sherman, Wyoming. 1910.

39. W. M. Davis: The Colorado Front Range. Annals Assoc. Americ. Geographers **1.** 1911. S. 31.

40. G. J. Finlay: Folio 203. Colorado Springs. 1916.

41. A. Penck: Reisebeobachtungen aus Canada. Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse. Wien. **38.** 1897/98. S. 341.

42. R. G. McConnell: Report on the geological structure of a portion of the Rocky Mountains. Geological and natural history Survey of Canada. Ann. Rep. 1886.

43. B. Willis: Stratigraphy and Structure, Lewis and Livington Ranges. Bull. Geolog. Soc. Am. **13.** 1902. S. 305.

44. M. R. Campbell: The Glacier National Park. Bull. **600.** 1914.

45. W. H. Emmons and F. C. Calkins: Geology and ore deposits of the Philipsburg, quadrangle, Mont. Prof. Pap. **78.** 1913. S. 116.

46. G. R. Mansfield: Geography, geology, and mineral resources of parth of south-eastern Idaho. Prof. Pap. **152.** 1927.

47. F. F. Hintze: A contribution to the geology of the Wasatch Mountains, Utah. Annals New York Academy of Sciences. **23.** 1913. S. 85.

48. D. T. Hewett: Late tertiary thrust faults in the Mojave Desert, California. Proceedings National Academy of Sciences. Washington. **14.** 1828. S. 7.

49. U. S. Geographical and Geological Survey W. 100th Meridian Progress Report. 1872. S. 50. Report on the geology of portions of Nevada, Utah, California and Arizona. Ebenda Report vol. **3.** 1875. S. 41.

50. G. K. Gilbert: Studies of basin-range structure. Prof. Pap. **153.** 1928.

51. W. M. Davis: The mountain-ranges of the Great Basin. Harvard Mus. Comp. Zoology. **42.** 1903. S. 129 (wieder abgedruckt in Davis, Geographical Essays, edited by D. W. Johnson, Boston 1910). The Wasatch, Canyon and House Ranges. Ebenda **49.** 1905. S. 17.

52. G. D. Louderback: Basin range structure of the Humboldt region. Bull. Geolog. Soc. Am. **15.** 1904, S. 289. — Basin range structure in the Great Basin. Univ. Calif. Publ. Bull. Dept. Geol. **14.** Nr. 10. 1923. S. 329.

53. W. Penck: Die morphologische Analyse. Pencks Geogr. Abhandlungen. 2. R. **2.** 1924. S. 207 u. 274.

54. H. Schneider: A discussion of certain geological features in the Wasatch Mountains. Journ. of Geology. **33.** 1925. S. 28.

55. G. K. Gilbert: Lake Bonneville. Mon. **1.** 1890. S. 344.

56. H. Hassinger: Geomorphologische Studien aus dem inneralpinen Wiener Becken und seiner Randgebirge. Pencks Geogr. Abh. **8.** 3. 1905.

57. W. H. Hobbs: The earthquake of 1872 in Owens Valley, Calif. Gerlands Beiträge zur Geophysik. **10.** 1910. S. 352.

58. A. Knopf: A geological Reconnaissance of the Inyo Range and the eastern slope of the Southern Sierra Nevada, California. Prof. Pap. **110.** 1918.

59. J. E. Spurr: Descriptive geology of Nevada south of the fortieth parallel. Bull. **208.** 1908.

60. R. J. Russell: Basin range structure and stratigraphy of the Warner Range northeasthern California. Univ. Calif. Publ. Bull. Dep. Geolog. Sc. **17.** 11. 1918. S. 387.

61. B. Willis: Index to the stratigraphy of North America accompanied by a Geological Map of North America. Prof. Pap. **71.** 1912.

62. W. T. Lee, R. W. Stone, H. S. Gale and others: Guidebook of the Western U. S. States. B. The overland route. Bull. **612.** 1916. S. 164.

63. A. Penck: Die Entstehung der Alpen. Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde Berlin. 1908. S. 5.

64. Ch. Schuchert: Paleogeography of North America. Bull. Geolog. Soc. Am. **20.** 1910. S. 427.

Ch. Schuchert: Sites and nature of the North American Synclines. Bull. Geolog. Soc. Am. **34.** 1923. S. 151. Paleogeography of North America. Ebenda. **20.** 1910. S. 427.

65. H. S. Washington: The chemistry of the earth's crust. Ann. Rep. Smithsonian Institution. 1920. S. 269.

66. W. Bowie: Isostatic investigations and data for gravity stations in the United States etablished since 1915. U. S. Coast and Geodetic Survey. Spec. Publ. **99.** 1924.

67. W. Bowie: Investigations of gravity and isostasy. U. S. Coast and Geodetic Survey. Spec. Publ. **40.** 1917. Tafel 14.

68. R. Schwinner: Vulkanismus und Gebirgsbildung. Ein Versuch. Zeitschr. f. Vulkanologie **5.** (1921). S. 175.

69. Walther Penck: Anteil der Schmelzfließe an den Bewegungen der Erdkruste. Die Naturwissenschaften. **12.** 1924. S. 847.

70. L. Kober: Die geologische Deutung der ozeanischen Räume. Forschungen und Fortschritte. **5.** 1929. S. 66.

Über das Verhalten des reziproken Wertes der Riemannschen ζ-Funktion.

Von Prof. Guido Hoheisel
in Breslau.

(Vorgelegt von Hrn. Erhard Schmidt am 7. Februar 1929 [s. oben S. 37].)

In einer Arbeit »The Riemann Zeta-function and the distribution of primes« geben Hardy-Littlewood eine Formel von Ramanujan an:

$$\sqrt{\alpha}F(\alpha)-\sqrt{\beta}F(\beta)=\sum_{\varrho}R(\varrho)\,. \tag{1}$$

Dabei ist

$$F(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\alpha^{2p}}{p!\,\zeta(2p+1)}\,;\quad \alpha\beta=\pi\,,\ \alpha>0\,.$$

ϱ durchläuft alle nichttrivialen Nullstellen der ζ-Funktion. $R(\varrho)$ bedeutet (bis auf einen konstanten Faktor) das Residuum der Funktion $\beta^s\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\zeta_{(2s)}^{-1}$; für eine einfache Nullstelle ist insbesondere

$$R(\varrho)=\frac{\beta^{\frac{\varrho}{2}}\Gamma\left(\frac{1-\varrho}{2}\right)}{\zeta'(\varrho)}\,.$$

Hardy-Littlewood zeigen den Weg, der zu der Formel führt, ohne alle Hindernisse beseitigen zu können, die sich einem exakten Beweise entgegenstellen. Hier kurz die Entwicklung, wie sie S. 157 der Acta Math. 41 steht: wegen

$$\sum\frac{\mu(n)}{n}=0\,;\qquad 1-e^{-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{2s}\Gamma(s)\,ds\,;\qquad (-1<k<0)$$

ist

$$F(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\alpha^{-2s}\frac{\Gamma(s)}{\zeta(1-2s)}\,ds\,.$$

Die Anwendung der Funktionalgleichung ergibt

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi i\sqrt{\pi}} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\zeta(2s)}\, ds\,.$$

Wäre es nun erlaubt, die Integrationslinie von $\sigma = k$ auf $\sigma = \lambda \left(\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}\right)$ zu verschieben, so ergäbe sich

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi i\sqrt{\pi}} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\zeta(2s)}\, ds - \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \sum_{\varrho} R(\varrho)\,.$$

Aus dieser Identität läßt sich rasch auf (1) schließen. Formel (1) ist also gesichert, wenn die Verschiebung der Integrationslinie erlaubt ist. Man müßte also zeigen, daß es eine sehr dichte Folge von Horizontalen $t = T_\nu$ gibt, für die

$$\int_{k-iT_\nu}^{\lambda+iT_\nu} \frac{\beta^s\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\zeta(2s)}\, ds \to 0$$

geht oder für die

$$|\zeta(\sigma+it)| = |\zeta(s)| > e^{-\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)t}$$

gilt ($t > 0$). In einer Fußnote bemerken Hardy-Littlewood, daß es ihnen bei Annahme der Riemannschen Vermutung nur gelungen wäre, die Existenz einer solchen Horizontalfolge nachzuweisen, ohne das geringste über ihre Dichte aussagen zu können. Wir werden das Problem in völlig befriedigender Weise lösen, indem wir ohne jede Annahme zeigen:

A. *In dem Horizontalstreifen*

$$t \leqq \tau \leqq t + k(\varepsilon)\frac{\log^2 t}{t}$$

gibt es wenigstens eine Horizontale $\tau = \text{const}$, *auf der*

$$|\zeta(s)| > e^{-\varepsilon\tau}$$

ist. Damit ist Formel (1) nunmehr bewiesen, wobei von geringfügigen Vorbehalten betreffs Art der Summierung abgesehen wird. Der Satz A ergibt sich leicht aus dem folgenden Satze:

B. *Jedes Gebiet, in dem*

$$|\zeta(s)| < e^{-\varepsilon t}$$

bleibt, läßt sich in einen Kreis vom Radius $k\frac{\log t}{t}$ *einschließen.*

Dieser Satz, der den Nullstellen der ζ-Funktion manches von ihrem Schrecken nimmt, ergibt sich ziemlich leicht bei Heranziehung eines Hilfs-

satzes von Milloux, dessen Bedeutung für das Studium der ζ-Funktion nicht erkannt worden ist. Der Satz lautet:

»Ist $f(z)$ im Kreise $|z| \leqq 1$ regulär, absolut kleiner als M und ist ferner auf einer den Nullpunkt mit dem Rande verbindenden Kurve $|f(z)|$ unterhalb $m < M$, so gilt für das Maximum von $|f(z)|$ auf einem Kreise $|z| = \rho < 1$ die Ungleichung

$$M_\rho < M^{1-\lambda(1-\rho)} m^{\lambda(1-\rho)} .$$

Dabei ist λ eine absolute Konstante[1].«

Zum Beweise des Satzes B nehmen wir an, daß längs eines Kurvenstückes

$$|\zeta(s)| < e^{-\varepsilon t}$$

sei. P_1, P_2 seien irgend zwei Punkte darauf mit einer Entfernung $P_1 P_2 < \frac{1}{2}$. Die Gerade $P_1 P_2$ verlängern wir so, daß wir uns dabei von der Halbebene $\sigma < 0$ nicht entfernen, etwa über P_2 hinaus bis zum Punkte P_3 mit der Entfernung $\overline{P_1 P_3} = 3$. Den Kreis mit 3 um P_3 bilden wir durch Ähnlichkeitstransformation und Drehung auf einen Einheitskreis $|z| \leqq 1$ ab, derart, daß $P_3 P_1$ die positiv reelle Achse wird und $z = r_0$ der Bildpunkt von $P_2 \left(\frac{5}{6} < r_0 < 1 \right)$.

Die Abbildung

$$w = \frac{z - r_0}{1 - r_0 z}$$

führt diesen Kreis in den Kreis $|w| \leqq 1$ über, wobei das Bild von r_0 der Nullpunkt ist. Ein Kreis $|w| = \rho$ hat in der z-Ebene den Apollonischen Kreis

$$\rho \cdot r_0 = \frac{|z - r_0|}{\left| z - \frac{1}{r_0} \right|}$$

als Bild. Ist

$$\rho > \frac{1 + 2 r_0}{2 + r_0} ,$$

so liegt das Bild ganz im Kreisring $\frac{1}{2} < |z| < 1$; denn $z = -\frac{1}{2}$ liegt innerhalb des Bildkreises. Jedenfalls ist dann sicher, daß das Bild in der s-Ebene in die Halbebene $\sigma < 0$ hereinragt. Für die Transformierte von $\zeta(s)$ in $|w| \leqq 1$ gilt

$$M \sim t^{c_1} , \; M_\rho \sim t^{c_2} . \qquad (c_1 > c_2 > 0)$$

Der Millouxsche Satz gibt also

$$t^{c_2} \leqq t^{c_1 (1 - \lambda(1-\rho))} \cdot e^{-\varepsilon t \lambda (1-\rho)} .$$

Das ist ein Widerspruch, falls

[1] Journal de Math. 1924.

$$1-\rho > k(\varepsilon)\frac{\log t}{t}$$

ist (k groß genug). Also muß

$$1-\frac{1+2r_0}{2+r_0}=\frac{1-r_0}{2+r_0}\leqq k\frac{\log t}{t}$$

$$1-r_0\leqq 3k\frac{\log t}{t}.$$

$$\overline{P_1P_2}\leqq 9k\cdot\frac{\log t}{t}.$$

Denken wir uns jetzt ein Gebiet, wo

$$|f(s)|=|\zeta(s)\cdot e^{-i\varepsilon s}|\leqq 1$$

ist. Auf dem Rande ist also $|f(s)|=1$. Das Gebiet ist übrigens einfach zusammenhängend, weil $|f(s)|$ das Maximum auf dem Rande annimmt. Sind P_1, P_2 irgend zwei Punkte eines solchen Gebietes, so ist also

$$\overline{P_{,1}P_2}<9k\frac{\log t}{t}.$$

Der Satz B ist bewiesen.

Zur Überwindung der Hardy-Littlewoodschen Schwierigkeit genügt das noch nicht, solange man über die Dichtelagerung solcher Gebiete nichts aussagen kann. Das ist hier sehr einfach. Wir behaupten:

In jedem solchen Gebiete liegt wenigstens eine Nullstelle der ζ-Funktion.

Da auf dem Rande $|f(s)|=1$ ist und $|f(s)|$ daselbst sowohl sein Maximum wie Minimum annähme für $f(s)\neq 0$, so wäre $f(s)$ konstant.

Da wir nun wissen, daß die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ in einem Streifen $t\leqq\tau\leqq t+1$ unterhalb

$$k_0\cdot\log t$$

liegt, so können wir nun leicht Satz A erschließen. Wir wählen den Streifen

$$t\leqq\tau\leqq t+18\,k_0k\cdot\frac{\log^2 t}{t}$$

und teilen ihn in $2k_0\log t$ gleiche Teilstreifen. Gäbe es in keinem der Teilstreifen eine Horizontale der gewünschten Art, so müßte der Weg dort durch mindestens ein Gebiet $|f(s)|\leqq 1$ gesperrt sein. Da ein solches Gebiet nicht in drei Teilstreifen zugleich liegen kann, also höchstens zweimal den Weg sperren kann, gäbe es wenigstens $k_0\log t$ solcher Gebiete, also zu viele Nullstellen. Damit ist Satz A und Formel (1) bewiesen. Hierbei bedarf es noch eines kleinen Vorbehaltes. Die Summierung über ρ ist nämlich so zu verstehen, daß über alle die Nullstellen, die sich nicht durch Horizontalwege

$|\zeta(s)| < e^{-\varepsilon t}$ trennen lassen, zugleich summiert wird. Man kann das noch verbessern, indem man den Satz A auf Vertikalstreifen der Breite $18 k_0 k \frac{\log^2 t}{t}$ überträgt. Daraus ergibt sich, daß nur über solche ρ eventuell gleichzeitig summiert werden muß, die in einem Kreise mit dem Radius $36 k_0 k \log^2 t \cdot t^{-1}$ liegen. Solange sich aber nicht zeigen läßt, daß die Anzahl solcher Nullstellen beschränkt sein muß, hat diese Bemerkung keine große Bedeutung. Zum Beweise des Satzes B sind keine individuellen Eigenschaften der ζ-Funktion herangezogen worden: der Satz gibt einen allgemeinen funktionentheoretischen Tatbestand wieder und läßt sich wie oben formulieren.

Ausgegeben am 11. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 25. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Fick berichtete über den zweiten Teil seiner Untersuchung der Arbeitsleistung der Schultermuskeln. (Ersch. später.)

Der erste Teil behandelte die Bewegungen (s. Sitzungsber. 1928 V mit 3 Tafeln). Der zweite Teil bringt die Muskelverkürzungen und Arbeitsleistung bei im ersten Teil geschilderten Bewegungen.

Ausgegeben am 11. Juni.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

XIV. Gesamtsitzung. 2. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Pompeckj sprach über »Zentren der Tierverbreitung«. (Ersch. später.)

Durch die in der Mongolei erzielten Erfolge der asiatischen Expedition des New Yorker naturhistorischen Museums (seit 1922) muß die Osborn-Matthewsche Hypothese von der Bedeutung Innerasiens als Zentrum der Verbreitung der Säugetiere als Urheimat des Menschen, die Frage nach Zentren der Tierverbreitung überhaupt mit lebhafterem Interesse behandelt werden. Die Prüfung der marinen Faunen vom Kambrium an, der großen Klassen der Landtiere in ihrem fossilen Bestande führt zu dem Ergebnis: Wir können aus dem fossil überlieferten Material überhaupt keine eigentlichen Zentren für die Verbreitung der und jener Gesamtfauna, der und jener Tierklasse nachweisen. In allen überlieferten Faunen mischen sich mehr oder weniger indigene Elemente mit solchen, die durch Wanderung verbreitet sind. Das gilt auch für die in der Mongolei gefundenen Landfaunen vom oberen Jura bis ins Diluvium, wo ebenso immer wieder autochthone und von hier aus verbreitete Elemente mit eingewanderten, eurasiatischen und nordamerikanischen, gemischt sind. Innerasien, die Mongolei, ist ebenso wenig als das Verbreitungszentrum der Säugetiere überhaupt zu beweisen, wie es trotz des Fundes dreier Zähne eines palaeolithischen Menschen und trotz des Fundes diluvialer Kulturen nicht möglich geworden ist, die Mongolei als den Sitz des »Morgenröte-Menschen« Osbornes zu erweisen.

2. Hr. Erman überreichte die 6. Lieferung des Wörterbuchs der ägyptischen Sprache (Leipzig 1929).

3. Hr. Stutz überreichte das dritte Heft (Perleberg) des ersten Bandes der brandenburgischen Kirchenvisitations-Abschiede und -Register des 16. und 17. Jahrhunderts, Berlin 1929, sowie das Werk: Märkische Herrenhäuser aus alter Zeit, von Hans Joachim Helmigk (Berlin 1929).

4. Ferner wurde vorgelegt: Von dem dritten Band der Handels-, Zoll- und Akzisepolitik der Acta Borussica Teil 1 und 2 (Berlin 1928), von dem korrespondierenden Mitglied Albert de Berzeviczy eine Broschüre: Guillaume Fraknói (Paris 1928), sowie ein Bericht über die Feier zum Gedächtnis von Wilhelm von Bode (Berlin 1929).

Das Preußische Staatsministerium hat durch Erlaß vom 27. April d. J. die Wahl des Leiters des Deutschen Museums in München, Hrn. Dr. Ing. e. h., Dr. oec. publ. h. c. Oskar von Miller, zum Ehrenmitglied der Akademie bestätigt.

Ausgegeben am 11. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 16. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. von Laue berichtete nach eigenen Arbeiten und nach Versuchen von R. Brill sowie von J. Hengstenberg und H. Mark über eine röntgenographische Methode, Größe und Form ultramikroskopischer krystalliner Teilchen zu bestimmen.

2. Hr. Ludendorff legte eine Arbeit »Über den sogenannten 61 Cygni-Sternstrom« vor.

Der in der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 2. Juni 1927 gehaltene Vortrag über den 61 Cygni-Sternstrom wurde nicht gedruckt, da noch weiteres Beobachtungsmaterial abgewartet werden sollte. In Übereinstimmung mit den damaligen Resultaten ergibt eine erneute Diskussion, daß der genannte Sternstrom höchstwahrscheinlich keine reelle Bedeutung besitzt und daher wohl am besten aus der Liste der Sternströme zu streichen ist.

Über eine röntgenographische Methode, Größe und Form ultramikroskopischer krystalliner Teilchen zu bestimmen.

Von M. v. Laue.

In manchen Gebieten der Naturwissenschaft, die nicht mehr zur Physik zählen, die aber doch physikalische Hilfsmittel benutzen, sowie in der Technik steht der Forscher gelegentlich vor der Aufgabe, ungefähre Größe und Gestalt ultramikroskopischer, aber doch noch Tausende von Atomen umfassender, krystalliner Teilchen zu bestimmen. Zu den älteren solchen Zwecken dienenden Verfahren ist in den letzten Jahren ein neues getreten, das auf der Verwendung der Röntgenstrahlen beruht. Es knüpft experimentell an das bekannte Verfahren von Debye und Scherrer zur Untersuchung von Krystallstrukturen an, d. h. man bestrahlt mit homogenem Röntgenlicht ein viele solche, der Richtung nach ganz oder teilweise ungeordnete Teilchen enthaltendes Präparat und photographiert die so entstehenden Interferenzkegel auf einem dies Präparat zylindrisch umgebenden Film; so entstehen die bekannten Debye-Scherrer-Ringe. Während aber zur Bestimmung der Struktur Lage und Intensität dieser Ringe dienen, kommt es hier auf die Unschärfe dieser Ringe an.

Daß ein Zusammenhang zwischen Teilchengröße und dieser Unschärfe besteht, haben die genannten Forscher nach Analogie der bei optischen Gittern bekannten Verhältnisse von vornherein betont und zu Messungen benutzt[1]. Aber sie arbeiteten wohl stets mit Teilchen, die nach allen Richtungen ziemlich dieselbe Ausdehnung haben, eine Voraussetzung, die in anderen wichtigen Fällen nicht zutrifft. Die Frage, wie dabei die Teilchenform zu berücksichtigen ist, behandelt eine Arbeit des Verfassers aus dem Jahr 1926[2]. Desgleichen war noch die experimentell wichtige Frage zu lösen, wie der Einfluß, den die Ausdehnung des Präparates auf die Schärfe der Ringe ausübt, von dem Einfluß der Größe und Form der Teilchen zu trennen ist.

Zur Lösung der ersten Aufgabe denke man sich, jedes Teilchen habe in Richtung der Gittertranslation $\mathfrak{a}_1$ $2m_1$ Atome aufgereiht, ebenso $2m_2$ und $2m_3$ in den Translationseinrichtungen $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$. Bei tafel- oder nadelförmigen Teilchen wird eine solche Annahme zutreffen. Ferner ist jeder Interferenzring

[1] P. Scherrer in Zsigmondy, Kolloidchemie 3. Auflage 1920, S. 408, siehe auch R. O. Herzog, J. physic. Chem. **30**, 457, 1926.

[2] M. v. Laue, Zeitschr. f. Krystallographie **66**, 637, 1926.

zu kennzeichnen durch seine drei Indizes h_1, h_2, h_3. Man kann dann für ihn eine Größe $H(h_1, h_2, h_3)$ angeben, welche ein Maß für die Breite dieses Ringes in der Skala des Ablenkungswinkels ϑ[1] darstellt (der selbst natürlich in bekannter Weise von den drei Indizes abhängt); nämlich, unter Beschränkung auf ein rhombisches Gitter, also drei zueinander senkrechte Translationen u_i:

$$H(h_1, h_2, h_3) = \frac{\lambda}{2\pi \cos\frac{\vartheta}{2}} \sqrt{\frac{\sum\left(\frac{h_i}{m_i a_i^2}\right)^2}{\sum\left(\frac{h_i}{a_i}\right)^2}}.$$

Für schiefwinklige Raumgitter lautet die Formel ein wenig verwickelter. Hier sind die Wellenlänge der Röntgenstrahlen λ und der Ablenkungswinkel ϑ vom Versuch her bekannt, ebenso die Indizes h_i und die Größen a_i der Translationen. Durch Ausmessung an mindestens drei Ringen kann man daher die drei Zahlen m_i, d. h. Größe und Form der Teilchen, bestimmen. Besonders empfiehlt sich die Ausmessung solcher Ringe, für welche zwei der drei Indizes Null sind, weil man so eine der drei Zahlen m_i allein ermittelt.

Schwieriger ist die zweite Aufgabe, die Berücksichtigung und Absonderung des Einflusses der Stäbchendicke. Diese ist ganz verschieden, wenn die einfallenden Strahlen parallel und wenn sie divergent sind, sie hängt zudem in höchstem Maße von der Absorption der Strahlen im Präparat ab; eine strenge Berücksichtigung der Absorption scheitert an mathematischen Schwierigkeiten. Für ein Stäbchen, das keine merkliche Absorption zeigt, hat der Verfasser (l. c.) das Problem durchgerechnet. Und mit Hilfe dieser Formeln sind dann im wesentlichen die Messungen von R. Brill[2] sowie J. Hengstenberg und H. Mark[3] ausgeführt. Ersterer beschäftigt sich mit Eisenteilchen, die nach verschiedenen chemischen Methoden in der Größe von 8.10^{-7} bis zu 1.10^{-5} cm hergestellt wurden, und legt besonderen Wert auf die Prüfung der Ergebnisse durch verschiedene Messungen am gleichen Präparat. Er findet auch Übereinstimmungen, die so gut sind, als hier zu erwarten. Die letztgenannten Autoren hingegen untersuchen die Mizellen von Zellulose und Kautschuk und können unzweifelhaft bei beiden langgestreckte Stäbchenform nachweisen. Der Querschnitt des Stäbchens beträgt etwa bei Zellulose $5{,}5.10^{-7}$ cm, während die Länge über $6{,}0.10^{-6}$ liegt.

---

[1] In der angeführten Arbeit des Verfassers ist statt von H von einer Zahl η die Rede, welche die Ringbreite in der Skala der $\sin\frac{1}{2}\vartheta$ mißt. Sie unterscheidet sich von H nur durch den Faktor $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\vartheta$.

[2] R. Brill, Zeitschr. f. Krystallographie **68**, 387, 1928.

[3] J. Hengstenberg und H. Mark, Zeitschr. f. Krystallographie **69**, 271, 1929.

Über den sogenannten 61 Cygni-Sternstrom.

Von H. Ludendorff.

Eine Gruppe von Sternen, die sich parallel und mit gleicher Geschwindigkeit durch den Raum bewegen, nennt man einen Sternstrom. Eine zusammenfassende und kritische Übersicht unseres Wissens über diese Art von Sternsystemen, deren bekannteste Repräsentanten der Taurus- und der Ursa major-Strom sind, hat N. H. Rasmuson in seiner Abhandlung »A Research on Moving Clusters« (Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium, Serie II, Nr. 26, 1921) gegeben. Seit dem Erscheinen dieser Arbeit ist nichts Wesentliches auf diesem Gebiete hinzugekommen.

Ein besonderes Interesse unter den Sternströmen verdient wegen seiner großen Geschwindigkeit von fast 100 km/sec relativ zur Sonne der »61 Cygni-Strom«, der so benannt ist, weil der bekannte Doppelstern 61 Cygni zu ihm gehört. Er wurde von B. Boss zuerst festgestellt, und dieser hat im Astronomical Journal Nr. 629 (1911) und 633/34 (1912) eine Liste von 57 Sternen aufgestellt, die er für der Zugehörigkeit zu diesem Strome verdächtigt hält und die sämtlich hundertjährige Eigenbewegungen von mehr als 17″.5 besitzen. Rasmuson gibt auf S. 42/43 seiner zitierten Abhandlung aufs neue eine Liste dieser 57 Sterne, ihrer Eigenbewegungen, der auf Grund der angenommenen Strombewegung berechneten Radialgeschwindigkeiten und Parallaxen sowie der Abweichungen der beobachteten Eigenbewegungen von der Richtung zum Zielpunkt ($A = 99°.1$, $D = +0°.5$). Auch die beobachteten Radialgeschwindigkeiten und Parallaxen werden, soweit möglich, angegeben. Es zeigt sich, daß bei sehr vielen von den Sternen die beobachteten und die berechneten Werte der Radialgeschwindigkeiten bzw. der Parallaxen sehr schlecht oder gar nicht übereinstimmen, und Rasmuson äußert sich daher schon skeptisch über die Realität des Stromes.

Seit der Veröffentlichung von Rasmusons Arbeit hat sich unsere Kenntnis der Radialgeschwindigkeiten und Parallaxen sehr vervollkommnet, und es erscheint daher am Platze, die Frage der Realität des Stromes erneut zu prüfen. Es wäre ja in der Tat möglich, daß, wenn auch nicht alle die 57 Sterne der Liste von Boss zu dem Strome gehören, sich doch eine größere Anzahl unter ihnen aussondern ließe, die sich parallel mit 61 Cygni und mit gleicher Geschwindigkeit durch den Raum bewegen. (Die Sterne der Bossschen Liste sind nach der Richtung und Größe ihrer Eigenbewegung ausgesucht worden. Es wäre leicht, die Zahl dieser Sterne noch weiter zu

vermehren, wenn man solche mit kleineren Eigenbewegungen einbeziehen wollte. Da indessen der Zielpunkt der Bewegung nahe dem Zielpunkte der ersten Kapteynschen Sterntrift liegt, so würde eine solche Erweiterung der Liste wenig bedeuten, solange nicht durch die beobachteten Werte der Radialgeschwindigkeiten und Parallaxen nachgewiesen wird, daß die betreffenden Sterne wirklich dieselbe Bewegung wie 61 Cygni besitzen.)

Eine erste Kontrolle für die Zugehörigkeit eines bestimmten Sternes der Liste zum 61 Cygni-Strom bietet die Vergleichung zwischen der auf Grund der Annahme dieser Zugehörigkeit berechneten Radialgeschwindigkeit ρ_c mit der tatsächlich beobachteten Radialgeschwindigkeit ρ. Man wird bei dieser Vergleichung von vornherein nicht eine zu große Übereinstimmung verlangen, da es ja möglich ist, daß die weitere Untersuchung zu einer veränderten Lage des Zielpunktes führt, wodurch dann auch die ρ_c etwas geändert werden würden.

Tabelle I.

Boss		Spektr.	ρc km	Lick km	Voûte km
86	Br 34	K 0	− 0.6	—	+ 19.5 W
×127	Pi 130 m	K 0	− 2.5	+ 18.	+ 16.8 LW
×372	41 H And	F 8	+ 18.1	+ 4.4	+ 5.0 LB
×514	δ Tri	G 0	+ 31.6	− 6.4 γ	—
667	47 Ari	F 0	+ 49.6	—	+ 27.2 VW
927	Grw60 284	K 0	+ 59.7	—	− 29.5 W
×1400	γ Men	K 0	+ 20.9	+ 57.4 (γ)	—
1767	38 G Pup	F 2	+ 64.8	+ 19.2	—
•×1972	σ Pup	K 5	+ 67.3	+ 87.3 γ	—
×2161	Pi 321	G 0	+ 74.6	—	+ 27. W
×2427	b_2 Car	F 0	+ 39.8	+ 10.6	—
2803	215 G Vel	G 0	+ 30.0	+ 19.6	—
×2943	51 LMi	G 0	+ 35.8	—	− 9. W
3795	Groomb 2154	K 0	− 39.5	− 66.7	− 67.0 V
×3940	β CrB	F 0p	− 54.4	− 23. (γ)	− 21.3 γ
×4568	γ Sgr	K 0	− 81.2	+ 21.5 (γ)	—
×4953	δ Aql	F 0	− 93.2	− 25. (γ)	—
5032	226 G Sgr	F 2	− 88.6	+ 12.5	—
5336	ε Cyg	K 0	− 67.4	− 10. (γ)	—
5365	56 Cyg	A 5	− 57.6	− 24.	− 24.8 V
×5559	24 Aqr	F 8	− 68.2	—	− 17. W
5703	♑ Peg	A 2	− 58.4	Var.	—[1]
5721	Br 2926	F 8	− 31.4	− 18.7	− 20.4 VW
×5758	ν Ind	G 0	− 17.7	+ 20.	—
5786	34 Peg	F 8	− 53.1	—	− 18.6 VW
×5894	σ Peg	F 5	− 50.4	+ 12.8	—
6020	Br 3109	F 0	− 26.8	—	+ 9.7 W

[1] ♑ Peg. Nach O. J. Lee (Ap. J. 31, p. 179) ergeben 7 Yerkes-Platten veränderliche Werte der Radialgeschwindigkeit zwischen − 32 und + 19 km. Eine Lick-Platte (Lick Publ. XVI) ergibt − 17 km.

Die Tabelle I enthält nun eine Zusammenstellung derjenigen unter den 57 Sternen, bei denen ρ_c und ρ so wenig übereinstimmen, daß von einer

Zugehörigkeit zu dem Strome nicht die Rede sein kann. Die einzelnen Kolumnen geben:

1. die Nummer des Sternes in L. Boss' Preliminary General Catalogue. Das Zeichen × vor der Nummer bedeutet hier wie in den folgenden Tabellen, daß die Radialgeschwindigkeit des betr. Sternes auch schon RASMUSON bekannt war;
2. eine andere Bezeichnung des Sternes,
3. den Spektraltypus,
4. die berechnete Radialgeschwindigkeit ρ_c nach RASMUSON,
5. die beobachtete Radialgeschwindigkeit ρ nach Publications of the Lick Observatory Vol. XVI (1928). γ bedeutet, daß es sich um die aus einer Bahnbestimmung bekannte Schwerpunktsgeschwindigkeit eines spektroskopischen Doppelsternsystems handelt, (γ) dagegen bedeutet einen geschätzten, aber schon ziemlich genauen Wert einer solchen Schwerpunktsgeschwindigkeit;
6. Die beobachtete Radialgeschwindigkeit nach J. VOÛTE, Second Catalogue of Radial Velocities (Annalen v. d. Bosscha Sterrenwacht Lembang, Vol. 3, 1e Gedeelte [1928]). Wenn die bei VOÛTE gegebene Radialgeschwindigkeit allein auf Lick-Beobachtungen beruht, so ist sie hier fortgelassen, da der betr. Wert dann durch den in der vorangehenden Kolumne gegebenen überholt ist. Die Buchstaben neben den ρ bezeichnen den Ort der Beobachtung: B = Bonn, L = Lick, V = Victoria, W = Mt. Wilson; γ hat dieselbe Bedeutung wie oben.

Die 27 in Tabelle I angeführten Sterne gehören also nicht zum 61 Cygni-Strom und sind aus der Bossschen Liste von 57 Sternen zu streichen. Wir kennen zur Zeit die Radialgeschwindigkeiten von 50 Sternen dieser Liste, und wir können demnach sagen, daß bei 27 : 50 oder 54% dieser Sterne die Radialgeschwindigkeiten nicht der angenommenen Strombewegung entsprechen. Wenn wir dasselbe Verhältnis für die 7 Sterne voraussetzen, deren Radialgeschwindigkeit wir noch nicht kennen, so können wir annehmen, daß nur bei etwa 3 von ihnen die ρ_c und ρ übereinstimmen würden. Wir sind also nicht

Tabelle II.

Boss		Grösse	ρc km	Δg	π_c
4	37 G Phe	5.8	− 10.4	+ 1°.9	0″.025
377	4 G Eri	6.0	+ 12.4	+ 2.2	0.015
948	174 G Eri	5.6	+ 64.8	− 3.4	0.016
2717	20 Sex	7.6	+ 57.0	− 1.9	0.012
3385	Pi 255	6.0	− 2.9	− 3.7	0.011
3869	56 G Lib	6.4	− 52.7	− 6.4	0.024
4570	67 G Aps	5.9	− 27.0	− 6.1	0.012

ohne weiteres berechtigt, diese 7 Sterne zum 61 Cygni-Strome zu rechnen. Sie sind in Tabelle II zusammengestellt, in der Δg die Differenz zwischen dem berechneten und dem beobachteten Positionswinkel der Eigenbewegung und

π_c die berechnete Parallaxe (nach Rasmuson) bezeichnen. Gemessen ist bisher nur die Parallaxe von Boss 4, $\pi = 0''.005$, w. F $= \pm 0''.026$ nach Voûte, und ganz neuerdings die von Boss 377, π (relativ) $= +0''.162$ (im Mittel aus beiden Komponenten) von H. L. Alden (Astronomical Journal Nr. 921, 1929); dieser Stern kann also sicher nicht zum 61 Cygni-Strome gehören. Spektroskopische Parallaxen liegen für die Sterne der Tabelle II nicht vor.

Wenn wir die $27 + 7 = 34$ Sterne aus der ursprünglichen Liste streichen, so bleiben 23 oder, wenn wir, wie es sinngemäß ist, 61^1 und 61^2 Cygni als einen Stern rechnen, 22 Sterne übrig, für die die Radialgeschwindigkeiten bekannt sind und der Hypothese der Strombewegung nicht direkt widersprechen. Eine weitere Kontrolle dafür, ob diese 22 Sterne die Strombewegung besitzen, ermöglichen die gemessenen Parallaxen. Die trigonometrischen Parallaxen wurden Schlesingers General Catalogue of Stellar Parallaxes (1924) entnommen, indessen wurden auch alle späteren Parallaxenverzeichnisse nachgesehen, die aber nur eine ziemlich geringe Ausbeute lieferten. Spektroskopische Parallaxen der hier vorkommenden Sterne fanden sich an den folgenden Stellen:

W_I bzw. W_2 = Mt. Wilson Contributions Nr. 199 bzw. 244.

V = Publ. of the Dominion Astrophysical Observatory Victoria Vol. III Nr. 1.

H_I bzw. H_2 = Harvard Observatory Circular Nr. 246 bzw. Harvard Observatory Bulletin Nr. 789.

U = Meddelanden Upsala Observatory Nr. 28.

Wds = H. C. Woods, Monthly Notices R. A. S. Vol. 87, S. 391.

R = W. B. Rimmer, Memoirs R. A. S. 62, Part IV und 64, Part I.

A = Pubbl. del R. Osservatorio di Arcetri Nr. 42.

Wenn für einen Stern mehrere Bestimmungen der spektroskopischen Parallaxe vorlagen, so wurde das Mittel aus den Einzelwerten gebildet. Es zeigte sich nun, daß bei 5 Sternen die Parallaxen nicht mit den auf Grund der Annahme der Strombewegung berechneten Werten verträglich sind, so daß also diese 5 Sterne nicht zum 61 Cygni-Strom gehören können. Diese 5 Sterne sind in Tabelle III angeführt; die ersten 6 Kolumnen dieser Tabelle entsprechen denen der Tabelle I; weiter ist gegeben in

Kolumne 7: Die Differenz Δg zwischen berechnetem und beobachtetem Positionswinkel der Eigenbewegung nach Rasmuson.

Kolumne 8: Die berechnete Parallaxe π_c nach Rasmuson.

Kolumne 9: Die trigonometrische Parallaxe π nach Schlesinger und (in den Anmerkungen) neuere Werte derselben (Abkürzungen wie bei Schlesinger). Der wahrscheinliche Fehler von π ist ebenfalls nach Schlesinger in Einheiten der dritten Dezimale angegeben.

Kolumne 10: Die spektroskopische Parallaxe π_s.

Bei Boss 1259 und 4950 ist Δg sehr groß, was gleichfalls gegen die Zugehörigkeit dieser Sterne zum 61 Cygni-Strome spricht. Hinsichtlich der Radialgeschwindigkeit von Boss 4246 ist noch zu erwähnen, daß eine Bahnbestimmung von Y. C. Chang (Astrophysical Journal 68 S. 319, 1928) $\gamma = -69.8$ km ergeben hat in guter Übereinstimmung mit dem in Tabelle III angeführten Werte.

Tabelle III.

Boss		Spektr.	ρc km	Lick km	Voûte km	Δg	π_c	π	π_s
×1259	λ Aur	G 0	+ 70.4	+ 66.6	+ 65.0 LBWV	+ 5°9	0″048	0″068 ± 5 AMS+	0″081 W_1VUWds
×4246	ζ Her	G 0	− 69.5	− 71 (γ)	—	+ 2.7	0.045	0.111 ± 5 AMS+[2]	0.096 W_1VR
×4950	b 31 Aql	G 5	− 91.3	− 100.6	− 97.6 W	− 7.7	0.165	0.070 ± 6 AM+	0.085 W_1VR
5917	51 Peg	G 0	− 39.3	—	− 32.2 VW	+ 3.1	0.012	0.071 ± 9 AMu[3]	0.057 W_1VRU
6129	Pi 218	K 0	− 4.7	—	[1]	− 3.6	0.017	0.090 ± 4 WAM+	0.144 W_1U

[1] Nach Publ. ASP 29 p. 113 (1917) variiert die Radialgeschwindigkeit zwischen − 17 und + 33 km. Die Radialgeschwindigkeit des Systems könnte also recht wohl der Strombewegung entsprechen.
[2] Nach Publ. Leander McCormick Obs. Vol. IV ist $\pi = 0''.119$.
[3] Nach derselben Quelle ist $\pi = 0''.077$.

Es bleiben nun noch $22 - 5 = 17$ Sterne übrig, bei denen weder die beobachtete Radialgeschwindigkeit noch die Parallaxe (soweit sie gemessen ist) direkt gegen die Zugehörigkeit zum 61 Cygni-Strome spricht (dabei sind 61^1 und 61^2 Cygni als ein Stern gezählt). Diese Sterne sind in Tabelle IV zusammengestellt, die genau ebenso wie Tabelle III angeordnet ist.

Tabelle IV.

Boss		Spektr.	ρc km	Lick km	Voûte km	Δg	π_c	π	π_s
3	Br 3210 m	G 5	− 7.4	—	− 13.9 WV	− 0°4	0″014	0″017 ± 7 MSYk[2]	0″055 W_1V
×314	δ Cas	A 5	+ 9.3	+ 9.	—	− 0.2	0.015	0.011 ± 5 W[3]	0.064 W_2Wds
×1449	π Men	G 5	+ 14.0	+ 11.6	—	+ 1.6	0.059	—	—
×1823	6 G Vol	K 2	+ 35.2	+ 38.8	—	+ 2.0	0.013	—	—
×1857	68 G Pup	K 2	+ 61.4	+ 63.6	—	− 4.3	0.013	—	—
2563	ι Cha	F 2p	+ 10.9	+ 7:	—	+ 5.9	0.011	—	—
×2657	181 G Hya	K 0	+ 57.1	+ 51.9	—	+ 5.7	0.013	—	—
×3095	66 G Cen	G 5	+ 17.2	+ 15.1	+ 16.2 CLW	− 4.7	0.081	—	0.086 H_1
3292	τ Cen	A 2	+ 1.1	+ 5:	—	+ 6.1	0.009	—	—
3353	38 Vir	F 6	− 4.3	—	− 7.6 W	+ 2.8	0.014	—	0.026 W_1
×3383	ε Vir	K 0	− 7.7	− 13.5	− 13.6 LBC	− 2.6	0.015	—	0.034 W_1VR
3785	Groomb 2152	F 2	− 38.9	—	− 35.8 WV	− 1.8	0.016	0.026 ± 7 AW	0.024 W_1VR
4511	30 Dra	A 2	− 57.9	—	− 56.2 V	− 3.2	0.013	− 0.004 ± 9 AYl	0.016 W_2WdsA
×5433	61^1 Cyg	K 5	− 59.8	—	} − 63.9 LWV	− 2.6	0.342	} 0.300 ± 3 AMW+	0.316 W_1VR
×5434	61^2 Cyg	K 5	− 59.8	—		− 4.2	0.335		0.271 W_1V
5446	56 G Mic	F 5	− 52.9	var[1]	—	+ 6.8	0.015	—	—
×5654	ε Ind	K 5	− 34.2	− 40.4	—	+ 2.0	0.253	0.281 ± 40 Cape[4]	0.45 H_2
5977	Dpt 2803	F 5	− 35.6	—	− 32.3 W	− 1.5	0.030	—	0.013 W_1

[1] 3 Spektrogramme ergeben $\rho = -41, -44, -48$ km; ein viertes zeigt doppelte Linien und ergibt für die beiden Komponenten $\rho = -3$ km und $\rho = -84$ km. Es ist also immerhin möglich, daß die Radialgeschwindigkeit des Schwerpunktes nahe $= \rho c$ ist.
[2] Nach Publ. Leander McCormick Obs. Vol. IV ist $\pi = 0''.004$.
[3] Relative Parallaxe nach Mt. Wilson Contr. Nr. 356.
[4] Relative Parallaxe $\pi = 0''.286 \pm 4$ nach H. L. Alden, Astronomical Journal Nr. 921.

Einige von den spektroskopischen Parallaxen in Tabelle IV weichen stark von den trigonometrischen ab; es ist dies bei Boss 3 (Einzelwerte von $\pi_s = 0''.060$ (W_1) und $0''.051$ (V)), Boss 314 ($\pi_s = 0''.068$ (W_2) bzw. $0''.060$ (Wds)) und schließlich bei Boss 5654 der Fall; bei dem letztgenannten Stern ist aber

sicher die trigonometrische Parallaxe vorzuziehen. Für 7 Sterne der Tabelle sind die Parallaxen noch nicht bestimmt worden, und es ist mit Sicherheit anzunehmen, daß bei einigen von ihnen die gemessenen Parallaxen nicht mit den berechneten übereinstimmen werden. Wir wollen von diesen 7 Sternen zunächst die 3 ausschließen, welche die größten Werte Δg aufweisen, nämlich Boss 2563 ($\Delta g = +5°9$), 3292 ($\Delta g = +6°1$) und 5446 ($\Delta g = +6°8$). Bei letzterem Stern zeigte sich allerdings schließlich, daß der große Wert von Δg bei Boss augenscheinlich auf einem Fehler beruht, denn die Nachrechnung ergibt $\Delta g = +3°2$. Die Ausschließung kann aber aufrechterhalten werden, weil es noch fraglich ist, ob die Radialgeschwindigkeit mit ρ_c hinreichend genau übereinstimmt.

Es bleiben nun also noch 14 Sterne übrig, die zur Berechnung neuer Werte der Koordinaten des Zielpunktes der Bewegung verwandt werden sollen. Während wir bisher bei der Aussonderung der Sterne stets die von Rasmuson angegebenen Werte von ρ_c, Δg und π_c benutzt haben, werden im folgenden alle Rechnungsgrößen neu abgeleitet.

Der Gang der Rechnung war nun folgender: Zunächst wurden mit Hilfe der im Boss-Katalog gegebenen Komponenten μ_α und μ_δ der Eigenbewegung die Gesamteigenbewegung μ und der Positionswinkel g derselben berechnet nach den Formeln:

$$\mu = (\mu_\alpha^2 \cos^2\delta + \mu_\delta^2)^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} g = \mu_\alpha \cos\delta / \mu_\delta .$$

Als Näherungswerte für die Koordinaten des Zielpunktes wurden angenommen

$$A_0 = 99°4 \qquad D_0 = +0°5 .$$

(Die Koordinaten nach Boss sind $A = 99°1$, $D = +0°5$; daß für A_0 ein anderer Wert angesetzt wurde, beruhte auf einem Versehen, welches auf die Endresultate natürlich keinen Einfluß hat.)

Den Positionswinkel g_0 des größten Kreises, der durch einen Stern und den Punkt A_0, D_0 geht, erhält man aus

$$\operatorname{tg} g_0 = \frac{\cos D_0 \sin(A_0 - \alpha)}{\cos\delta \sin D_0 - \sin\delta \cos D_0 \cos(A_0 - \alpha)} .$$

Die Differenzen $g_0 - g$ bilden dann den Ausgangspunkt für die Berechnung der Korrektionen dA_0 und dD_0 von A_0 und D_0. Setzt man

$$a = [\sin\delta - \operatorname{cotg} g_0 \operatorname{cotg}(A_0 - \alpha)] \sin g \sin g_0$$

$$b = \frac{\cos\delta \sin g \sin g_0}{\cos^2 D_0 \sin(A_0 - \alpha)} ,$$

so ist

$$a\,dA_0 + b\,dD_0 = g_0 - g .$$

Diese Gleichungen wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst; dabei wurden die beiden 61^1 und 61^2 Cygni entsprechenden Gleichungen zu einer vereinigt, indem die Mittel aus den entsprechenden g und $g_0 - g$

genommen wurden; dies ist gestattet, da die Massen der beiden Komponenten jedenfalls nahezu gleich sind. Das Resultat der Rechnung war

$$dA_0 = -1^s.08 \qquad dD_0 = -0''.68,$$

womit sich als definitive Koordinaten des Zielpunktes ergeben:

$$A = 98^\circ.3 \qquad D = -0^\circ.2$$
$$\text{m. F.} = \pm 0^\circ.93 \qquad \text{m. F.} = \pm 1^\circ.13$$

Die Koordinaten stimmen mit den von Boss angenommenen innerhalb ihrer mittleren Fehler überein.

Bezeichnet man mit Ω die Geschwindigkeit des Stromes relativ zur Sonne, mit S den Abstand eines Sternes vom Zielpunkte, so ist

$$\Omega \cos S = \rho .$$

Mit Hilfe der beobachteten ρ ergibt sich hieraus:

$$\Omega = 95.4\,\text{km}, \quad \text{m. } F = \pm 2.81\,\text{km},$$

während Boss als Stromgeschwindigkeit 95 km angenommen hatte. Schließlich ergeben sich die rechnerischen Parallaxen aus

$$\pi_c = \frac{\mu}{0.2111\,\Omega \sin S}.$$

Die Tabelle V enthält die im vorangehenden erwähnten Größen für die einzelnen Sterne; zur Erläuterung ist nur zu sagen, daß Δg die Differenz zwischen der Richtung nach dem angegebenen Zielpunkt und der Richtung der beobachteten Eigenbewegung, Γ der senkrechte Abstand des Zielpunktes von dem größten Kreise, in dem die Eigenbewegung vor sich geht ($\Gamma = \Delta g \sin S$), und daß $\Delta\rho = \rho_c - \rho$ ist. Die ρ und π sind aus Tabelle IV entnommen; bei den π sind die trigonometrischen Parallaxen bevorzugt, spektroskopische sind durch das Zeichen $^\times$ hervorgehoben. In Tabelle Va sind schließlich die entsprechenden Größen für die drei ausgeschlossenen Sterne zusammengestellt.

Tabelle V.

Boss	α (1900)	δ (1900)	μ	g	Δg	Γ	$\cos S$	ρ km	$\Delta\rho$ km	π_c	π
3	0°.3	+57°.9	0″.265	81°.8	+1°.5	+1°.5	−0.077	−13.9	+6.6	0″.013	0″.017
314	19.8	+59.7	0.306	98.6	+1.5	+1.5	+0.098	+9.0	+0.3	0.015	0.011
1449	86.3	−80.5	1.095	11.8	+0.5	+0.5	+0.165	+11.6	+4.1	0.056	—
1823	105.0	−67.8	0.243	351.4	+0.9	+0.8	+0.378	+38.8	−2.7	0.013	—
1857	107.0	−48.8	0.196	353.4	−4.4	−3.3	+0.654	+63.6	−1.2	0.013	—
2657	147.4	−25.5	0.213	285.2	+5.0	+4.1	+0.592	+51.9	+4.6	0.013	—
3095	175.4	−40.0	1.573	284.2	−5.9	−5.8	+0.173	+15.7	+0.8	0.080	0.086×
3353	192.0	−3.0	0.262	267.2	+2.5	+2.5	−0.064	−7.6	+1.5	0.013	0.026×
3383	194.3	+11.5	0.273	273.6	−2.5	−2.5	−0.103	−13.6	+3.8	0.014	0.034×
3785	221.3	+38.2	0.276	292.4	−0.6	−0.5	−0.430	−35.8	−5.2	0.015	0.026
4511	266.7	+50.8	0.208	345.8	−0.9	−0.7	−0.622	−56.2	−3.1	0.013	−0.004
5433/34	315.6	+38.3	5.206	52.7	−1.6	−1.2	−0.626	−63.9	+4.2	0.335	0.300
5654	328.9	−57.2	4.696	123.5	+1.2	+1.1	−0.341	−40.4	+7.9	0.250	0.286
5977	347.2	−9.5	0.556	94.7	−0.9	−0.8	−0.354	−32.3	−1.5	0.030	0.013×

Tabelle Va.

Boss	α (1900)	δ (1900)	μ	g	Δg	Γ	$\cos S$	ρ km	$\Delta\rho$ km	π_c	π
2563	141°.9	−80°.4	0".194	310°.5	+5°.5	+5°.4	+0.124	+ 7	+4.8	0".010	—
3292	188.0	−48.0	0.198	264.8	+5.3	+5.3	+0.006	+ 5	−4.4	0.010	—
5446	316.7	−39.8	0.229	126.4	+2.7	+2.2	−0.600	Var.	—	0.014	—

Die Tabellen V und Va enthalten nun alle Sterne, die von der Bossschen Liste von 57 Sternen als vielleicht zum 61 Cygni-Strome gehörig übriggeblieben sind; vielleicht kommen noch einige wenige Sterne aus Tabelle II hinzu, dafür werden aber sicher andererseits noch einige zu streichen sein, deren Parallaxen jetzt noch unbekannt sind. Die Sterne gehören, wie auf Grund ihrer großen Eigenbewegungen von vornherein zu erwarten ist, ganz vorwiegend den späteren Spektralklassen (F2 bis K5, vgl. Tabelle IV) an; nur drei haben ein Spektrum der Klasse A. Für einen dieser drei Sterne, Boss 3292 (τ Centauri), ist aber die Parallaxe noch nicht gemessen worden, so daß es durchaus zweifelhaft ist, ob er die Strombewegung teilt. Interessant ist die Sachlage für Boss 314 (δ Cassiopeiae); dieser Stern könnte nämlich, worauf schon B. Boss hingewiesen hat, recht wohl auch zum Taurus-Strome gehören. Mit den von Rasmuson angenommenen Elementen des Taurus-Stromes findet man nämlich für δ Cassiopeiae $\Delta\rho = +1.0$ km, $\Delta g = +2°.3$, $\pi_c = 0".037$; letzterer Wert entspricht genau dem Mittel aus der trigonometrischen und der spektroskopischen Parallaxe des Sternes (vgl. Tabelle IV), während die trigonometrische Parallaxe allein mehr auf Zugehörigkeit zum 61 Cygni-Strome hindeutet.

Eine genauere Betrachtung der Tabellen V und Va zeigt nun, daß die Darstellung der beobachteten Bewegungen und Parallaxen der 17 Sterne durch die Hypothese der Strombewegung zum Teil mangelhaft ist. In Anbetracht der Größe der Eigenbewegungen sind deren Positionswinkel jedenfalls recht sicher, und die systematischen Fehler der Eigenbewegungen des Boss-Kataloges können auf Δg und Γ keinen großen Einfluß haben. Trotzdem kommen unter den Γ drei Werte vor, die $> 5°$ sind. Auch die $\Delta\rho$ sind größtenteils sicher bestimmt, da es sich, wie schon erwähnt, zumeist um Sterne mit linienreichen Spektren handelt; sie weisen aber ebenfalls zum Teil recht bedeutende Werte auf. Die Parallaxen sind größtenteils sehr klein, und die genäherte Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung will daher bei ihnen nicht viel besagen. Dazu kommt noch, daß, wie wir schon hervorgehoben haben, der Zielpunkt der Bewegung ($A = 98°.3$, $D = -0°.2$) sehr nahe dem der ersten Kapteynschen Trift (nach Eddingtons Diskussion der Boss-Sterne $A = 91°$, $D = -15°$, nach Dysons Diskussion der Sterne mit starker Eigenbewegung $A = 93°$, $D = -7°$) liegt. Jedenfalls ist nach allem der 61 Cygni-Strom keineswegs eine auffallende Erscheinung, und die Zweifel an seiner Realität werden durch die vorstehende Untersuchung noch ganz wesentlich verstärkt. Man tut wohl am besten, ihn einstweilen aus der Liste der Sternströme zu streichen.

In Tabelle VI geben wir noch eine Zusammenstellung der nach der Formel

$$M = m + 5 + 5 \log \pi$$

berechneten absoluten Größen M der in den Tabellen V und Va enthaltenen Sterne. Die m sind der Revised Harvard Photometry entnommen; nur für Boss 5977, der dort nicht vorkommt, ist die genäherte Größe aus dem Boss-Katalog angesetzt. Die M_c ergeben sich mit den berechneten Parallaxen π_c, die M_o mit den in Tabelle V angegebenen trigonometrischen oder spektroskopischen Parallaxen. Für Boss 4511 ist die trigonometrische Parallaxe negativ, und daher ist für diesen Stern die spektroskopische (vgl. Tabelle IV) zur Verwen-

Tabelle VI.

Boss	m	M_c	M_o	Spektr.
3	6.10	+ 1.7	+ 2.2	G 5
314	2.80	− 1.3	− 2.0	A 5
1449	5.65	+ 4.4	—	G 5
1823	5.08	+ 0.7	—	K 2
1857	5.11	+ 0.7	—	K 2
2657	5.00	+ 0.6	—	K 0
3095	5.04	+ 4.6	+ 4.7	G 5
3353	6.15	+ 1.7	+ 3.2	F 6
3383	2.95	− 1.3	+ 0.6	K 0
3785	5.98	+ 1.9	+ 3.1	F 2
4511	5.19	+ 0.8	+ 1.2	A 2
5433	5.57	+ 8.2	+ 8.0	K 5
5434	6.28	+ 8.9	+ 8.7	K 5
5654	4.74	+ 6.7	+ 7.0	K 5
5977	(8.0)	(+ 5.4)	(+ 3.6)	F 5
2563	5.44	+ 0.4	—	F 2 p
3292	4.02	− 1.0	—	A 2
5446	5.26	+ 1.0	—	F 5

dung gekommen. Das große Intervall, das die M umfassen, ist sehr auffallend; vor allem aber ist es auffallend, daß sowohl K-Riesen wie K-Zwerge zu dem Strome gehören. Dieser Umstand scheint gleichfalls gegen die Realität des 61 Cygni-Stromes zu sprechen.

Wir haben uns nun noch mit einigen weiteren Arbeiten, die den 61 Cygni-Strom betreffen, zu beschäftigen. Bald nach dem Erscheinen der beiden zitierten Abhandlungen von B. Boss gab H. N. RUSSELL im Astronomical Journal Nr. 635 — 636 (1912) eine Liste von 12 meist schwachen Sternen mit großer Eigenbewegung, die er als wahrscheinlich zum 61 Cygni-Strome gehörig bezeichnet. Zwei von diesen Sternen, nämlich ζ Herculis und σ Pegasi, haben sich schon bei unseren früheren Untersuchungen als nicht zum Strome gehörig erwiesen. Die übrigen zehn Sterne sind in Tabelle VII zusammengestellt; $\cos S$ ist der Cosinus des Abstandes jedes der Sterne von dem Bossschen Zielpunkte der Eigenbewegung, $\rho_c = 95.4$ km $\cos S$. Die letzte Kolumne enthält die beobachteten Radialgeschwindigkeiten nach VOÛTES Katalog; wie man sieht, sind letztere

von ρ_c für sämtliche Sterne außer für Fed 263 gänzlich verschieden; nur dieser Stern könnte allenfalls zum Strome gehören. Die berechnete Parallaxe ist für ihn $\pi_c = 0''.037$; die trigonometrische Parallaxe ist nach SCHLESINGERS Parallaxen-Katalog $0''.033 \pm 0''.010$, die spektroskopische nach W, $0''.046$, so daß in der Tat eine gute Übereinstimmung besteht. Immerhin ist aber $\Delta\rho = -4.8$ km, also von nicht unbedeutendem Betrage (Spektrum G 5).

Tabelle VII.

	cos S	fc km	VOÛTE km
Lal 1966	+0.065	+ 6.2	−325.1 W
Lal 2450	+0.170	+16.2	0.0 W
Fed 263	+0.107	+10.2	+ 15. W
Gr 884	+0.623	+59.4	+ 26. W
Boss 3558 (τ Boo)	−0.267	−25.5	− 16.4 LBW
Lal 39866	−0.867	−82.7	− 42.9 W
Gr 3357	−0.624	−59.5	− 37. W
Lal 43492	−0.572	−54.6	− 31. W
Lal 45755	−0.241	−23.0	+ 2.1 W
Pi 23^h 267	−0.127	−12.1	+ 3.8 W

Ferner hat H. C. PLUMMER in den Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 72, S. 562 (1912), 73, S. 188 u. 464 (1913) eine Anzahl von Sternen der Spektral-Klassen A und B angegeben, die er für der Zugehörigkeit zum 61 Cygni-Sterne verdächtig hält. Während aber B. Boss sich bei der Auswahl der Sterne auf solche mit Eigenbewegungen von mehr als $0''.175$ beschränkt, geht PLUMMER weit unter diese Grenze hinunter. Es hat offenbar keinen Zweck, diese PLUMMERschen Sterne in den Kreis unserer Betrachtungen zu ziehen, da wir ja die Sterne der Spektralklassen F bis K, deren $\mu < 0''.175$ sind, nicht berücksichtigt haben. Nur zwei von den PLUMMERschen Sternen haben größere Eigenbewegungen, nämlich Boss 264 = ϑ Cassiopeiae ($\mu = 0''.230$) und Boss 33 71 = α Canum venaticorum ($\mu = 0''.236$). Für letzteren Stern ergibt sich aber $\Delta g = -7°.8$, so daß er von der Strombewegung ziemlich weit abweicht. Für ϑ Cassiopeiae findet man dagegen mit den von uns abgeleiteten Elementen der Strombewegung $\Delta g = +2°.2$, $\rho_c = +7.4$ km, ρ (Lick) = +11 km, $\pi_c = 0''.012$, π (nach SCHLESINGER) = $0''.007 \pm 0''.004$, so daß dieser Stern vielleicht zu dem Strome zu rechnen wäre.

Auch A. CORLIN hat sich mit dem 61 Cygni-Strome beschäftigt (Astronomical Journal Nr. 782, 1920). Auf Grund der schon aus dem damals vorliegenden Beobachtungsmaterial hervorgehenden schlechten Übereinstimmung zwischen den beobachteten Bewegungen der Sterne und der Strombewegung schlägt er vor, den Strom nach dem Spektralcharakter der Sterne in drei Komponenten zu zerlegen, die sich alle nach dem Bossschen Zielpunkte, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen. CORLINS »Cluster I« (6 Sterne, Spektrum F) hat eine Geschwindigkeit von 56.5 km, »Cluster II« (6 Sterne, von denen einer ein F 5-, die übrigen G-Spektren haben) eine solche von 82.5 km und schließlich »Cluster III« (3 Sterne, Spektrum K) eine solche

von 103.0 km. Von den insgesamt 15 Sternen gehören nur 9 der Bossschen Liste von 57 Sternen des 61 Cygni-Stromes an.

Vergleichen wir nun die von Corlin berechneten Radialgeschwindigkeiten ρ_c mit den heute bekannten beobachteten Werten ρ (nach Lick Observatory Publications Vol. XVI und nach Voûtes Second Catalogue), so finden wir bei folgenden vier Sternen starke Widersprüche:

Cluster II	Lal 2450	$\rho_c = +13.9$ km	$\rho = 0.0$ km
	Boss 2943	$+34.1$ »	$-9.$ »
	Pi 23^h267	-10.9 »	$+3.8$ »
Cluster III	Lal 39866	-89.2 »	-42.9 »

Nach Streichung dieser Sterne besteht Cluster II nur noch aus drei, Cluster III aus zwei Sternen (61 Cygni und ε Indi). Angesichts dieses Umstandes ist diesen beiden Strömen wohl keine reelle Bedeutung zuzuschreiben.

Etwas günstiger steht es mit Cluster I, bei dessen sechs Sternen keine starken Widersprüche zwischen den berechneten und den bis jetzt bekannten beobachteten Werten von ρ und π auftreten. Aber auch hier ist die Zahl der Sterne so klein, daß es sich kaum lohnt, näher auf die Sachlage einzugehen.

Ausgegeben am 11. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XVI. XVII

Library of Congress
DEC 4 1929
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 30. Mai. (S. 241)
Adresse an Hrn. FRIEDRICH KÜSTNER zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 15. Mai 1929. (S. 242)
Klassensitzung am 6. Juni. (S. 244)
ZIMMERMANN: Besonderes vom Knicken. (S. 245)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50 und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XVI. Gesamtsitzung. 30. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Lüders spricht über die Pāṇḍavasage in den Jātakas.

Die Angaben der Jātakas, die sich auf die Pāṇḍavasage beziehen, werden zusammengestellt und mit dem Mahābhārata verglichen. Es zeigt sich im allgemeinen Übereinstimmung. Das Vidhurapaṇḍitajātaka enthält aber ältere Sagenzüge, von denen sich Spuren auch noch im Epos nachweisen lassen, während sich im Kuṇālajātaka eine völlig widersprechende Angabe findet.

2. Hr. Guthnick überreichte den 10. Band der 1. Abteilung der »Geschichte des Fixsternhimmels« (Karlsruhe 1929).

3. Vorgelegt wurden die 52. Lieferung des Werkes »Das Tierreich«: Myriapoda, 1. Geophilomorpha, bearbeitet von Dr. Graf Attems (Berlin und Leipzig 1929), ferner die Arbeit von G. Haberlandt »Über 'mitogenetische Strahlung'« (Sonderabdruck Leipzig 1929), das Werk von Andreas Heusler »Deutsche Versgeschichte mit Einschluß des altenglischen und altnordischen Stabreimverses«, Band 3, Teil 4 und 5 (Berlin und Leipzig 1929), endlich die »Festschrift der technischen Hochschule Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts 1829—1929« (Berlin 1929).

4. Das korrespondierende Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse Hr. Friedrich Küstner in Bonn feierte am 15. Mai sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum. Die Akademie hat ihm aus diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Akademie hat den Professor an der Universität und am Institut für materielle Kultur in Leningrad Hrn. Dr. Wladimir Beneschewitsch zum korrespondierenden Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse gewählt.

Adresse an Hrn. Friedrich Küstner zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 15. Mai 1929.

Hochverehrter Herr Kollege!

Heute vor 50 Jahren vollzogen Sie an der Universität Straßburg Ihren Eintritt in die Wissenschaft, der Sie seitdem alle Ihre Kräfte mit reichstem Erfolge gewidmet haben. Die Preußische Akademie bringt Ihnen, ihrem langjährigen Mitgliede, zur Feier Ihres goldenen Doktorjubiläums die herzlichsten Glückwünsche dar. Der heutige Festtag gibt ihr willkommene Gelegenheit, Ihrer großen, der Wissenschaft wie unserem Vaterlande zur besonderen Ehre gereichenden wissenschaftlichen Leistungen mit Dankbarkeit und Freude zu gedenken.

Bereits in den Arbeiten Ihrer Jugendzeit verrät sich der spätere, von der ganzen Fachwelt anerkannte, von keinem Zeitgenossen übertroffene Meister der astronomischen Beobachtungskunst, der mit seltener Divinationsgabe sich stets gerade denjenigen großen Aufgaben und Fragen seiner Wissenschaft zuwenden sollte, für die die Zeit der Erfüllung gekommen war. Dem noch nicht Dreißigjährigen gelang die Entdeckung der Veränderlichkeit der Polhöhe. Diese die Aufmerksamkeit der ganzen wissenschaftlichen Welt erregende Entdeckung wird stets zu den Großtaten der Astronomie gezählt werden müssen; sie war kein zufälliger Erfolg, sondern die Frucht einer mit erstaunlicher Schärfe und Kritik durchgeführten Untersuchung und die kühne Tat eines Mannes, der sich seiner Leistungsfähigkeit genau bewußt war. Noch einmal, in reiferen Jahren, war Ihnen ein Erfolg beschieden, der in einiger Beziehung an diesen ersten erinnert: die erstmalige Bestimmung der Sonnenparallaxe oder der Aberrationskonstante aus Radialgeschwindigkeitsmessungen an Fixsternen. Auch dieses Unternehmen setzte unter den damaligen Verhältnissen neben einer unvergleichlichen Beobachtungskunst ein überlegenes Urteil über das mit gegebenen Mitteln Erreichbare voraus.

Am großartigsten aber offenbart sich wohl Ihre glänzende Begabung für alle Aufgaben der messenden Astronomie in Ihrem berühmten Bonner Sternkatalog. Die Zusammenstellung eines Kataloges von Sternörtern, gegründet auf genauen Meridiankreisbeobachtungen, gilt ja im allgemeinen bei aller Unentbehrlichkeit und Verdienstlichkeit derartiger Arbeiten nicht als eine Aufgabe, bei deren Durchführung besondere Lorbeeren zu ernten wären. Sie aber haben das unmöglich Scheinende zuwege gebracht, haben Ihr Werk über die fast unübersehbare Menge ähnlicher weit emporgehoben und es zu

einem klassischen Vorbild für solche Unternehmen gemacht. Nicht weniger gilt dies für Ihre großen photographisch-astrometrischen Arbeiten.

Was der geborene Beobachter auch mit unzulänglichen Mitteln und unter ungünstigen Bedingungen zu erreichen vermag, das haben Sie unter anderem mit Ihren ausgezeichneten spektrographischen Arbeiten bewiesen.

Eine besondere Freude bereitet es der Akademie, daß ein rüstiges Alter es Ihnen ermöglicht, auf Ihrem schönen Ruhesitz in Mehlem, im Anblick des sagenumwobenen Siebengebirges, auch weiterhin Ihre unschätzbare Erfahrung und Ihre tätige Mitarbeit den gegenwärtigen großen Unternehmungen der Astronomie angedeihen zu lassen. Möge es noch recht viele Jahre so bleiben! Dies wünscht Ihnen von Herzen

die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 29. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 6. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Schmidt las »Über den Millouxschen Satz«.

Milloux[1] hat einen schönen Satz entdeckt, dessen Bedeutung durch die interessanten Anwendungen, die Hoheisel[2] von ihm gemacht hat, noch hervorgetreten ist. Der Satz lautet: Es sei im Einheitskreise die analytische Funktion $f(z)$ regulär und $|f(z)| \leq 1$; es sei ferner auf einem vom Nullpunkt zur Peripherie laufenden einfachen Kurvenbogen $|f(z)| \leq m < 1$. Dann gibt es eine von der Funktion und von der Gestalt des Kurvenbogens unabhängige universelle Konstante λ, so daß im Innern des Einheitskreises $|f(z)| \leq m^{\lambda(1-|z|)}$ bleibt. Da der Satz, wenn er für einen Wert λ gilt, für jeden kleineren a fortiori erfüllt ist, so dürfte es nicht ohne Interesse sein, λ möglichst groß zu sichern. Milloux beweist seinen Satz für $\lambda = 2 \cdot e^{-40}$.

In der angezeigten Untersuchung wird ein sehr einfacher Beweis des Millouxschen Satzes gegeben, bei welchem es sich herausstellt, daß der Satz für $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ noch gilt, während er für $\lambda = \frac{1}{2}$ nicht mehr zutrifft.

2. Hr. Zimmermann legte eine Arbeit vor: Besonderes vom Knicken.

Es war bisher üblich, die Knickbedingung eines elastischen Stabes aus dem Verhalten eines willkürlich gewählten Punktes abzuleiten. Jetzt ist es gelungen, diese Beschränkung dadurch zu vermeiden, daß die ganze Biegelinie für die Belastung an der Knickgrenze bestimmt wird. Auf diesem Wege kann eine Reihe von Fragen, die früher in Einzeluntersuchungen behandelt werden mußten, in einheitlicher Weise gelöst werden.

---

[1] Journal de Mathématique 1924.
[2] Sitzungsber. d. Pr. Akad. d. Wiss. 1929.

Besonderes vom Knicken.

Von H. ZIMMERMANN.

Durch die in den früheren Jahrgängen der Sitzungsberichte veröffentlichten Untersuchungen über das Verhalten elastischer Stäbe bei Beanspruchung auf Druck sind die Anschauungen von den Vorgängen beim Knicken wesentlich — so darf man wohl sagen — geändert worden. Die lange Zeit herrschende Meinung, daß ein solcher Stab die EULERsche Knickgrenze nur bei vollkommener Fehlerfreiheit, d. h. bei gerader Achse und achsrechtem Lastangriff, erreichen könne, kann nicht mehr aufrechterhalten werden. Aus dieser Erkenntnis haben sich mannigfaltige und weitgreifende Folgerungen ziehen lassen. Es schien damit ein gewisser Abschluß erreicht zu sein, soweit das in solchen Dingen möglich ist. Inzwischen haben sich aber die Gedankengänge doch fortentwickelt. Den bisherigen Arbeiten lag das Bedürfnis zugrunde, möglichst rasch vorzudringen, um von den irrigen Meinungen frei zu werden. Auf die Form der Darstellung dürfte dabei weniger Wert gelegt werden. Es sind ihr als Folge dieser Eile auch hier und da Rechenfehler unterlaufen, wenn auch nur von nebensächlicher Art. Beim wiederholten Durchdenken hat sich dann aber doch das Bedürfnis nach einem mehr einheitlichen abgerundeten Aufbau der neuen Theorie eingestellt. Es soll, wenn möglich, durch Zusammenfassung des vollständig überarbeiteten Stoffes in einem Buche befriedigt werden. Bei den Vorbereitungen hierzu sind nun wieder Fortschritte, besonders in methodischer Richtung, gemacht worden, die nicht nur für das tiefere wissenschaftliche Eindringen in die Knickfrage, sondern auch für die Anwendung der gewonnenen Einblicke von Wert sein dürften. Davon soll nachstehend ein Beispiel gegeben werden.

Im Jahre 1926 war es zum ersten Male gelungen, einen Gang der Rechnung zu finden, bei dem sowohl die Knickbedingung wie auch die an der Knickgrenze auftretende Formänderung in ein und derselben Gleichung dargestellt wird. Darüber ist auf S. 39 u. ff. der Sitzungsberichte für 1926 das Nötige gesagt. Auf S. 44 und 45 sind solche Gleichungen unter (13) und (20) mitgeteilt. Sie benutzen als maßgebende Formänderung die Ausbiegung y_m in der Mitte eines symmetrisch gestalteten und belasteten Stabes, von dem angenommen wird, daß er anfänglich nach einer Kosinuslinie mit der Scheitelhöhe y_0 gekrümmt, in der Mitte durch eine Einzelkraft Q querbelastet ist, und daß die Längskraft S an den Endhebeln f wirkt. Auf S. 93 desselben Jahrgangs sind die Annahmen durch Verzicht auf die Voraussetzung der

Symmetrie und durch Hinzufügung einer gleichmäßig über die ganze Stablänge verteilten Last p vervollständigt. (Die dort mitgeteilten Ergebnisse sind nicht ganz fehlerfrei infolge eines Versehens bei einem Grenzübergang.) Auf die Einzelheiten gehen wir jetzt nicht ein, da es uns nur auf den Bau und Sinn der Gleichungen ankommt[1].

Sie lassen sich in der symbolischen Form zusammenfassen

$$\frac{y_m}{a} = \frac{Z_1}{v} + Z_2 . \tag{1}$$

(Hierin ist y_m auf die Stablänge a bezogen, um nur mit Zahlen, nicht mit Längen, zu tun zu haben.) Die Größe v ist durch die Gleichung

$$v = 1 - \sqrt{\frac{S}{K}} \tag{2}$$

bestimmt, worin K die Eulerlast, also $K = (\pi : a)^2 \, EJ$. Es wird angenommen, daß die Längskraft S nur wenig kleiner ist als K. Dann ist v eine kleine positive Größe, die zu Null wird, wenn S den Wert K erreicht. Die Größen Z_1 und Z_2 hängen nicht von der Längskraft S ab, sondern nur von den Querbelastungen p und Q, den Hebeln f_1 und f_2, der Anfangsform und dem Querschnitt des Stabes sowie von dessen Länge a; also von lauter unveränderlichen, gegebenen Werten. Veränderlich ist nur die bei $S = K$ verschwindende Größe v.

Wenn nun alle übrigen Größen so beschaffen sind, daß sie der Gleichung

$$Z_1 = 0 \tag{3}$$

genügen, dann hat $y_m : a$ den besonderen Wert

$$\left[\frac{y_m}{a}\right]_g = \frac{0}{v} + Z_2 . \tag{4}$$

Das gilt für jedes v auch bei beliebig weit getriebener Annäherung an Null, d. h. nach Gleichung (2) von S an K. Damit ist bewiesen, daß das durch Gleichung (4) bestimmte $y_m : a$ einen Grenzwert bedeutet, der die elastische Ausbiegung der Stabmitte um so genauer darstellt, je näher die Längskraft dem Wert K kommt. Wir haben diesen Wert von $y_m : a$ deshalb schon durch den Zeiger g gekennzeichnet und ihn früher allgemein Grenzausbiegung genannt.

Wird nun aber in aller Strenge

$$v = 0, \text{ also } S = K, \tag{5}$$

so folgt aus (4)

$$\frac{y_m}{a} = \frac{0}{0} + Z_2 . \tag{6}$$

[1] Sonderdrucke: »Die Knickfestigkeit von Stäben mit Querbelastung« und »Die Knickfestigkeit der Stabverbindungen mit Form- und Belastungsfehlern«.

Die Ausbiegung wird unbestimmt, und damit ist die Knickgrenze erreicht. Um das überhaupt zu ermöglichen, muß die von der Längskraft unabhängige, nur die Art ihres Angriffes und die übrige Anordnung des ganzen Gebildes einschließlich seiner Querbelastung betreffende Gleichung (3) erfüllt sein. Wäre Z_1 nicht Null, so würde die Ausbiegung y_m bei $S = K$ nicht unbestimmt, sondern sie erschiene in der unmöglichen Form $y_m = \infty$, was darauf hindeutet, daß der Stab schon zerstört sein würde, ehe S den Wert K erreicht. Man darf also die Gleichung $Z_1 = 0$ die Knickbedingung nennen. Wird ihr genügt, so tritt das Knicken ein, sobald S den Wert K erreicht. Die Gleichung $Z_1 = 0$ setzt bei uns eine Beziehung zwischen den störenden Einflüssen, die die Abweichung von der Annahme EULERS darstellen: Sie müssen sich gegenseitig aufheben. Bei ihm wird dagegen vorausgesetzt, daß alle diese Einflüsse je für sich Null sind. Dann ist die Gleichung $Z_1 = 0$ natürlich auch erfüllt.

Das sind die Ergebnisse der im Eingang erwähnten Untersuchungen, nur kürzer zusammengefaßt und mit Hinweisen auf das Wesentliche versehen. Jetzt soll über den inzwischen gefundenen weiteren Ausbau des Verfahrens ebenso kurz berichtet werden. Wenn irgendeine der Änderungen unbestimmt wird, die der Stab bei wachsender Längskraft S erleidet, dann werden im allgemeinen seine sämtlichen Formänderungen unbestimmt. Dabei ist der Ton auf das Wort Änderungen zu legen. Denn was sich nicht ändert, wie z. B. die Lage der Endstützen, kann nicht unbestimmt werden. Auch sonst gibt es noch solche Stellen. Bei symmetrischer Anordnung und Belastung kann die Mitte keine Drehung erleiden; die Mitte biegt sich aus, aber die Richtung der Achse bleibt hier immer gleichlaufend mit der Stabsehne. Bei vollkommener Gegensymmetrie dreht sich mit zunehmender Längskraft die Achse in der Mitte, ohne daß sich diese ausbiegt. Von den wenigen Fällen abgesehen, ist es aber gleichgültig, welche Formänderung man benutzen will, um die Knickbedingung zu ermitteln. In Jahrgang 1924 der Sitzungsberichte ist sie z. B. auf S. 281 mit Hilfe der Verdrehung der Stabenden gegeneinander gefunden. Aus der Freiheit der Wahl entspringt die Willkür. Und jede solche Lösung stellt einen Einzelfall dar, der mit anderen nicht verglichen oder verbunden werden kann. Das ist kein großer Mangel, soweit es sich nur um die Knickbedingung handelt, bedenklicher dagegen hinsichtlich der Grenzausbiegung, die ja bei unserem Verfahren zugleich mit der Knickbedingung gefunden wird. Da sie zur Entscheidung der Frage dient, ob nicht unzulässige Spannungen eintreten, bevor die Knickgrenze erreicht ist, wird man sie möglichst für den Punkt der Achse zu bestimmen wünschen, wo sie am größten ist. Dem kann dadurch entsprochen werden, daß man nicht die Grenzlage eines einzelnen Punktes, sondern die der ganzen Biegelinie als Ziel der Rechnung setzt. Das hat in der Tat erreicht werden können, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll. Daß für den dadurch erlangten hohen Grad von Allgemeinheit der Lösung ein Opfer an Einfachheit der Rechnung gebracht werden muß, ist erklärlich.

Es handle sich darum, die Form der Biegelinie eines geraden, in der Längsrichtung achsrecht mit S, quer über die ganze Länge gleichmäßig mit

pa belasteten Stabes bei frei drehbaren Enden für den Fall zu bestimmen, daß S nahe bei K liegt. Für beliebige Werte von S lautet ihre Gleichung bekanntlich

$$(7) \qquad y = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{K}{S} \frac{p}{S} \left(\frac{\cos \pi \frac{x}{a} \sqrt{\frac{S}{K}}}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{S}{K}}} - 1 \right) - \frac{p a^2}{8 S} \left(1 - 4 \left(\frac{x}{a}\right)^2\right).$$

Wir setzen wie in (2) $\sqrt{S:K} = 1 - v$ und entwickeln danach die einzelnen Größen wie folgt:

$$\frac{K}{S} = \frac{1}{(1-v)^2} = 1 + 2v; \qquad \frac{1}{S} = \frac{1}{K}\frac{K}{S} = \frac{1}{K}(1+2v)$$

$$\cos \pi \frac{x}{a} \sqrt{\frac{S}{K}} = \cos \pi \frac{x}{a} + \pi v \frac{x}{a} \sin \pi \frac{x}{a}.$$

$$\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{S}{K}} = \sin \frac{\pi}{2} v = \frac{\pi}{2} v.$$

Mit diesen Werten ergibt sich

$$\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{K}{S} \frac{p}{S} \frac{\cos \pi \frac{x}{a} \sqrt{\frac{S}{K}}}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{S}{K}}} = \frac{p}{K} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{(1+4v)\left(\cos \pi \frac{x}{a} + \pi v \frac{x}{a} \sin \pi \frac{x}{a}\right)}{\pi/2\, v}.$$

Wird ausmultipliziert und dividiert, so erhält man ein Glied mit v im Nenner, eine Anzahl von v freier Glieder und schließlich solche, die v als Faktor enthalten. Diese sind wegzulassen, da sie beim Übergang zu $v = 0$ ohnehin verschwinden. In den Gliedern, die den Nenner $\cos \pi/2 \sqrt{S:K}$ nicht enthalten, ist einfach $S = K$ zu setzen. So ergibt sich als die gesuchte Gleichung der Biegelinie an der Knickgrenze:

$$(8) \qquad y = \frac{2}{\pi^3} \frac{p a^2}{K} \cdot \cos \pi \frac{x}{a} \left(\frac{1}{v}\right) + \frac{p a^2}{K} \left(\frac{8}{\pi^3} \cos \pi \frac{x}{a} + \frac{2}{\pi^2} \frac{x}{a} \sin \pi \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{8} \right).$$

Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß v einen wenn auch kleinen, doch endlichen Wert hat. Sonst würde sich die unmögliche Form $y = \infty$ ergaben, wie es oben schon besprochen ist. Um das zu vermeiden, müßte entweder $p = 0$ sein, womit man auf den Eulerfall zurückkäme. Dann wäre auch die zweite Zeile von (8) Null und der Stab bliebe gerade. Oder es muß noch ein zweiter Einfluß zu p hinzutreten, der eine Gleichung von ähnlichem Bau wie (8) liefert. Dann braucht nicht p Null zu sein, sondern nur die Summe aus p und dem anderen Einfluß. Um dies deutlicher zu machen, führen wir

eine solche Gleichung an, ohne auf ihre Ableitung einzugehen. Der mit p belastete Stab sei außerdem nicht mehr achsrecht belastet, sondern die Längskraft S wirke an den Hebeln f_1 und f_2. Dann lautet die entsprechende Gleichung der Biegelinie

$$y = \frac{1}{\pi}(f_1 + f_2) \cdot \cos \pi \frac{x}{a}\left(\frac{1}{v}\right)$$

$$+ \frac{f_1 + f_2}{2}\left(2\frac{x}{a}\sin \pi \frac{x}{a} - 1\right) \tag{9}$$

$$- \frac{f_1 - f_2}{2}\left(\cdot \sin \pi \frac{x}{a} - 2\frac{x}{a}\right).$$

Die Gleichungen (8) und (9) sind einfach zu addieren und liefern die Knickbedingung

$$\frac{2}{\pi^3}\frac{pa^2}{K} + \frac{1}{\pi}(f_1 + f_2) = 0. \tag{10}$$

Die zweite Zeile von (8) zusammen mit der zweiten und dritten Zeile von (9) ergeben den Wert von y an der Knickgrenze für jeden beliebigen Punkt x des Stabes. Dabei gilt natürlich die Beziehung (10), die es gestattet, entweder p durch $f_1 + f_2$ auszudrücken oder umgekehrt $f_1 + f_2$ durch p. Dagegen ist der Wert von $f_1 - f_2$ durch die Knickbedingung nicht festgelegt. Man kann ihn beliebig wählen und dadurch den Grad der Unsymmetrie der Biegelinie bestimmen. Die Mitte des Stabes beeinflußt das nicht, denn mit $x = 0$ verschwindet $f_1 - f_2$ aus der Gleichung (9)[1]. Anderseits hängt die Knickbedingung nicht von x ab, da $\cos \pi x/a$ aus ihr herausgefallen ist.

Ebenso wie die Ausbiegung y für jedes x durch die Gleichung der Biegelinie bestimmt wird, läßt sich auch die Neigungsänderung oder Verdrehung v der Stabachse als Funktion von x darstellen. Für den Stab mit gleichmäßiger Belastung p lautet die der (8) entsprechende Gleichung

$$v = -\frac{2}{\pi^2}\frac{pa}{K} \cdot \sin \pi \frac{x}{a}\left(\frac{1}{v}\right)$$

$$+ \frac{pa}{K}\left(\frac{6}{\pi^2}\sin \pi \frac{x}{a} - \frac{2}{\pi}\frac{x}{a}\cos \pi \frac{x}{a} - \frac{x}{a}\right). \tag{11}$$

Hier gelten wieder die schon zu (8) gemachten Bemerkungen über den Einfluß des Verschwindens von v und kann auch derselbe Ausweg eingeschlagen

---

[1] Dieses Verhalten wird auch durch eine einfache Überlegung verständlich. Da $f_1 + f_2$ feststeht, kann ein Unterschied der Hebel nur dadurch zustande kommen, daß der eine um ebensoviel zunimmt, wie der andere abnimmt. Die Änderung ist also gegensymmetrisch, woraus sich ergibt, daß sie die Mitte des Stabes nicht beeinflussen kann. Eingehendere Untersuchungen über diese und verwandte Fragen hat der Verfasser in einem Aufsatze über die Formen der Biegelinie gedrückter Stäbe angestellt, der im Jahre 1923 in der »Bautechnik« erschienen ist. Siehe Heft 2 und 3.

werden, indem wir die Gleichung für v des Stabes mit Endhebeln benutzen. Sie lautet

$$(12) \qquad v = -\frac{f_1+f_2}{a} \cdot \sin \pi \frac{x}{a}\left(\frac{1}{v}\right) + \frac{f_1+f_2}{a}\left(\pi \frac{x}{a}\cos \pi \frac{x}{a} + \sin \pi \frac{x}{a}\right) - \frac{f_1-f_2}{a}\left(\frac{\pi}{2}\cdot \cos \pi \frac{x}{a} - 1\right).$$

Durch Addieren von (11) und (12) erhält man die Knickbedingung

$$(13) \qquad \frac{2}{\pi^2}\frac{pa}{K} + \frac{f_1+f_2}{a} = 0.$$

Das ist dieselbe Gleichung wie (10).

Damit ist nun in allgemeinster Form bewiesen, das es nicht nur gleichgültig ist, mit welchem Punkte, sondern auch mit welcher Art der Formänderung man die Knickbedingung bestimmt. Rechnet man dagegen von vornherein mit einem willkürlich gewählten Punkte, so bleibt diese Frage offen. Die zweite Zeile von (11) zusammen mit der zweiten und dritten Zeile von (12) ergeben jetzt natürlich nicht mehr eine Grenzausbiegung wie (8) und (9), sondern die Neigungsänderung der Achse gegen ihre Anfangslage bei Erreichen der Knickgrenze, und zwar für jeden beliebigen Punkt, je nach der Wahl von x.

Die Gleichungen für v regen zu nicht unwichtigen Bemerkungen an. Zunächst die (11) für den ersten Belastungsfall. Für die Mitte des Stabes wird nämlich mit $x = 0$ auch $v = 0$, wie es bei der Symmetrie der ganzen Anordnung zu erwarten ist. Trotzdem erscheint an der Knickgrenze bei $v = 0$ die unbestimmte Form

$$(14) \qquad v = \frac{0}{0}.$$

Das ist ein Seitenstück zum Verhalten des geraden achsrecht belasteten Stabes, bei dem nicht nur v, sondern auch y dauernd Null ist, solange $S < K$, dagegen plötzlich unbestimmt wird mit $S = K$. Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Fällen besteht aber darin, daß schon ein der Mitte unendlich naher Punkt bei dem Stab mit der Belastung p für v an der Knickgrenze den Wert ∞ ergibt, während beim nur achsrecht belasteten Stab alle y an dieser Grenze unbestimmt werden. Es wäre also ein Trugschluß, wenn man aus (14) folgern wollte, daß die Neigung der Achse eines mit p belasteten Stabes auch ohne das Hinzutreten eines anderen Einflusses unbestimmt werden könne.

Ähnlich liegt die Sache bei der Gleichung (12) für den zweiten Belastungsfall; nur ergibt sich mit $x = 0$ bei $v = 0$

$$(15) \qquad v = \frac{0}{0} - \frac{f_1-f_2}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

also eine von Null verschiedene Grenzneigung. Es ist das offenbar eine Folge der Unsymmetrie, die verschwindet, wenn $f_1 = f_2$ gewählt wird.

Noch größere Irrungen können entstehen, wenn man schon vor Einführung von v in die allgemeinen Gleichungen der y und ν einen Punkt willkürlich annimmt, aus dessen Verhalten die Knickbedingung abgeleitet werden soll. Es können dabei gerade die Glieder wegfallen, die das Unbestimmtwerden der Formänderung bei $S = K$ zum Ausdruck bringen. Die Neigung der Stabmitte ist ein in dieser Hinsicht besonders gefährlicher Punkt, wie die vorstehenden Betrachtungen gezeigt haben. Das hat mich schon früher veranlaßt, die Neigungsänderung der Stabenden gegeneinander als Kennzeichen der Knickgrenze zu benutzen, wo die Ausbiegung der Stabmitte dazu nicht geeignet war. Zieht man die ganze Biegelinie oder die ganze Linie der Neigungsänderungen der Achse in der hier beschriebenen Weise zur Bestimmung der Knickgrenze und der Grenzformänderungen heran, dann lassen sich solche Irrtümer leicht vermeiden. Hiervon abgesehen, scheint mir der damit erreichbare Gewinn an Einheitlichkeit des Verfahrens so groß, daß ich die Gleichungen für alle in Betracht kommenden Formen und Belastungsfälle entwickelt habe und in Gestalt einer Tafel übersichtlich geordnet zu veröffentlichen gedenke.

Zum Schluß noch eine Betrachtung allgemeinerer Art. Bei dem hier beschriebenen Verfahren erscheint die Knickbedingung stets in Form einer Nullgleichung. Sie sagt nichts aus über die Größe der in ihr auftretenden Einflüsse, sondern bestimmt nur ihr gegenseitiges Verhältnis. Das wird nicht geändert, wenn man die ganze Gleichung mit einer beliebigen Zahl multipliziert oder dividiert, oder wenn man die etwa in Form von Brüchen in ihr enthaltenen Glieder auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringt usw. Hiernach kann die Knickbedingung bei immer gleicher Bedeutung sehr verschieden aussehen, und solche voneinander abweichende Formen können erhalten werden durch eine verschiedene Art der Ableitung. Unsere Gleichungen (10) und (13) sind dafür Beispiele. Ferner setzen die Ausdrücke für die Grenzformänderung dieselben Beziehungen zwischen den Einflüssen voraus wie die Knickbedingung, denn sie bilden ja mit dieser beim Übergang von v zu Null nur eine Gleichung. Alle willkürlichen Änderungen der eben beschriebenen Art an den Knickbedingungen wirken also zurück auf die Form des Ausdruckes für die Grenzformänderung. Man kann z. B. die Knickbedingung ohne weiteres von der Gleichung für die Grenzformänderung abziehen oder zu ihr hinzufügen, ohne daß die Richtigkeit der Gleichungen beeinträchtigt wird; denn die Summe der abgezogenen oder hinzugefügten Größen ist ja Null. Diese Umstände erklären es, daß die fraglichen Gleichungen in den früheren Abhandlungen nicht immer miteinander übereinzustimmen scheinen. Es liegen da — von einigen Rechen- oder Satzfehlern abgesehen — nicht Widersprüche vor, sondern nur zulässige Abweichungen in der Form.

Ausgegeben am 29. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XVIII. XIX

DEC 4 1929
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 13. Juni. (S. 253)
Klassensitzung am 20. Juni. (S. 254)
STUDY: Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre. (S. 255)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XVIII. Gesamtsitzung. 13. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Nernst demonstrierte einige akustische Versuche, welche die getreue Übertragungsmöglichkeit sehr hoher und sehr tiefer Töne auf elektrischem Wege betreffen, und besprach die Bedeutung, die geeignete Modulationen der Übertragung für Deutlichkeit der Sprache und Klangfülle der Musik besitzen. (Ersch. später.)

2. Hr. Engler überreichte das 16. Heft der »Beiträge zur Flora von Papuasien«, hrsg. von Prof. Dr. C. Lauterbach (Leipzig 1929).

3. Hr. Heymann überreichte das 52. Heft der von ihm herausgegebenen »Arbeiten zum Handels-, Gewerbe- und Landwirtschaftsrecht«, »Wissenschaftliches Eigentum« von Dr. jur. Walter Erman, mit einer Vorrede von Prof. Dr. Ernst Heymann (Marburg i. H. 1929).

4. Vorgelegt wurde endlich das 5. Heft des Supplementbandes der mit Unterstützung der Akademie erschienenen »Opuscula Ichneumonologica« von Prof. Dr. Otto Schmiedeknecht (Blankenburg i. Thür. 1929), sowie das 2. Heft des 2. Teils des 30. Bandes der Serie »Scriptores« der Monumenta Germaniae historica (Leipzig 1929).

5. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt

3600 *RM* für die Fortführung der Leibniz-Ausgabe,
2000 *RM* für die Fortführung des Deutschen Biographischen Jahrbuchs.

Ausgegeben am 22. Juli.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

XIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 20. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Rubner sprach über »alte und neue Irrwege der Volksernährung. (Ersch. später.)

Der Vortragende schildert die wesentlichen Sekten, die im Laufe eines Jahrhunderts auf dem Gebiet der Volksernährung sich geltend gemacht haben; er erläutert die Stellung der Ernährungswissenschaft zu den Laienbewegungen.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. E. Study (Bonn) überreichte eine Abhandlung: »Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre«.

Eine Menge von Dingen kann nicht mit einem dieser Dinge identisch sein. (Totum parte majus est.) Durch Verstoß gegen diese elementare Regel alles Denkens und unter Nichtbeachtung von Cantors Mengendefinition sind die sogenannten Antinomien oder Paradoxien der Mengenlehre zustande gekommen. Das ist bereits bald nach Bekanntwerden der Russellschen Antinomie von A. Schönflies festgestellt worden (1906), später aber hat man diesen Sachverhalt abgeleugnet oder ignoriert. Eine neuerdings verbreitete Auffassung der Mengenlehre ist gegenüber der Theorie Cantors entstellt durch Einschmuggelung eines ihr fremden und dazu fehlerhaft gebildeten Begriffs. Völlig verfehlt sind daher die mannigfachen und sehr weitgehenden Folgerungen, die man aus der vermeintlichen Unlösbarkeit des Rätsels der Antinomien hat ziehen wollen.

Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre.

Von E. STUDY
in Bonn.

Als (um das Jahr 1900) die sogenannten Paradoxien oder Antinomien (Widersprüche) der Mengenlehre bekannt wurden, haben sie Aufsehen erregt, da sie den anscheinend schon vollständigen Sieg der Gedankenwelt G. CANTORS wieder in Frage zu stellen schienen. Seitdem sind sie aus einem akuten zu einem schleichenden Übel geworden. Diesen Krankheitszustand eines wichtigen Teiles der Mathematik scheint man als ein unentrinnbares Fatum anzusehen[1]. Der neuerdings recht heftig gewordene Streit geht dann um allerlei Linderungsmittel, die aber, bei näherem Zusehen, eine verzweifelte Ähnlichkeit mit Kuren à la Doktor Eisenbart aufweisen. Freilich kämpfen nur zwei noch kleine Parteien diesen grimmen Kampf. Ihre Bannerträger führen Fahnen mit merkwürdig vielen übereinstimmenden Devisen daher:

Transzendentaler Idealismus!! Antinomien! Unwissenschaftlichkeit der Analysis! Cavete numeros infinitos! Tertium datur! Schafft euch Scheuklappen an! Tragt farbige Brillen!

Um unliebsamen Verwechslungen vorzubeugen, sind aber auch Banner mit abweichenden Inschriften da:

Intuition!	Figuren auf Papier!
Reifgewordene Logik!	Metamathematik!

Man nennt dies geräuschvolle Treiben Grundlagenstreit, auch reden einige von einer Krisis der Mathematik. Zu der Stärke der Sprache scheint indessen die Überzeugungskraft der von beiden Seiten vorgebrachten Gründe nicht im Verhältnis direkter Proportionalität zu stehen. Die weitaus meisten Mathematiker stehen teilnahmslos abseits. Das ist verdrießlich. Es ist doch klar, daß es ihren Meinungen an »völlig durchleuchteter Evidenz« gebricht. Es darf ihnen somit gesagt werden, daß sie ehrlicherweise zu den Antinomien und dann natürlich auch zur Analysis eine ganz andere Stellung einnehmen müßten[2]. Aber selbst diese ganz unproblematische Sprache hat bisher noch keinen der vielen Pflichtvergessenen und Minderwertigen aus seiner Lethargie aufzurütteln vermocht. Woran das wohl liegen mag?

[1] Siehe z. B. G. HESSENBERG, Jb. d. D. M. V., Bd. 17, 1908, S. 147, 155. A. FRAENKEL, Einleitung in die Mengenlehre, 1928, S. 219, 245, 247.

[2] Mathematische Zeitschrift, Bd. 10, 1921, S. 39. Dort kann man auch sonst noch viel Erbauliches finden.

Krisen, wirkliche Krisen, hat es in der Mathematik schon einige gegeben, die letzte um das Jahr 1872 herum. Jede hat einen Fortschritt eingeleitet. Steht es nun auch diesmal so? Geht es vorwärts, oder haben wir es vielleicht nur mit einer Zersetzungserscheinung zu tun? Mit einem Froschmäusekrieg, mit Ausgeburten jener bei uns herrschenden und bei Mathematikern beliebten idealistischen Philosophie, die den Wahrheitsbegriff subjektiviert hat, und deren Vertreter nun das »mathematisierende« Subjekt, nämlich sich selbst, in den Vordergrund schieben? Ist die Unordnung, die man in der Lehre Cantors festgestellt haben will, nicht am Ende nur in den Köpfen unvorsichtiger Kritiker vorhanden? War es nötig, die Mengentheorie in ein Krankenhaus zu schleppen und sie dort mit Gewaltkuren zu quälen? Und ihr gleich auch noch die Analysis als Leidensgenossin mitzugeben?

Diese Fragen, unter anderen, versuche ich in einem Buche über die Philosophie der Mathematik zu beantworten, das sich gegenwärtig seinem Abschluß nähert. Hier soll nur eine Teilfrage davon abgehandelt werden, nämlich eben die der sogenannten Antinomien, die, solange sie als nicht aufgeklärt gelten, doch wohl nicht ganz leicht genommen werden dürfen.

Sehen wir uns also die Lehre Cantors noch einmal daraufhin an, ob sie wirklich die behaupteten Widersprüche zuläßt!

Was im folgenden vorgetragen werden wird, wird man, zustimmend oder nicht, auf alle Fälle erstaunlich finden, vielleicht auch mit Verdruß betrachten. Es wird behauptet, daß nahezu der gesamten Antinomienliteratur ein ziemlich grober Denkfehler zugrunde liegt. Überdies hat sich, als alles schon zu Papier gebracht war und ich nun dazu überging, der historischen Seite der Sache Aufmerksamkeit zu schenken, herausgestellt, daß die so schmerzlich vermißte Aufklärung der Antinomien schon seit dem Jahre 1906 in der Literatur vorhanden ist. Was ich selbst für richtig halte, findet sich nämlich bereits in einer Arbeit von A. Schoenflies, die kurz nach ihrem Erscheinen einen meines Erachtens in der Hauptsache ganz unberechtigten Widerspruch gefunden hat und in der Folgezeit vollkommen ignoriert worden ist. Das Nähere darüber wolle man im Haupttext nachlesen.

1.

Die Mengendefinition.

G. Cantors endgültige Umgrenzung des Begriffs Menge — vom Jahre 1895 — ist offenbar das Ergebnis einer reiflichen und sehr sorgfältigen Überlegung. Sie lautet:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte (unserer Anschauung oder unseres Denkens) — welche die Elemente der Menge genannt werden.

Dies ist, wie mir scheint, nicht eine Erklärung von idem per idem, als die man sie schon hingestellt hat, sondern eine wirkliche Definition, und zwar nicht eine formale, sondern eine inhaltliche. Es wird nicht von irgendeiner Zusammenfassung geredet, sondern die zusammengefaßten Gegenstände

(Objekte) sollen bestimmt und wohlunterschieden sein. Das letzte trifft z. B. nicht zu für unsere Farben- und Tonempfindungen, auch nicht für Vorstellungen räumlicher Dinge und noch für manches andere. Gewisse ziemlich nebelhafte Begriffsbildungen, die man, sehr zu Unrecht, der Mengenlehre zur Last gelegt hat, wie »die Menge« aller Dinge und »die Menge« aller Begriffe, werden dadurch, als zur mathematischen Bearbeitung ungeeignet, von vornherein ausgeschlossen, ebenso z. B. auch die Gesamtheit aller (bekannten oder bekannten und unbekannten, aber richtigen) mathematischen Lehrsätze.

Es kann sein, daß Gegenstände sicher verschieden sind, daß aber wir sie nicht oder nicht sicher oder nicht immer unterscheiden können, wie z. B. Billardbälle oder eineiige Zwillinge. Das von CANTOR gewählte Wort Element stammt aus der Chemie. Werden nur chemische Unterschiede beachtet, so bilden die Elemente der älteren Chemie eine endliche Menge, deren Elemente wiederum Mengen (von Isotopen) sind. Es sind aber noch nicht alle Elemente und noch weniger alle Isotopen bekannt, und schon manche Elemente sind sehr schwer zu trennen. Daß die zusammengefaßten Gegenstände bestimmt sein sollen, heißt also nicht, daß sie sozusagen auf den Tisch des Hauses gelegt und »überblickt« werden können. Wir wissen nicht, ob π^{π} eine rationale oder irrationale Zahl ist. Das hindert aber nicht, die Begriffe rationale und irrationale Zahl, und auch die zugehörigen Mengen, mit vollkommener Sicherheit anzuwenden.

Das in der Mengendefinition vorkommende Wort Zusammenfassung wird nicht erklärt und kann auch nicht erklärt werden. Es ist ein primitiver Begriff, der nicht mehr auf einfachere Begriffe zurückgeführt werden kann, ebenso wie Zuordnung und Vertauschung, Worte, die ein jeder versteht und über die philosophische Betrachtungen anzustellen also müßig ist. Es ist indessen ein Mißverständnis möglich, das vor allen Dingen abzuschneiden ist. Es handelt sich nicht um den psychischen und also in der Zeit und in einzelnen Individuen verlaufenden Akt eines Zusammenfassens. Es kommt vielmehr auf das, einerlei wie, Zusammengefaßte an. Worte wie Gesamtheit, Inbegriff würden angemessener gewesen sein. CANTOR hatte wohl an die Möglichkeit, daß sein Mengenbegriff psychologisiert werden könnte, gar nicht gedacht. Ihm waren ja die natürlichen Zahlen, von denen er ausging, ein Ding an sich, ein Vorhandenes und zu Erforschendes, wie Gegenstände der Natur, nicht, wie bei DEDEKIND und anderen, an menschliches Denken gebunden, nicht Produkte sogenannter Schöpfungsakte, wie Dichtungen und Werke der bildenden Kunst, aus denen nicht mehr herauszuholen ist, als was vorher hineingesteckt worden war.

Überhaupt hat die Mathematik mit Psychologie nicht das geringste zu tun. Dies haben längst B. BOLZANO und G. FREGE eingehend und überzeugend dargelegt.

Augenblicklich freilich scheint die entgegengesetzte Meinung nicht nur die Oberhand gewonnen zu haben, sondern auch von ihren Vertretern als selbstverständlich angesehen zu werden, ganz als ob die genannten hochverdienten Forscher nie gelebt hätten. Einige bilden sich sogar ein, die Mathematik, oder was sie so nennen, aus dem Nichts — buchstäblich aus dem Nichts!

— erschaffen zu können. Einer objektiven, also nicht anthropologischen Auffassung der Mathematik wird gar kein Gehör gegönnt[1]. Mit dem Schlagwort Existenzialabsolutismus und einigen philosophischen Dekreten ist alles erledigt.

Ich kann diesen Stoff nicht wohl nebenbei abhandeln, will aber doch der Ansicht Ausdruck geben, daß das Umsichgreifen des Psychologismus, der wiederholt auch schon in die Mengenlehre einzudringen versucht hat, dem Gedeihen der mathematischen Wissenschaft sehr abträglich ist.

Jede einzelne Menge ist weiter nichts als die Gesamtheit ihrer Elemente. Werden mehrere Mengen zugleich betrachtet, so tritt jede den übrigen als ein Ganzes gegenüber. Das schließt nicht aus, daß Elemente der einen Menge auch anderen angehören. (Durchschnitte, Teilmengen — Vereinigungsmenge.)

Die Mengendefinition wird gegenstandslos, wenn es sich nur um ein einziges Ding handelt. Sinngemäß wird auch dieser Fall noch unter den Mengenbegriff einbezogen.

Außerdem hat man behufs Vereinfachung von Ausdrucksformen noch eine weitere »Menge« eingeführt, die Nullmenge heißt und eine grammatikalische Fiktion ist wie das Nichts.

Diese beiden Arten sogenannter Mengen, die an sich eine sehr sorgfältige Erörterung verdienen, kommen für das Folgende nicht in Betracht.

2.

Die Antinomien.

Einer Menge, von der P, Q, ... einige (nicht notwendig aufgezählte oder auch nur abzählbare) Elemente sind, werde, wie in der deutschen Literatur üblich, das Zeichen

$$M = \{P, Q, \ldots\}$$

zugeordnet.

Daß eine Menge, die mehr als ein Element hat, von allen ihren Elementen unterschieden werden muß, wird bei erster Bekanntschaft mit der Mengenlehre wohl von einem jeden als selbstverständlich erachtet werden. Es liegt das ja schon in der Definition des Mengenbegriffs und wird auch von mir als vollkommen selbstverständlich angesehen. Bis die Logistiker Burali-Forti (1897) und B. Russell (1903) auf den Gedanken kamen, daß es unter Umständen auch anders sein könnte, hat meines Wissens niemand ein Wort darüber verloren. Die Mengenlehre von F. Hausdorff enthält in der neuesten Ausgabe von 1927 keinen ausdrücklichen Hinweis darauf, daß eine Menge mit einem ihrer Elemente zusammenfallen könnte, und auch in der ganzen ersten Hälfte der Mengenlehre von A. Fraenkel — 1928 — findet sich nichts derart. Hier jedoch erscheint der genannte Gedanke später, und zwar wie etwas, das ohne weiteres einleuchten muß (S. 211). Überhaupt scheint diese Idee, mit der einzigen Ausnahme von A. Schoenflies, nirgends Verwunderung ausgelöst zu haben, wiewohl sie wirklich sehr erstaunlich ist. Ich

[1] Handbuch der Philosophie, Abteilung II: Natur, Geist, Gott, Seiten 31, 41. Der Artikel führt die erstaunliche Überschrift Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.

halte sie — immer bei Mengen, die mehr als ein Element haben — für schlechthin absurd. Denn sie verstößt gegen ein elementares Gesetz alles Denkens, demzufolge jede Gesamtheit mehrerer Dinge, einerlei, ob sie der Mengendefinition genügt oder nicht, etwas Umfassenderes ist als jedes der in ihr vereinigten Dinge (Objekte)[1].

Nehmen wir an, daß P eine Menge ist und außerdem das Element, mit dem M zusammenfallen soll, so haben wir, in Zeichen ausgedrückt, die beiden Voraussetzungen

$$M > P, \quad M = P$$

vor Augen. Diese sind aber so wenig miteinander verträglich, als im Falle von zwei reellen Zahlen m und p die Annahmen

$$m > p, \quad m = p$$

es sind. (Das Zeichen $M > P$ sagt nur aus, daß M außer P noch mindestens ein Element enthält. Es sagt nichts aus über eine etwaige Äquivalenz von M und P, Äquivalenz im Sinne der Mengenlehre.)

Die Annahme $M = P$ ist also wirklich absurd. Nur wer die Mathematik mit einem Formelspiel verwechselt, kann auf einen solchen Gedanken kommen. Daher können wir die Unzuträglichkeit, die darin liegt, daß für ein und dasselbe Ding eine unendliche Menge von Zeichen

$$P = \{P, Q, \ldots\} = \{\{P, Q, \ldots\},\ Q, \ldots\}$$
$$= \{\{\{P, Q, \ldots\},\ Q, \ldots\}\, Q, \ldots\} = \ldots$$

eingeführt wird, ganz auf sich beruhen lassen[2].

Sämtliche sogenannten Antinomien »der Mengenlehre« sind dadurch zustande gekommen, daß man den Begriff einer Gesamtheit (Mehrheit), »die sich selbst (als Element) enthält« ($M = P$), für widerspruchsfrei angesehen und überdies Menge genannt hat. Sie haben also mit der Mengenlehre (der CANTORS!) gar nichts zu tun[3].

Dies gilt zunächst von der »Menge aller Mengen«, die gerade eine solche denkwidrige Beschaffenheit hat, und natürlich auch von der »Menge aller

[1] Das Wort Gesetz ist hier wohl sogar noch zu anspruchsvoll. Daß ein Mehreres mehr ist als das darin enthaltene Einzelne, ist eine Tautologie. Der Satz (Euklid I, *Κοιναὶ ἔννοιαι*, 7) *Τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν* [*ἐστιν*], Totum parte majus est, steht nicht in jedem Lehrbuch der Logik. Er fehlt zum Beispiel in dem von G. STÖRRING. Er darf fehlen, eben wegen seines tautologischen Charakters. Ganzes und Teil sind kontradiktorische Gegensätze.

In einem philosophischen Seminar der Universität Bonn hat einer der Teilnehmer behauptet, der genannte Satz gelte nicht in der Mathematik. Dies dürfte eine sehr gute Formulierung einer gegenwärtig bei Mengentheoretikern herrschenden Ansicht sein.

[2] Ein noch schöneres Beispiel für eine lediglich papierne Existenz ist jene berühmte Bibliothek

$$\{o\},\ \{\{o\}\},\ \{\{\{o\}\}\},\ \cdots,$$

von der ein mir unbekannter Spottvogel gesagt hat, der erste Band enthalte gar nichts, jeder andere aber das Inhaltsverzeichnis der vorhergehenden Bände.

[3] A. SCHOENFLIES, Jb. d. D. M. V., Bd. 15, 1906, S. 22.

Dinge« und ähnlichen, die schon aus dem zuvor genannten Grunde nicht unter den Mengenbegriff gefaßt werden können. Aber auch von feiner Erdachtem gilt dasselbe. Stellen wir, nur um für den Augenblick ein anderes Wort als Menge zu haben, je zwei zueinander ähnliche wohlgeordnete Mengen in eine »Klasse«, so erweist sich der Begriff einer umfassendsten Klasse derart aus demselben Grunde als eine Denkwidrigkeit. Damit fällt das »Burali-Fortische Paradoxon« weg[1]. Daß es, statt von Klassen, von Ordnungszahlen spricht, bedeutet nur einen terminologischen Unterschied. Es ist gar nicht paradox, da man bei Ausgang von widerspruchsvollen Voraussetzungen Widersprüche erwarten muß.

Ebenso absurd und der richtig verstandenen Mengenlehre fremd ist der Inbegriff (»die Menge«) aller Cantorschen Kardinalzahlen[2].

Und auch »das Russellsche Paradoxon« ist aus dem gleichen Grunde illusorisch.

R. ist durch eine Überlegung, bei der die Existenz von »Mengen, die sich selbst (als Element) enthalten« ($M = P$), eine wesentliche Voraussetzung ist, zu dem Schluß gekommen, daß der Inbegriff (nach R. die Menge, class) aller Mengen, die diese Eigenschaft nicht haben, einen Widerspruch enthalten muß. So verhält es sich, aber die Begründung ist fehlerhaft[3]. In Wirklichkeit ist der genannte Inbegriff von dem aller Mengen gar nicht verschieden, dieser aber ist von vornherein als widerspruchsvoll zu erkennen und von uns schon als widerspruchsvoll erkannt. Er hat, wie aller Widersinn, eine lediglich psychische Existenz, geht die Mathematik überhaupt nichts an.

Hiermit sind bereits alle sogenannten Antinomien aufgezählt, die jetzt noch der Mengenlehre zur Last gelegt werden.

Das mit Worten Gesagte läßt sich in einer Formel ausdrücken. Nach der Mengendefinition muß jede Menge mit mehr als einem Element,

$$M = \{P, Q, \cdots\},$$

in der durch sie eindeutig bestimmten umfassenderen und also von ihr verschiedenen Menge

$$M^* = \{P, Q, \cdots; M\}$$

(als Teilmenge) enthalten sein:

$$\boxed{M^* > M}$$

ist, nach der Mengendefinition, das Kriterium, das rechtschaffene Mengen mit mehr als einem Element von widersinnigen Begriffsbildungen trennt, die fälschlich Mengen genannt worden sind.

---

[1] Fraenkel, S. 212. Die »Menge W« hätte gar nicht als Menge bezeichnet werden dürfen.

[2] G. Cantor, Jb. d. D. M. V., Bd. 1, 1892, S. 77.

[3] Ebenso steht es bei Schoenflies. Spätere aber haben Russells Argumentation mehrfach reproduziert. So auch Fraenkel.

In summa: Man hat die Mengentheorie durch Einschmuggelung eines ihr fremden Begriffs (sit venia verbo) verfälscht und außerdem übersehen, daß dieser Begriff sinnlos ist.

Die verbreitete Meinung, daß die Definition Cantors zu nebelhaft oder zu umfassend sei, halte ich, mit Schoenflies, für ein Fehlurteil. Keinesfalls kann sie mit einem Hinweis auf die Antinomien begründet werden. Hirngespinste sind unter Umständen interessante Gegenstände der Psychologie. Für die Mathematik jedoch folgt aus ihrer Existenz nicht das geringste. Besonders auch nicht die angebliche Erbärmlichkeit der Analysis.

F. Hausdorff, der die Definition Cantors anders beurteilt, hat eben darum auf eine deutliche Beschreibung des Mengenbegriffs verzichtet. Er gibt, statt einer Definition, lediglich einige Beispiele von »Mengen«. Damit läßt er die Frage nach dem Geltungsbereich der in seinem Werke enthaltenen Lehrsätze offen. Dieser Geltungsbereich wird genau durch die § 1 reproduzierte Definition angegeben. Nach meiner Ansicht ist die Forderung, daß die Voraussetzungen von Behauptungen genau anzugeben sind, auch für die Mengenlehre bindend.

Ich habe mich mit meinem Freunde, mit dem ich natürlich diesen ganzen Stoff durchgesprochen habe und dem ich auch einige Verbesserungsvorschläge verdanke, über diesen Hauptpunkt leider nicht einigen können.

Völlig verfehlt ist der finitistische Einwand, der von den Gegenständen der Mathematik »Konstruierbarkeit« verlangt. Nicht wegen einer angeblichen Unbestimmtheit dieses Begriffs, die man jedenfalls Kronecker nicht zum Vorwurf machen kann, sondern deshalb, weil das Wesen der Definition verkannt ist. Definieren heißt, für etwas, dessen Existenz schon gesichert ist, einen Namen einführen (Frege). Von Sammel- oder Gattungsdefinitionen, zu denen alle Definitionen der Mathematik gehören, wie z. B. irrationale Zahl, Funktion, Menge, müssen Beispiele angegeben werden, aus denen ersehen werden kann, daß der umschriebene und benannte Begriff nicht leer ist. Mehr zu verlangen ist dogmatisch und unvernünftig, zerstört die Mathematik.

Wäre die genannte Forderung berechtigt, so wäre bei wirklicher Folgerichtigkeit auch schon der allgemeine Begriff der Primzahl, ja schon der der natürlichen Zahl, zu verwerfen. Das »Sieb der Eratosthenes« stellt bereits eine unerfüllbare Forderung. H. Poincaré hat eine derartige Konsequenz wirklich gezogen und dadurch den Finitismus, wider Willen, ad absurdum geführt.

»Quand je parle de tous les nombres entiers, je veux dire tous les nombres entiers qu'on a inventés (!) et tous ceux qu'on pourra inventer un jour ... et c'est ce l'on pourra qui est l'infini.« (Dernières Pensées 1913, S. 131.)

Die Ausführungen Russells über das nach ihm benannte Paradoxon scheint noch niemand genau gelesen zu haben. Sonst hätte man schwerlich so dogmatisch zu Werke gehen können, wie z. B. Fraenkel es tut.

Zunächst fällt auf, daß bei R. die ganz und gar nicht überflüssige Einschränkung Cantors, derzufolge die Elemente einer Menge [class] wohl unterschieden sein müssen, vollständig fehlt. Überall arbeitet R. mit verschwommenen Begriffen, deren manche er zu »Mengen« zusammenfaßt. Ferner hätte bemerkt werden sollen, daß R. seiner Sache gar nicht sicher ist. Seine Theorie treibt bald hierhin, bald dorthin, wie eine losgerissene Boje.

Ich zitiere eine Reihe von Stellen aus der Schrift, von der die vermeintliche Erschütterung der Lehre Cantors hauptsächlich ausgegangen ist, nämlich aus den Principles of Mathematics (1903).

S. 69: A complex whole can never be one of its own constituents.

Das Gegenteil davon liest man etwas später:

S. 112: A class as one may be a term of itself as many. Dies, das man schlecht genug übersetzt hat, heißt: Eine Menge mag als Ganzes eines ihrer eigenen Elemente sein. Noch später kommen dem Autor wieder Bedenken:

S. 358: The possibility that whole and part may have the same number of terms [elements] is, it must be confessed, shocking to common-sense.

Natürlich hätte es heißen müssen: incompatible with logic[1].

Ebenda: Common-sense, therefore, is here in a very sorry plight; it must choose (?) between the paradox of Zeno and the paradox of Cantor (gemeint ist die Nichtexistenz einer größten Kardinalzahl). I do not propose to help it, since I consider that, in the face of proofs (?) it ought to commit suicide in despair (!).

S. 362: . . . One would be tempted to say that the conception of the totality of things, or the whole universe of entities and existents, is in some way illegitimate and inherently contrary to logic. But it is undesirable (!!) to adopt so desperate a measure (measure?) as long as hope remains of some less heroic (?) solution.

S. 368: Thus the application of Cantor's argument to the doubtful (?) cases yields contradictions (?), though I have been unable to find any point in which the argument appears faulty. The only solution I can suggest is, to accept the conclusion that there is no greatest [transfinite] number and (?) the doctrine of types and to deny that there are any true propositions concerning all objects or all properties. Yet the latter at least seems plainly false, since all propositions are at any rate true or false, even if they had no other common properties. (Hier ist übersehen, daß es auch völlig sinnlose Behauptungen gibt und daß gerade die zur Erörterung stehende dazu gehört.) In this unsatisfactory state, I reluctantly leave the problem to the ingenuity of the reader. (Alle Hervorhebungen rühren von mir her.)

Mit diesem Schluß, der an eine Humoreske von Mark Twain erinnert, scheint also R.s Mengentheorie endgültig gestrandet zu sein, und das ist sie denn auch. Indessen hat es nicht an Versuchen gefehlt, sie wieder flott zu machen. Nach einigen hier- und dorthin weisenden Meditationen (Zigzag Theory, Theory of Limitation of Size, No-class Theory) ist anscheinend ein groß angelegter Versuch derart gelungen, der aber einen recht dogmatischen Charakter hat und auch sonst nicht einwandfrei ist (Vicious-circle Principle, Hierarchy of Types, Axiom of Reducibility). Und dieses alles, und weitere Ausbesserungsversuche selbst davon, lediglich darum, weil es in einer Untersuchung über die Logik der Mathematik als unerwünscht und allzu »heroisch« empfunden wird, den Geboten der gewöhnlichen Logik Folge zu leisten[2]. Eine Mathematik der Wünsche und Willkürakte, dazu noch vorgetragen in einer nahezu unlesbaren Sprache.

Andere »Paradoxien« oder »Antinomien«, die der Mengenlehre ebenfalls in die Schuhe geschoben worden sind, würden vielmehr in der allgemeinen Logik abzuhandeln sein[3]. Paradox (aber nur im Sinne von puzzling) ist zum Beispiel der witzig erdachte Begriff eines Barbiers, der alle Männer seines Dorfs barbiert, die sich nicht selbst barbieren; oder der aus dem Altertum überlieferte zirkelhafte Krokodilsschluß, den Cervantes bei Gelegenheit der Statthalterschaft von Sancho Pansa so hübsch verwertet hat. Übrigens ist

[1] Eine erstaunliche Verwechselung. Common-sense (sagt das Oxford Dictionary) is normal understanding, good practical sense in everyday affairs, general feeling of mankind or community.

[2] B. Russell, Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 4, 1907. American Journal of Mathematics, Bd. 30, 1908. A. N. Whitehead and B. Russell, Principia Mathematica, I. 1910, 1925; II. 1912, 1927; III. 1913, 1927 (alles in zwei Auflagen). Siehe ferner A. Fraenkel, 1928, S. 244—268.

[3] Dies ist schon öfter bemerkt worden, so von Fraenkel. Den Unterschied jedoch, der zwischen »logischen« und »epistemologischen« Antinomien gemacht werden soll, verstehe ich nicht. Sie scheinen mir allesamt »logisch«, nämlich unlogisch zu sein.

schon von P. Finsler, der das gleichfalls hierhergehörige Richardsche Paradoxon analysiert hat, hervorgehoben worden, daß bei weitem nicht jede zirkelhafte Definition widerspruchsvoll ist (Jb. d. D. M. V., Bd. 34, 1925): $x = 2x - 1$. Der von Russell versuchte Ausschluß aller Definitionen derart schüttet das Kind mit dem Bade aus.

Die angeführten Beispiele zeigen lediglich, daß man Zusammenstellungen von Worten bilden kann, deren Widersinn nicht oder doch nicht für jeden auf den ersten Blick erkennbar ist — wie eben auch die Wortverbindung Menge (oder Gesamtheit), die mit einem ihrer Elemente zusammenfällt. An einem solchen Spiel kann man gelegentlich seine Freude haben, eine tiefere Bedeutung hat es nicht.

Ist das Vorgetragene richtig, so liegt die Sache genau so wie bei den Antinomien Kants, die nicht minder berühmt sind als die »der Mengenlehre« und ebenfalls eine nicht geringe Verwirrung angerichtet haben. Ist es überhaupt denkbar, daß es sich anders verhalten könnte?

3.

Bedenken und Zusätze.

Gegen das Vorgetragene werden vermutlich Einwände erhoben werden. Einer besagt, daß die durch die Antinomien verursachte Beunruhigung nicht beseitigt ist. Dies räume ich ein. Es gibt indessen auch eingebildete Ursachen der Beunruhigung. Zuerst kommt doch wohl, daß nach bestem Vermögen ein Zustand hergestellt wird, der logisch einwandfrei zu sein scheint; dann, daß unnütze Verwickelungen und sonstige Schönheitsfehler vermieden werden; und zuletzt erst kommt, wenn überhaupt, in sehr weitem Abstand die Beschwichtigung einer schlecht, ja vielleicht gar nicht motivierten mathematischen Seelenangst. Derartigem kann man mit Gründen nicht beikommen. Zwangsvorstellungen gehen nicht den Mathematiker, sondern den Psychiater an.

Ein anderes Bedenken: Außer Mathematikern, die ihre Urteile leichthin bilden — sie z. B. fix und fertig aus der »Zentralstelle« des Denkens beziehen —, gibt es doch zum Glück auch andere. Ist es denn glaubhaft, daß ein so scharfsinniger und gewissenhafter Forscher wie Frege, wie es heißt auch Dedekind, und nicht minder einwandfreie Mathematiker dieser unserer Gegenwart, den Widerspruch zwischen $M > P$ und $M = P$ übersehen sollten? Ist es überhaupt möglich, daß die Auflösung der Antinomien, die eine ganze Literatur hervorgerufen haben, so lächerlich einfach sein kann, wie es von Schoenflies behauptet worden ist und auch hier behauptet wird?

Wie man sieht, habe ich mich das schon selbst gefragt. Ich bin indessen zu dem Schluß gekommen, daß das wohlfeilste aller Argumente, das argumentum ad hominem, keinen genügenden Grund zu literarischem Selbstmord abgibt. Mag man immerhin auch mich majorisieren oder ignorieren, wie man Schoenflies majorisiert und ignoriert hat.

Frege hat sich, grundehrlich wie er war, der Argumentation Russells, die er aus einer brieflichen Mitteilung kannte, tatsächlich gebeugt, wiewohl er sein Lebenswerk nahezu zerstört glaubte. Ein leuchtendes Vorbild für solche, die Ausflüchte machen, wenn man ihnen Fehler

nachweist (Grundgesetze der Arithmetik II, 1903, S. 253, 254). Er sagt, es handle sich um seinen Grundsatz V. Das verstehe ich nicht, da ich Fr.s Begriffsschrift nicht lesen kann. Es kommt aber hier nichts darauf an.

Daß auch G. Cantor der Argumentation Russells zum Opfer gefallen sein sollte, ist sehr schwer zu glauben, wiewohl ihm seine theologischen Spekulationen allerdings einen bösen Streich gespielt haben. (Vgl. O. Becker, Mathematische Existenz, 1927, S. 83 = Zeitschrift für Philosophie und phänomenologische Forschung, Bd. VIII, S. 523.)

Gegen die Arbeit von Schoenflies, auf die hier Bezug genommen worden ist, sind bald nach ihrem Erscheinen Einwendungen erhoben worden, und es scheint, daß ebendiese die Wirkung gehabt haben, daß der darin enthaltene und hier nochmals dargelegte Gedanke alsbald in der Versenkung verschwand[1].

Diese Einwände sind nicht alle unberechtigt, wohl aber ist es der, der den Kern der Sache treffen soll. Die Kritiker stimmen darin überein, daß sie den durch $M = P$ gekennzeichneten widerspruchsvollen Begriffsbildungen Existenz zuschreiben. Sie unterscheiden aber nicht zwischen nur-psychischer und mathematischer Existenz.

Wie man nun auch den Begriff der mathematischen Existenz fassen mag, Freiheit von Widersprüchen muß jedenfalls verlangt werden. Im Betrieb der mathematischen Wissenschaft ist natürlich auch Widerspruchsvolles nicht zu entbehren, es kommt aber nur vor, um zurückgewiesen zu werden ($x^3 + y^3 = z^3$, x, y, z natürliche Zahlen), und so wird es insbesondere gebraucht im indirekten Beweisverfahren.

Bei Korselt liest man, der Cantorsche Satz: »Zu jedem Inbegriff gibt es einen Inbegriff von höherer Mächtigkeit« sei falsch (S. 219). Das hat K. aber nicht bei Cantor gefunden. Er polemisiert gegen ein eigenes Phantasieprodukt.

Noch weniger umsichtig ist Hessenberg zu Werke gegangen. Bei ihm heißt es gar (S. 147):

»Mit der Konstatierung, daß in eine Paradoxie widerspruchsvolle Begriffe eingehen, ist . . . bestenfalls die Tatsache der Paradoxie konstatiert, was bei allgemein (?) anerkannten Paradoxien eine überflüssige Mühe ist — niemals aber ist darin eine Lösung enthalten.« Es ist unmöglich, so etwas ernst zu nehmen. Selbstverständlich besteht die »Auflösung« einer »Paradoxie« eben darin, daß man den gemachten Denkfehler nachweist — wie es Schönflies getan hatte.

Wer die »Antinomien der Mengenlehre« anerkennt, kann mit Aussicht auf einen gewissen Erfolg immer noch eines versuchen. Sie werden sich vielleicht umgehen lassen. Man kann auch gar nicht vorhandene Klippen umschiffen. So ist E. Zermelo verfahren, der sich durch seinen Wohlordnungssatz ein bedeutendes Verdienst um die Mengenlehre älteren Stils erworben hatte, dann auch A. Fraenkel (1928, S. 268—293).

[1] A. Korselt, Jb. d. D. M. V., Bd. 15, 1906, und G. Hessenberg, ebenda, Bd. 17, 1908.

Die sogenannte axiomatische Begründungsart der Mengenlehre vermeidet die Widersprüche, verstopft ihre Quelle aber nicht. Sie schießt mit Kanonen nach Spatzen, die nicht da sind, und überdies ist sie zu formal. Schon damit kann ich nicht einverstanden sein, daß allgemeine Grundsätze des Denkens (*Κοιναὶ ἔννοιαι*) als besondere »Axiome der Mengenlehre« hingestellt werden.

An der Selbstverständlichkeit, daß zu jeder Menge (jeder widerspruchsfrei gebildeten Menge!) eine Potenzmenge gehört, wird nicht das mindeste dadurch geändert, daß man statt von einer Selbstverständlichkeit von einem Axiom spricht. Nur sieht das »philosophischer« aus. Am wenigsten können Psychologisten gegen die Existenz von Potenzmengen unendlicher Mengen etwas einwenden. Denn sie können sich auch schon die Potenzmengen hinreichend großer endlicher Mengen nicht vorstellen, deren Existenz sie zugeben. Keinesfalls können solche Betrachtungen mit dem Hinweis auf die Antinomien motiviert werden, wenn diese, wie doch wohl nachgewiesen sein dürfte, lediglich Gespenster sind. Und nun soll gar noch die gesamte Mathematik, mit den natürlichen Zahlen angefangen, auf eine so beschaffene Mengenlehre gegründet werden. Th. Skolem, der die Zermelosche Theorie kritisiert hat[1], hat mit Recht auf die Künstelei derartiger Versuche hingewiesen — da doch die Arithmetik schon durch Induktionsschlüsse und rekurrente Definitionen hinreichend begründet ist.

Im Zusammenhang mit den Antinomien ist mehrfach (von den mathematischen Intuitionisten) vor einer gedankenlosen Anwendung der Begriffe immer, alle, jeder auf Unendliches gewarnt worden. Nach Hilbert sollen sogar »für das Unendliche« die Gesetze der Logik nicht gelten, und in der Natur soll nirgends Unendliches (kein Kontinuum) zu finden sein! (Math. Annalen, 1928, S. 170, 174, 190). Ganz gewiß kann man zu erstaunlichen Folgerungen kommen, wenn man unter dem Sammelbegriff »des« Unendlichen Widerspruchsvolles einschließt. Wie sollten für Unendliches die Gesetze der Logik nicht gelten, da wir doch nur durch Denken, unter Anwendung ebendieser Gesetze, zu seinem Begriff kommen können! Und wo bleiben Zeit und Raum der Physik, Kraftfelder, kinetische und potentielle Energie, Farben- und Tonkontinuen und noch anderes?!

Es liegt gar kein Grund zur Beunruhigung vor. Bei Gebrauch der überall nötigen Vorsicht können die Begriffe immer, alle, jeder ganz selbstverständlicherweise auf Unendliches angewendet werden, und zwar mit vollkommener Sicherheit. Zum Beispiel: Je zwei wohlgeordnete Mengen sind entweder zueinander ähnlich oder die eine ist zu einem Abschnitt der anderen ähnlich[2].

---

[1] Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongreß der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors. (1922) 1923.

[2] Auf dem Mathematikerkongreß zu Heidelberg (1904) soll Cantor einen seiner Bemängler gefragt haben: Geben Sie mir die Existenz der Zahl Zwei zu? Ja? Dann lassen Sie sich umarmen! Sie haben mir alles zugegeben.

Freilich werden noch weitere Gründe dafür angegeben, daß alles Unendliche die Einführung funkelnagelneuer Denkverfahren erfordern soll. Dieser unerfreuliche und leider bereits recht umfangreiche Stoff geht uns hier nichts an. Er wird in dem eingangs genannten Buch abgehandelt werden.

4.

Andere Beurteilungen der Antinomien.

Daß Widersprüche im Denken in Verstößen gegen die Logik ihre Quelle haben müssen, dürfte wohl, von einigen Eigenbrödlern abgesehen, allgemein zugestanden werden.

Im Falle der Mengenlehre konnte jedoch der Umstand, daß die Quelle des Widersinns einigermaßen im Verborgenen floß, schon eine beträchtliche Unsicherheit hervorrufen. Das mehrfach erwähnte Werk von A. Fraenkel leidet in seiner zweiten Hälfte sehr darunter. Alles, was dort abgehandelt wird, ist mit Gespensterfurcht motiviert und nach meiner Meinung nicht richtig bewertet. Was sollen uns noch so »grandiose« oder »gigantische« Lehrgebäude, wenn den Problemen eine vernünftige Motivierung fehlt und der Aufbau überdies dogmatisch und unlogisch ist? In dem Buche von Fraenkel selbst kommt dazu noch, daß sein zweiter Teil den ersten verleugnet und daß, wie bei Russell, alles unklar hin und her schwankt. Von dem doch schon vorhandenen Versuch, Cantors Kritikern das Wasser abzugraben, berichtet die einhundertundachtzig Druckseiten umfassende Schilderung Fr.s überhaupt nichts.

Neuerdings hat K. Menger einen weiteren solchen Versuch gemacht (Jb. d. D. M. V., Bd. 37, 1928). Gleich anderen hat er aber den Wortlaut der Mengendefinition nicht beachtet.

Auch er ist der Begriffsschiebung zum Opfer gefallen, die von den Logistikern verursacht worden war. Er arbeitet, wie Russell, mit dem Begriff von »Mengen, die sich nicht als Element enthalten«, läßt also auch anders geartete »Mengen« zu. Außerdem soll es noch »Unmengen« geben, die M. nicht als widerspruchsvoll betrachtet, die nämlich, nach ihm, anderen »Gesetzen« folgen als die Mengen. Durch die Verwechselung von Unmengen mit Mengen läßt er die Antinomien zustande kommen.

Die Unmengen sind ganz und gar widersinnig, und auch in dem verwendeten Mengenbegriff steckt noch, wie gesagt, der hier kritisierte Widersinn. Außerdem liegt ein circulus vitiosus vor. Es geht nicht an, die Unmengen dadurch zu definieren, daß sie den Gesetzen der Mengenlehre nicht folgen, und dann zu behaupten, man hätte sie mit Mengen verwechselt. Die Antinomien sind nicht beseitigt, sondern lediglich mit Hilfe eines Zauberwortes eskamotiert.

Mit der Parallelisierung von un-endlichen, un-abzählbaren, un-mengenhaften Inbegriffen, in denen das Präfix eine Negation bedeutet, kann man allenfalls eine Terminologie motivieren, mehr aber nicht.

Im gemeinen Sprachgebrauch bezeichnet das Wort Menge einen nicht näher bekannten Inbegriff zahlreicher Gegenstände (Menge von Geld, von Druckfehlern usw.), Unmenge aber einen Inbegriff, dessen Ausmaß alle Vorstellung übersteigt. So, wie M. das Wort gebrauchen will, kann es jedenfalls nicht verwendet werden, wohl aber könnte man es den durch die Gleichung M = P charakterisierten fehlerhaften Begriffsbildungen anheften.

Dann würde allerdings auch schon das papierene Monstrum

$$P = \{P, Q\} = \{\{P, Q\},\ Q\} = \ldots,$$

das nur zwei Elemente enthält, Unmenge heißen müssen.

Ausgegeben am 22. Juli.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Library of Congress
DEC 4 1929
Smithsonian Deposit

1929 XX—XXII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 27. Juni. (S. 269)
Klassensitzung am 11. Juli. (S. 270)
LANDAU: Bemerkungen zu einer Arbeit von Hrn. HOHEISEL über die Zetafunktion. (S. 271)
A. OSTROWSKI: Über Schwankungen analytischer Funktionen, die gegebene Werte nicht annehmen. (S. 276)
Gesamtsitzung am 18. Juli. (S. 288)
v. FICKER: Der Sturm in Norddeutschland am 4. Juli 1928. (S. 290)
HABERLANDT: Über Regenerationsvorgänge bei *Bryopsis* und *Codium*. (S. 327)
Adresse an Hrn. MAX PLANCK zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. Juni 1929. (S. 341)
RUBNER: Alte und neue Irrwege auf dem Gebiete der Volksernährung. (Mitteilung aus der Sitzung der phys.-math. Klasse vom 20. Juni.) (S. 343)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XX. Gesamtsitzung. 27. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Hintze las über Wesen und Verbreitung des Feudalismus.

Das Wesen des fränkischen Feudalismus beruht auf der romanisch-germanischen Kultursynthese. Er stellt den Versuch dar, mit den persönlichen Herrschaftsmitteln des germanischen Königtums und den von der Kirche übernommenen Resten römischer anstaltlicher Organisation ein großes Reich zu regieren. Er besteht in dem Zusammenwirken eines militärischen, eines ökonomisch-sozialen und eines politischen Faktors. Nur wo diese drei Faktoren zusammen nachweisbar sind, kann von Feudalismus im vollen Sinne, d. h. im Sinne eines Systems, nicht bloß einer mehr oder minder wirksamen Tendenz, gesprochen werden. Das ist, abgesehen von den eigentlichen Nachfolgestaaten des karolingischen Reiches (Frankreich und Deutschland, mit Teilen von Italien und Spanien, wozu unter gewissen Vorbehalten auch England hinzuzurechnen ist) nur noch in Rußland, dem arabischen und osmanischen Reiche und Japan der Fall. Merkwürdigerweise zeigen gerade auch diese Staaten einen ähnlichen weltgeschichtlichen Hintergrund der Kultursynthese wie das fränkische Reich, so daß man es als eine historische Regel betrachten kann, daß Feudalismus sich nur dort in voller Ausbildung gezeigt hat, wo die reguläre Entwicklung von einer lockeren Stamm- und Sippenverfassung zu einer festen Staats- und Gesellschaftsordnung sich nicht wie in den antiken Staaten in unmittelbarem Übergang vollzogen hat, sondern auf dem Umwege über eine imperialistische Großstaatsbildung, zu der eine besondere weltgeschichtliche Konstellation drängte. In Rußland und den Islamstaaten erfolgte eine solche imperialistische Großstaatsbildung durch Eroberung im Anschluß an die Antike (Byzanz bzw. Sassanidenreich), in Japan durch Rezeption der chinesischen gemäßigtzentralistischen Regierungsweise der Tangzeit und der Konfuzianischen Staatsphilosophie in der sogenannten Taikwa-Reform.

2. Hr. Kehr überreichte den Bericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae historica 1928.

3. Das korrespondierende Mitglied Hr. Boas übersandte seine Abhandlungen »Stylistic aspects of primitive literature« (Sonderabdruck 1925), »The eruption of deciduous teeth among Hebrew infants« (Sonderabdruck 1927) sowie weitere 5 Sonderabdrucke kleinerer Veröffentlichungen.

4. Vorgelegt wurde die 20. Lieferung (Band II, Lief. 6) des »Rheinischen Wörterbuches«, bearb. und herausgegeben von Josef Müller (Bonn 1929).

Ausgegeben am 20. August.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 11. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Johnsen sprach über den β-Salmiak und verwandte Kristallarten. (Ersch. später.)

Die Symmetrieklasse *O* wird für den β-Salmiak bestätigt; die Pentagonikositetraeder waren an allen 15 Kristallen linke, was den bisher an NH_4Cl gemachten Erfahrungen entspricht.

Die Umwandlung eines β-NH_4Cl-Kristalls in α-NH_4Cl führt zu einem pseudomorphen, aber nicht homoaxialen Aggregat, ebenso die Umwandlung eines β-NH_4Br-Kristalls in α-NH_4Br sowie diejenige von α-NH_4J in β-NH_4J; bei den Rückumwandlungen geht wieder jedes Kriställchen des Aggregates in ein noch feineres Aggregat über. Es wird die Kontraktion des kleinsten Abstandes von Anion und Kation sowie die Volumenvergrößerung für den Übergang von β-NH_4Cl, β-NH_4Br, β-NH_4J in die α-Kristallart berechnet; α-KBr, α-KJ und α-RbJ müßten beim Übergang in die β-CsCl-Struktur eine Vergrößerung ihres kleinsten Anion-Kation-Abstandes um 7%, 22% und 7% erfahren. Unsere Kenntnis der Kohäsionseigenschaften kubischer Ammonium- und Alkali-Haloïdsalze wird erweitert.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. Landau in Göttingen übersandte eine Abhandlung »Bemerkungen zu einer Arbeit von Hrn. Hoheisel über die Zetafunktion«.

Die Abhandlung bringt eine Verschärfung der Sätze von Hrn. Hoheisel auf S. 219—223 dieses Bandes.

3. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. A. Ostrowski in Basel vor: Über Schwankungen analytischer Funktionen, die gegebene Werte nicht annehmen.

Die Abhandlung enthält den Beweis eines neuen Satzes über Schwankungen analytischer Funktionen in den Kreisringen, der als eine quantitative Verschärfung des großen Picardschen Satzes angesehen werden kann. Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem Satz von Schottky über Schwankungen analytischer Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten, der von neuem bewiesen und etwas verschärft wird.

Bemerkungen zu einer Arbeit von Hrn. HOHEISEL über die Zetafunktion.

Von E. LANDAU
in Göttingen.

Einleitung.

In seiner auf S. 219 - 223 dieses Bandes veröffentlichten Abhandlung *Über das Verhalten des reziproken Wertes der RIEMANNschen ζ-Funktion* geht Hr. HOHEISEL von folgendem Problem aus:

Nachzuweisen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ *eine Folge ins Unendliche wachsender* $t > 0$ *gibt, so daß*

$$(1) \qquad |\zeta(s)| > e^{-\varepsilon t} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \sigma \leqq 1$$

ist; und das Vorhandensein einer möglichst dichten derartigen Folge zu zeigen.

(Es ist gleichgültig, ob ich vom Intervall $0 \leqq \sigma \leqq 1$ oder etwa vom Intervall $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ oder von der Menge aller reellen σ spreche; denn für $\sigma \leqq 0$, $t > P_1(\varepsilon)$ und für $\sigma \geqq 1$, $t > P_2(\varepsilon)$ ist bekanntlich durchweg

$$(2) \qquad |\zeta(s)| > e^{-\varepsilon t}.$$

Alle $P(\varepsilon)$ bezeichnen positive, nur von ε abhängige Zahlen.)

Hierbei ist Hrn. HOHEISEL meine Arbeit *Neuer Beweis eines Satzes von Herrn VALIRON* (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 29 [1920], S. 239) unbekannt geblieben. Er findet (obendrein unter Heranziehung eines neueren Satzes von Hrn. MILLOUX aus der allgemeinen Funktionentheorie) nur den Satz A: (1) *gilt bei jedem* $T > P_3(\varepsilon)$ *für ein* $t = t(T, \varepsilon)$ *mit*

$$T \leqq t \leqq T + P_4(\varepsilon) \frac{\log^2 T}{T}.$$

Die älteren Mittel geben jedoch sofort eine viel bessere (kleinere) Größenordnung (z. B. $e^{-\sqrt{T}}$) für die Länge des sicher ein t enthaltenden Intervalls $\left(\text{als } \frac{\log^2 T}{T}\right)$; denn z. B. mit $d = e^{-\sqrt{T}}$ statt $d =$ constans gilt meine zitierte Abhandlung (jetzt mit absolut konstanten $k_1, \ldots$) wörtlich bis zur letzten Zeile ausschließlich, und diese lautet jetzt

$$\log|\zeta(\sigma + \tau i)| > -k_4 \log\tau - k_5 \log\tau \log\frac{4}{d} > -\varepsilon\tau \text{ für } T > P_5(\varepsilon).$$

Übrigens entnahm ich damals die Formel

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(\log t) + \sum_{|t-\gamma|<1} \frac{1}{s-\rho} \quad \text{für } 0 \leqq \sigma \leqq 2 \tag{3}$$

noch aus meinem *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, 1909); d. h. ich benutzte die Existenz von $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene, die Riemannsche Funktionalgleichung und den Hadamardschen Satz, daß $(s-1)\zeta(s)$ eine ganze Funktion des Geschlechtes 1 ist. Aber in meiner Arbeit *Über die Zetafunktion und die Hadamardsche Theorie der ganzen Funktionen* (Mathematische Zeitschrift, Bd. 26 [1927], S. 170—175, Hilfssatz 1 auf S. 171—172) hatte ich (3) schon ohne all das bewiesen; es handelt sich also um eine allgemeine Eigenschaft aller in einem Vertikalstreifen regulären Funktionen, wenn diese nur gewissen Wachstumsbeschränkungen unterworfen sind. Entsprechend betont Hr. Hoheisel (S. 223, Z. 7—9) mit Recht, daß hinter seinem Hauptsatz B (aus dem der Satz A bei ihm folgt) eine solche allgemeine Eigenschaft steckt. Die Bedeutung des schönen von Hrn. Milloux entdeckten Satzes kann natürlich nicht dadurch zurücktreten, daß seine Anwendung auf die Zetafunktion unpraktisch war und Hrn. Hoheisel zu viel schwächeren Ergebnissen geführt hat, als mich mein primitives Mittel führt, nämlich die Heranziehung eines algebraischen Satzes von Tschebyschef (vgl. S. 374 meines *Handbuchs*, wo $x = \frac{4}{l}y$ zu setzen ist): *Sind* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *reell, so gibt es in jedem reellen Intervall der Länge* l *ein* y *mit*

$$\prod_{\nu=1}^{n} |y - \eta_\nu| \geqq \left(\frac{l}{4}\right)^n.$$

Also: *Sind* $\rho_1, \ldots, \rho_n$ *komplex, so gibt es in jedem Horizontalstreifen der Dicke* l *eine Horizontale und in jedem Vertikalstreifen der Dicke* l *eine Vertikale, auf denen durchweg*

$$\left|\prod_{\nu=1}^{n} (s-\rho_\nu)\right| \geqq \left(\frac{l}{4}\right)^n. \tag{4}$$

Denn

$$\left|\prod_{\nu=1}^{n} (s-\rho_\nu)\right| \geqq \prod_{\nu=1}^{n} |t - \Im\rho_\nu|, \quad \left|\prod_{\nu=1}^{n} (s-\rho_\nu)\right| \geqq \prod_{\nu=1}^{n} |\sigma - \Re\rho_\nu|.$$

Hrn. Hoheisels Satz B besagt: *Zwei Punkte* $s_0 = \sigma_0 + Ti$, $s_1 = \sigma_1 + T_1 i$ *lassen sich für* $T > P_6(\varepsilon)$, $|s_1 - s_0| \geqq P_7(\varepsilon)\frac{\log T}{T}$ *durch keine Kurve verbinden, auf der durchweg*

$$|\zeta(s)| \leqq e^{-\varepsilon t}.$$

(Auch hier darf natürlich alsbald $-1 \leqq \sigma_0 \leqq 2$ angenommen werden.)

Mit den alten Mitteln kann ich auch Satz B leicht beweisen und zu dem entsprechenden Wortlaut mit $e^{-\sqrt{T}}$ (sogar z. B. $e^{-P_8(\varepsilon)\frac{T}{\log T}}$) statt $P_7(\varepsilon)\frac{\log T}{T}$

verschärfen; entsprechend auch seine am Schluß bemerkte Zerlegung des Halbstreifens $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq P_9(\varepsilon)$ in achsenparallele Rechtecke mit Seiten $< P_{10}(\varepsilon)\frac{\log^2 T}{T}$, wo T die Ordinate des unteren Randes bezeichnet, so daß auf den Rändern der Rechtecke durchweg (2) gilt; hier wird $P_{10}(\varepsilon)\frac{\log^2 T}{T}$ z. B. zu $e^{-P_{11}(\varepsilon)\frac{T}{\log T}}$ verschärft.

Im § 1 beweise ich einen allgemeinen Satz der Funktionentheorie, aus dem dann in § 2 speziell die genannten HOHEISELschen und neuen Eigenschaften der ζ-Funktion folgen. Bei der Formulierung jenes Satzes, namentlich in bezug auf die Konstanten, gehe ich nicht besonders sparsam vor; dadurch kommt der Kern der Sache deutlicher heraus.

Die Konvergenz der HARDY-LITTLEWOODschen Reihe kann ich ebensowenig beweisen wie diese und Hr. HOHEISEL; aber aus meinem Satz folgt eine viel dünnere konvergenzerzeugende Gliederzusammenfassung als bei Hrn. HOHEISEL.

§ 1.

Satz: *Es gibt eine positive Weltkonstante p mit folgender Eigenschaft.*

Es sei $N > 0$. Im Quadrat

$$(Q) \qquad -4 \leqq \sigma \leqq 8, \quad 0 \leqq t \leqq 12$$

sei $f(s)$ regulär und

$$(5) \qquad |f(s)| < e^N.$$

Es sei

$$(6) \qquad f(2+6i) = 1$$

und

$$(7) \qquad f(s) \neq 0 \text{ für } 1 < \sigma \leqq 8, \quad 2 \leqq t \leqq 10.$$

Es sei

$$0 < E < \tfrac{1}{2}.$$

Dann gibt es ein $t = t(f, E)$ mit

$$6 \leqq t \leqq 6 + E, \quad |f(s)| > E^{pN} \quad \text{für} \quad -1 \leqq \sigma \leqq 2,$$

und zu jedem S mit

$$-1 \leqq S, \quad S + E \leqq 2$$

gibt es ein $\sigma = \sigma(f, E, S)$ mit

$$S \leqq \sigma \leqq S + E, \quad |f(s)| > E^{pN} \quad \text{für} \quad 6 \leqq t \leqq 7.$$

Beweis: $n = n(f)$ bezeichne die Anzahl der Wurzeln ρ von $f(s)$ im Rechteck

$$(R) \qquad -2 \leqq \sigma \leqq 1, \quad 2 \leqq t \leqq 10.$$

Nach dem JACOBI-JENSENschen Satz, auf die Kreise um $2+6i$ mit den Radien 6 und $4\sqrt{2}$ angewendet, ist (da (R) zum kleineren und der größere zu (Q) gehört) nach (5) und (6)

$$n < \frac{N}{\log \frac{6}{4\sqrt{2}}} = p_1 N. \tag{8}$$

(Auch $p_1, \ldots, p_9$ sind positive Weltkonstanten.)

Die Funktion

$$\frac{f(s)}{\prod_{(R)} (s-\rho)} = g(s)$$

(das über die Wurzeln ρ in (R) erstreckte Produkt bezeichnet, wenn es kein solches ρ gibt, 1; wie jedes leere Produkt in der Folge) ist für (Q) regulär und nach (7) für

$$(R_1) \qquad -2 \leqq \sigma \leqq 8, \quad 2 \leqq t \leqq 10$$

von 0 verschieden. Für (R_1) ist also

$$g(s) = e^{h(s)}, \quad h(s) \text{ regulär.}$$

Für $s_0 = 2+6i$ ist jedes

$$|s_0 - \rho| \leqq 4\sqrt{2},$$

also nach (6) und (8)

$$\Re h(s_0) = \log |g(s_0)| = -\log \prod_{(R)} |s_0 - \rho| > -p_2 N. \tag{9}$$

Auf dem Rand von (Q) ist jedes

$$|s-\rho| > 1,$$

also nach (5)

$$|g(s)| \leqq |f(s)| < e^N.$$

Für $|s-s_0| \leqq 4$ (was zu (R_1) gehört) ist also

$$\Re h(s) = \log |g(s)| < N. \tag{10}$$

Wegen (9) und (10) ist für $|s-s_0| \leqq \frac{7}{2}$ nach der CARATHÉODORYschen Ungleichung

$$\Re h(s) > -p_2 N - 2\frac{\frac{7}{2}}{4-\frac{7}{2}}(p_2+1)N = -p_3 N.$$

Für

$$-1 \leqq \sigma \leqq 2, \quad 6 \leqq t \leqq 7$$

(was zu $|s-s_0| \leqq \frac{7}{2}$ gehört) ist also

$$\Re h(s) > -p_3 N,$$
$$|f(s)| \geqq e^{-p_3 N} \Big|\prod_{(R)} (s-\rho)\Big|.$$

Nach dem TSCHEBYSCHEFschen Satz ((4) mit $l = E$) gibt es also zu jedem E mit $0 < E < \frac{1}{2}$ ein t mit $6 \leqq t \leqq 6+E$ bzw. zu jedem Paar E, S mit $E < \frac{1}{2}$, $-1 \leqq S < S+E \leqq 2$ ein σ mit $S \leqq \sigma \leqq S+E$, so daß für $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ bzw. für $6 \leqq t \leqq 7$

$$|f(s)| \geqq e^{-p_3 N} e^{-n \log \frac{4}{E}} > e^{-p_3 N - p_1 N \log \frac{4}{E}} > e^{-pN \log \frac{1}{E}} = E^{pN}.$$

§ 2.

Auf

$$f(s) = \frac{\zeta(s+(T-6)i)}{\zeta(2+Ti)}, \quad T \geqq 7$$

ist der Satz des § 1 mit

$$N = p_4 \log T$$

anwendbar; denn für $-4 \leqq \sigma \leqq 8$, $T-6 \leqq t \leqq T+6$, $T \geqq 7$ ist bekanntlich

$$|\zeta(s)| < T^{p_5},$$
$$\left|\frac{1}{\zeta(2+Ti)}\right| < p_6 < T^{p_7},$$

somit für $-4 \leqq \sigma \leqq 8$, $0 \leqq t \leqq 12$

$$|f(s)| < T^{p_5+p_7} = T^{p_4},$$

und (6), (7) sind auch erfüllt.

Nach dem Satz des § 1 gibt es also wegen

$$|\zeta(2+Ti)| > p_8$$

für $T \geqq 7$, $0 < E < \frac{1}{2}$ ein t auf $T \leqq t \leqq T+E$ bzw. für $T \geqq 7$, $E < \frac{1}{2}$, $-1 \leqq S < S+E \leqq 2$ ein σ auf $S \leqq \sigma \leqq S+E$, so daß für $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ bzw. für $T \leqq t \leqq T+1$

$$|\zeta(s)| > p_8 e^{-pp_4 \log T \log \frac{1}{E}} > e^{-p_9 \log T \log \frac{1}{E}}. \tag{11}$$

Für $\varepsilon > 0$, $E = e^{-\varepsilon T}$, $T > P_{12}(\varepsilon)$ ist $E < \frac{1}{2}$ und die rechte Seite von (11) gleich $e^{-\varepsilon T}$.

Damit sind offenbar alle in der Einleitung ausgesprochenen Behauptungen bewiesen.

Göttingen, den 10. Juli 1929.

Über Schwankungen analytischer Funktionen, die gegebene Werte nicht annehmen.

Von Prof. Dr. Alexander Ostrowski
in Basel.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

I.

1. Der große Picardsche Satz läßt sich bekanntlich so formulieren: *Ist $f(z)$ in einer Umgebung des Nullpunktes (bis eventuell auf den Punkt $z = 0$) eindeutig und regulär, und nimmt $f(z)$ dort zwei Werte nicht an, so ist $f(z)$ auch in $z = 0$ regulär oder hat dort einen Pol.*

Da man für $f(z) \neq 0$ statt $f(z)$ auch $\frac{1}{f(z)}$ betrachten könnte, genügt es, den Satz so zu formulieren: *Ist $f(z)$ in einer Umgebung von $z = 0$ eindeutig und regulär (bis eventuell auf $z = 0$), ist das $\operatorname{Inf}_{0 < |z| \leq r} |f(z)|$ für jedes hinreichend kleine r nicht größer als 1, und läßt $f(z)$ zwei verschiedene Werte aus, so ist $f(z)$ in $z = 0$ regulär.*

Zum Beweise dieses Satzes würde es genügen zu zeigen, daß $f(z)$ gegen einen Wert konvergiert, wenn z gegen den Nullpunkt geht. Denn dann ist $zf(z)$ auch im Nullpunkte differenzierbar, daher regulär, und da $zf(z)$ im Nullpunkt den Wert Null haben muß, muß dann auch $f(z)$ im Nullpunkt regulär sein.

Zum Nachweise der Existenz des Grenzwertes von $f(z)$ für $z \to 0$ genügt es aber zu zeigen, daß unter unseren Voraussetzungen die *Schwankung von $f(z)$ in $0 < |z| \leq \rho$ mit $\rho \downarrow 0$[1] gegen 0 konvergiert.*

2. Wir wollen nun im folgenden einen allgemeinen funktionentheoretischen Satz beweisen[2], aus dem diese Tatsache ohne weiteres folgt, und der als eine quantitative Verallgemeinerung des großen Picardschen Satzes angesehen werden kann, ebenso wie der bekannte Schottkysche Satz eine wesent-

[1] Durch $\rho \downarrow \alpha$, $\rho \uparrow \alpha$ bezeichnen wir das monotone Abnehmen bzw. Zunehmen gegen α.

[2] Diesen Satz habe ich nebst anderen Ergebnissen in der Sitzung der Göttinger Math. Ges. vom 16. Dez. 1924 vorgetragen (vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung. Bd. 34 (1926), p. 103 der schrägen pagina) sowie eine Skizze seines Beweises brieflich Hrn. Landau auf seine Bitte hin in den Weihnachtsferien 1924/25 mitgeteilt. Der hier wiedergegebene Beweis entspricht im wesentlichen der Beweisanordnung, die ich in einer im Sommersemester 1925 in Göttingen gehaltenen Vorlesung vorgetragen habe.

liche quantitative Verallgemeinerung des speziellen Picardschen Satzes ist. Wir behaupten:

Satz 1. *Jedem* $\varepsilon > 0$ *entspricht ein* $\sigma(\varepsilon) > 1$ *derart, daß, wenn eine Funktion* $f(z)$ *im Kreisring*

$$(1) \qquad \frac{r_1}{\sigma(\varepsilon)} < |z| < r_2\,\sigma(\varepsilon), \qquad r_1 \leqq r_2$$

regulär und von 0 *und* 1 *verschieden ist, sowie*

$$(2) \qquad \operatorname*{Min}_{r_1 \leqq |z| \leqq r_2} |f(z)| \leqq 1$$

gilt, die Schwankung von $f(z)$ *im Kreisring* $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$ *den Wert* ε *nicht überschreitet.*

Hierbei ist also $\sigma(\varepsilon)$ *eine universelle Funktion von* ε, *die in keiner Weise von* $f(z)$ *und* $\frac{r_2}{r_1}$ *abhängt.*

Bemerkung 1. Wollte man die Voraussetzung (2) nicht machen, so kann man offenbar die Behauptung des Satzes 1 so abändern, daß für *eine der beiden Funktionen* $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ die Schwankung im Kreisring $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$ den Wert ε nicht überschreitet, da ja die Voraussetzung (2) entweder für f oder für $\frac{1}{f}$ sicher erfüllt sein muß[1].

Bemerkung 2. Ersetzt man die Voraussetzung (2) durch

$$(2') \qquad \operatorname*{Min}_{r_1 \leqq |z| \leqq r_2} |f(z)| \leqq A,$$

so bleibt die Behauptung des Satzes 1 bestehen, wobei aber $\sigma(A, \varepsilon)$ nunmehr auch von A abhängt. Denn es genügt offenbar anzunehmen, daß $A > 1$ ist. Ist dann etwa für $r_1 \leqq |z| \leqq r_2 : |f(z_0)| = \alpha = \operatorname*{Min}_{r_1 \leqq |z| \leqq r_2} |f(z)|$, so genügt es

[1] Wesentlich eleganter und durchsichtiger läßt sich unser Satz formulieren, wenn man von dem Begriff der *Kugelschwankung* Gebrauch macht. Wenn nämlich die Werte von $f(z)$ im Kreisring $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$ als Punkte auf der Riemannschen Kugel aufgetragen werden, kann man die obere Grenze der kürzesten auf der Kugel gemessenen Distanzen zweier solcher Punkte als die *Kugelschwankung* von $f(z)$ im Kreisring $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$ bezeichnen. (Vgl. die Abhandlung des Verfassers: Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes, Mathematische Zeitschrift, Bd. 24 (1925), pp. 232—233.) Man kann nun die Bedingung (2) des Satzes 1 gänzlich fallen lassen, wenn man in der Behauptung die Schwankung von $f(z)$ durch die *Kugelschwankung* ersetzt. Eine geeignete lineare Transformation gestattet dann, den Satz 1 folgendermaßen zu formulieren:

Zu jedem Paar positiver Zahlen ε, δ *läßt sich ein* $\sigma(\varepsilon, \delta) > 1$ *derart finden, daß, wenn* $f(z)$ *im Kreisring* $\frac{r_1}{\sigma(\varepsilon, \delta)} < |z| < r_2\,\sigma(\varepsilon, \delta)$, $r_1 \leqq r_2$, *meromorph ist und drei Werte* a, b, c *ausläßt, deren gegenseitige Kugeldistanzen nicht kleiner als* δ *sind, die Kugelschwankung von* $f(z)$ *im Kreisring* $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$ *den Wert* ε *nicht überschreitet.*

ferner, $1 < \alpha \leqq A$ anzunehmen. Dann aber gilt nach dem Satze 1, angewandt auf $\frac{1}{f(z)}$, für $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$

$$\left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} \right| \leqq \varepsilon, \tag{3}$$

$$|f(z) - f(z_0)| \leqq |f(z_0)| \cdot |f(z)| \cdot \varepsilon;$$

andererseits folgt aber aus (3)

$$\frac{1}{|f(z)|} \geqq \frac{1}{|f(z_0)|} - \varepsilon = \frac{1}{\alpha} - \varepsilon = \frac{1 - \alpha\varepsilon}{\alpha},$$

und daher, wenn $\alpha\varepsilon \leqq A\varepsilon < 1$ ist,

$$|f(z)| \leqq \frac{\alpha}{1 - \alpha\varepsilon},$$

$$|f(z) - f(z_0)| \leqq \frac{\varepsilon\alpha^2}{1 - \alpha\varepsilon} \leqq \varepsilon \frac{A^2}{1 - \varepsilon A}.$$

Bestimmt man also ε_1 aus

$$\frac{\varepsilon_1 A^2}{1 - \varepsilon_1 A} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2A^2 + \varepsilon A}$$

und setzt man $\sigma(\varepsilon_1) = \sigma\left(\frac{\varepsilon}{2A^2 + \varepsilon A}\right) = \sigma(A, \varepsilon)$, so bleibt der Satz 1 richtig, wenn in ihm die Voraussetzung (2) durch (2′) und $\sigma(\varepsilon)$ durch $\sigma(A, \varepsilon)$ ersetzt wird[1]. —

---

[1] Es ist von Interesse, zu zeigen, wie aus dieser Formulierung auch der Schottkysche Satz gefolgert werden kann. Zuerst folgt aus dieser Formulierung für ein $f(z)$, das für $|z| < 1$ regulär und 0 und 1 verschieden ist, sowie für das $|f(0)| \leqq e$ gilt:

$$\text{(a)} \quad |f(z) - f(0)| \leqq 1, \quad |f(z)| \leqq e + 1 < e^2 \text{ für } |z| < \frac{1}{\sigma(e+1, 1)} = \gamma.$$

Ist nun $|f(0)| \leqq A$, $A > e$, und wieder $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden, so sei $n = [\lg A] + 1$, $g(z) = f(z)^{\frac{1}{n}}$; dann liefert (a) für $|z| \leqq \gamma$

$$|g(z)| < e^2,$$

$$\text{(b)} \quad |f(z)| < e^{2n} \leqq e^{2\lg A + 2} < A^4, \quad |z| \leqq \gamma.$$

Dies wende man weiter auf die Funktion $f(z_0 + (1-\gamma)z)$ an, wo $|z_0| = \gamma$ ist. Dann folgt, daß

$$|f(z_0 + (1-\gamma)z)| \leqq A^{4^2}, \quad |z| \leqq \gamma,$$

$$|f(z)| \leqq A^{4^2} \text{ für } |z| \leqq \gamma + (1-\gamma)\gamma = 1 - (1-\gamma)^2$$

ist. Weiter wende man (b) auf $f(z_0 + (1-\gamma)^2 z)$ an, wo $|z_0| = 1 - (1-\gamma)^2$ ist; dann folgt

$$|f(z)| \leqq A^{4^3}, \quad |z| \leqq 1 - (1-\gamma)^3$$

und allgemein

$$|f(z)| \leqq A^{4^m}, \quad |z| \leqq 1 - (1-\gamma)^m.$$

3. Der Beweis des Satzes 1 beruht auf einem älteren funktionentheoretischen Satze von Schottky, der, für zweifachen Zusammenhang spezialisiert, lautet:

Satz 2. *Ist $f(z)$ in einem von zwei analytischen Kurven begrenzten zweifach zusammenhängenden Bereich (Bereich = Gebiet + Rand) regulär, und sind s_1 und s_2 die Schwankungen von $f(z)$ auf den beiden Randkurven, so ist die Schwankung von $f(z)$ im ganzen Bereich nicht größer als $s_1 + s_2$.*

Dieser Satz ergibt sich bei Schottky aus einer wesentlich schärferen Abschätzung für komplexe Potentiale mit Hilfe einer geeignet konstruierten Schlitzabbildung des betreffenden (bei Schottky allgemein n-fach zusammenhängenden) Bereiches[1]. Wir gehen in Abschnitten III—V auf den Schottkyschen Satz ein, um sowohl einen einfacheren direkten Beweis als auch verschiedene Verschärfungen und Verallgemeinerungen dieses Satzes zu besprechen, sowie zu zeigen, daß dieser Satz in einem gewissen Sinne (für die Gesamtheit aller n-fach zusammenhängenden Bereiche) der »beste« ist. Insbesondere werden wir zeigen, daß, sobald s_1, s_2 von 0 verschieden sind, die Schwankung von $f(z)$ kleiner als $s_1 + s_2$ ist.

II.

4. Dem Beweise des Satzes 1 schicken wir zwei Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 1. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta = \delta_1(\varepsilon) > 0$ derart, daß, wenn $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden ist, und $|f(0)| \leqq 2$ ist, die Schwankung von $f(z)$ im Kreise $|z| \leqq \delta$ den Betrag ε nicht überschreitet.*

Da aber $1-(1-\gamma)^m = 1-\mathfrak{S}$ für hinreichend große m sich beliebig wenig von 1 unterscheidet, folgt daraus der Schottkysche Satz. —

Aus unserem Satze folgt ferner der folgende Satz:

Ist $0 < a < b$, so gibt es ein α mit $0 < \alpha < 1$, so daß, wenn $f(z)$ für ein ϱ mit $0 \leqq \varrho < 1$ eine im Kreisring

$$\alpha\varrho < |z| < 1$$

eindeutige und reguläre Funktion ist, die dort von 0 und 1 verschieden ist, im Kreisring

$$\varrho < |z| < \alpha$$

entweder durchweg $|f(z)| > a$ oder durchweg $|f(z)| < b$ ist.

Man braucht nur ε unseres Satzes 1 kleiner anzunehmen als Min $\left(b-a, \frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ und $\alpha = \sigma(\varepsilon)$ zu setzen sowie $r_2 = \frac{1}{\sigma(\varepsilon)}$ zu wählen.

Dieser Satz ist in wesentlich speziellerer Formulierung (der Kreisring $\varrho^2 < |z| < 1$ statt $\alpha\varrho < |z| < 1$, sowie $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$) von Hrn. Carathéodory 1912 (C. R., t. 154, p. 1690) aufgestellt worden, der ihn als eine quantitative Verschärfung des großen Picardschen Satzes ansieht. Wie unser Satz 1 zeigt, dürfte die Einführung der Schwankungen in diesem Zusammenhange durchaus dem Wesen der Sache entsprechen und erst zu den Resultaten führen, in denen die geometrische Eigentümlichkeit der Kreisringkonfiguration scharf zum Ausdruck kommt.

[1] F. Schottky, Über die Wertschwankungen der harmonischen Funktionen zweier reellen Veränderlichen und der Funktionen eines komplexen Arguments, Crelles Journal. Bd. 117 (1897), pp. 225—253, insbesondere p. 250.

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Schottkyschen Satze und dem Schwarzschen Lemma: Denn nach dem Schottkyschen Satz ist $|f(z)| \leqq C$ für $|z| \leqq \frac{1}{2}$, wo C eine absolute Konstante ist. Z. B. kann hier für C, wie aus einigen an anderer Stelle zu veröffentlichenden Abschätzungen des Verfassers hervorgeht, der Wert e^{24} gesetzt werden. Dann liefert das Schwarzsche Lemma, angewandt auf $f(z)-f(0)$, die Abschätzung

$$|f(z)-f(0)| \leqq \rho(C+2), \qquad 0<\rho<1,$$
$$|z| \leqq \frac{\rho}{2}$$

so daß die Schwankung von $f(z)$ im Kreise $|z| \leqq \frac{\rho}{2}$ höchstens gleich $2\rho(C+2)$ ist. Daher ist die Schwankung von $f(z)$ höchstens gleich ε, $1 \geqq \varepsilon > 0$, im Kreise $|z| = \delta = \delta_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4(C+2)}$. Hier kann also für $\delta_1(\varepsilon)$ εe^{-26} gesetzt werden. Und für $\varepsilon > 1$ setze man $\delta_1(\varepsilon) = \delta_1(1)$.

5. Hilfssatz 2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 1$ derart, daß, wenn für $\frac{r}{\delta(\varepsilon)} < |z| < r\delta(\varepsilon)$, $r > 0$, $f(z)$ regulär und von 0 und 1 verschieden ist und $\underset{|z|=r}{\text{Min}} |f(z)| \leqq 2$ ist, die Schwankung von $f(z)$ auf dem Kreise $|z| = r$ den Betrag ε nicht überschreitet. Für $\delta(\varepsilon)$ kann insbesondere $e^{\frac{\pi}{\delta_1(\varepsilon)}}$ gesetzt werden.*

Beweis. Wir setzen in $f(z)$ $z = e^v$ ein, so daß $f(e^v) = g(v)$ im Parallelstreifen

$$\lg r - \lg \delta < \Re v < \lg r + \lg \delta, \quad \lg \delta = \frac{\pi}{\delta_1(\varepsilon)},$$

regulär und von 0 und 1 verschieden ist, und ferner für ein $v = v_0$ mit $\Re v_0 = \lg r$ $|g(v_0)| \leqq 2$ ist[1]. Auf der Strecke

$$\Re v = \lg r, \quad |\Im v - \Im v_0| \leqq \pi \tag{4}$$

nimmt $g(v)$ alle und nur die Werte an, die $f(z)$ auf $|z| = r$ annimmt. Nun zeigt die Anwendung des Hilfssatzes 1 auf die Funktion $g(v_0 + w \lg \delta)$ von w, daß die Schwankung dieser Funktion im Kreise $|w| \leqq \delta_1(\varepsilon)$, d. h. die Schwankung von $f(z)$ für $|v - v_0| \leqq \pi$ und daher auch auf der Strecke (4) kleiner ist als ε, w. z. b. w.

---

[1] Die Abbildung $z = e^v$ ist für den Beweis des großen Picardschen Satzes zuerst von Lindelöf benutzt worden. Doch ist ihre Eigenschaft, die für uns hier wesentlich ist, daß nämlich das volle Bild der Peripherie eines Kreises im Innern eines Kreises der Bildebene mit *relativ beliebig kleinem* Radius enthalten ist, erst in der oben zitierten Arbeit von Hrn. Carathéodory zum Ausdruck gekommen. Auf die Untersuchung von Schwankungen ist diese Transformation seitdem von Hrn. Koebe, Crelles Journal, Bd. 147 (1917), pp. 80—81 in einem anderen Zusammenhange angewandt worden. (Das Koebesche Resultat entspricht unserem Hilfssatz 2, wenn die Voraussetzung, daß $f(z)$ von 0 und 1 verschieden ist, durch die Voraussetzung der Beschränktheit von $f(z)$ ersetzt wird.)

6. Nunmehr kommen wir zum Beweise des Satzes 1. Wir können $\varepsilon < 1$ annehmen. Dann kann man $\sigma(\varepsilon) = \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ setzen, wo $\delta(\varepsilon)$ die Funktion des Hilfssatzes 2 ist. Denn es sei z_0 so gewählt, daß $|z_0| = \rho$, $r_1 \leqq \rho \leqq r_2$ und $|f(z_0)| \leqq 1$ ist. Aus dem Hilfssatz 2 folgt, daß die Schwankung von $f(z)$ auf $|z| = \rho$ nicht größer als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist, und daher $\underset{|z|=\rho}{\operatorname{Max}} |f(z)| \leqq \frac{3}{2}$ ist. Wir betrachten nun den »breitesten« Kreisring um $|z| = \rho$, der im Kreisring $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$ liegt, und in dem Max $|f(z)| \leqq 2$ ist, d. h. wir wählen das kleinste ρ_1 bzw. das größte ρ_2, so daß

$$(5) \qquad r_1 \leqq \rho_1 \leqq \rho \leqq \rho_2 \leqq r_2, \qquad \underset{\rho_1 \leqq |z| \leqq \rho_2}{\operatorname{Max}} |f(z)| \leqq 2$$

ist. Dann folgt aus dem Hilfssatz 2, daß die Schwankungen von $f(z)$ auf den Kreisen $|z| = \rho_1$ bzw. $|z| = \rho_2$ nicht größer als $\frac{\varepsilon}{2}$ sind. Nach dem oben zitierten Satz von Schottky ist dann die Schwankung von $f(z)$ im Kreisring $\rho_1 \leqq |z| \leqq \rho_2$ nicht größer als ε[1]. Da aber in einem Punkte z_0 dieses Kreisringes $|f(z_0)| \leqq 1$ ist, gilt im ganzen Kreisring $|f(z)| \leqq 1 + \varepsilon < 2$. Daher muß insbesondere gelten

$$\underset{|z|=\rho_1}{\operatorname{Max}} |f(z)| < 2, \qquad \underset{|z|=\rho_2}{\operatorname{Max}} |f(z)| < 2.$$

Daraus folgt aber, daß $\rho_1 = r_1$, $\rho_2 = r_2$ ist, da man sonst noch kleinere ρ_1 bzw. größere ρ_2 finden könnte, für die (5) gilt. Daher ist die Schwankung von $f(z)$ im Kreisring $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$ in der Tat, wie behauptet, nicht größer als ε.

Wir sehen, daß als $\sigma(\varepsilon)$ im Satze 1 $e^{\frac{\pi}{\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}}$ genommen werden kann, also z. B. $e^{\frac{2\pi e^{26}}{\varepsilon}}$.

III.

7. Der Schottkysche Schwankungssatz, auf dem letzten Endes die Betrachtungen des letzten Abschnittes beruhen, läßt sich sehr leicht direkt beweisen. Wir wollen bei diesem Beweis gleich wesentlich allgemeinere geometrische Voraussetzungen zugrunde legen.

---

[1] Man könnte hier auch so direkt schließen: Die Randpunkte der offenen Menge M, die von den Werten von $f(z)$ im Kreisring $\rho_1 < |z| < \rho_2$ gebildet wird, liegen in zwei Kreisscheiben vom Radius ε. Würden Punkte von M außerhalb dieser Kreisscheiben liegen, so müßte auch der unendlich ferne Punkt in M enthalten sein. Daher liegen die Werte von M in diesen Kreisscheiben, und da M zusammenhängend ist, müssen auch die beiden Kreisscheiben zusammenhängen, woraus unsere Behauptung leicht folgt. Doch läuft diese Überlegung auf einen impliziten Beweis des Schottkyschen Satzes hinaus, auf den wir im nächsten Abschnitt ausführlicher eingehen werden.

Es sei G ein Gebiet, und es möge C_1 eine Randkomponente dieses Gebietes sein, die von den übrigen Randkomponenten — falls es solche gibt — *isoliert* liegt. Dies bedeutet: Man kann in G eine einfache geschlossene Kurve L ziehen, die zusammen mit C_1 ein zweifach zusammenhängendes Teilgebiet von G begrenzt. Es sei $f(z)$ eine in G eindeutige und reguläre nicht konstante Funktion. Man betrachte alle Häufungsstellen der Folgen der Werte, die $f(z)$ auf gegen C_1 konvergierenden Punktfolgen annimmt. Die Menge B_1 dieser Häufungsstellen bezeichnen wir als die *Häufungsmenge* von $f(z)$ auf C_1. Die Menge B_1 ist offenbar abgeschlossen. Ist C_1 ein Punkt, so besteht B_1 entweder aus einem Punkte — dann ist $f(z)$ in C_1 regulär oder hat dort einen Pol — oder fällt nach dem Weierstrassschen Satze mit der Gesamtheit aller Punkte der Ebene zusammen.

Ist aber C_1 ein nicht punktförmiges Kontinuum, so ist auch B_1 ein nicht punktförmiges Kontinuum.

Beweis. Man bilde das von C_1 und L begrenzte zweifach zusammenhängende Gebiet konform und eineindeutig auf das Innere eines Kreisringes

$$\rho_1 < |w| < \rho_2 \tag{6}$$

der w-Ebene ab, und es möge etwa die Kreislinie $|w| = \rho_2$ der Randkomponente C_1 entsprechen. $f(z)$ gehe dabei in $\phi(w)$ über. Dann ist B_1 zugleich die Häufungsmenge von $\phi(w)$ auf $|w| = \rho_2$.

Wir zeigen zunächst, daß B_1 mehr als einen Punkt enthält. Denn es bestehe B_1 aus einem Punkte α. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß im Kreisring $\rho_2 - \varepsilon \leqq |z| < \rho_2$ $\phi(w)$ nur Werte aus einer beliebig kleinen Umgebung von α annimmt. Denn sonst müßten in jeder Nähe der Kreislinie $|w| = \rho_2$ Punkte existieren, für die die Werte von $\phi(w)$ außerhalb einer festen (offenen) Umgebung von α liegen. Und da solche Punkte wenigstens eine Häufungsstelle auf $|w| = \rho_2$ haben müssen, müßte in der Häufungsmenge von $\phi(w)$ wenigstens ein Punkt außerhalb jener Umgebung von α enthalten sein. Daher können wir annehmen, daß $\phi(w)$ *gleichmäßig* gegen α konvergiert, wenn w gegen die Kreislinie $|w| = \rho_2$ geht. Für $|\alpha| < \infty$ müßte aber dann nach einem bekannten Schwarzschen Satze $\phi(w) \equiv \alpha$ sein, und wenn $\alpha = \infty$ wäre, müßte $\frac{1}{\phi(w)} \equiv 0$ sein, was unmöglich ist.

Wir zeigen nun, daß B_1 ein Kontinuum ist, d. h. daß es keine geschlossene Kurve Γ gibt, die B_1 nicht trifft und sowohl in ihrem Äußeren als auch in ihrem Innern Punkte von B_1 enthält. Denn es sei Γ eine solche Kurve, α und β mögen zwei Punkte von B_1 sein, die innerhalb bzw. außerhalb von Γ liegen. Es seien w_ν, w'_ν zwei Folgen von Punkten aus (6), die gegen $|w| = \rho_2$ konvergieren und für die $\phi(w_\nu) \to \alpha$, $\phi(w'_\nu) \to \beta$ gilt. Wir können annehmen, daß alle $\phi(w_\nu)$ innerhalb, alle $\phi(w'_\nu)$ außerhalb von Γ liegen. Man verbinde nun w_ν mit w'_ν durch eine Kurve l_ν, die aus einem Bogen eines Kreises um $w = 0$ und einem Stück des Radius dieses Kreises besteht. Das Bild dieser Kurve in der ϕ-Ebene sei λ_ν. Dann trifft λ_ν die Kurve Γ wenigstens in einem Punkte σ_ν, dem der Punkt s_ν auf l_ν entsprechen möge. Da die

s_ν gegen $|w| = \rho_2$ konvergieren und die Punkte σ_ν auf Γ liegen, können wir annehmen, indem wir uns eventuell auf eine Teilfolge der w_ν, w'_ν beschränken, daß $s_\nu \to s$, $\sigma_\nu \to \sigma$ gilt, wo s auf $|w| = \rho_2$, σ auf Γ liegt. Dann müßte aber auch σ zu B_1 gehören, entgegen der Annahme. —

Den Durchmesser der Menge B_1 bezeichnen wir als die *Schwankung* von $f(z)$ auf C_1. Wenn B_1 nur einen (auch den unendlich fernen) Punkt enthält, ist die Schwankung auf C_1 gleich 0.

8. Wir beweisen nun den

Satz 2*. *Ist G ein n-fach zusammenhängendes Gebiet ohne punktförmige Randkomponenten, und ist $f(z)$ eine in G reguläre und eindeutige Funktion, deren Schwankungen auf den einzelnen Randkomponenten von G endlich sind, so ist die Schwankung von $f(z)$ in G kleiner als die Summe ihrer Schwankungen auf den Randkomponenten von G, wenn $f(z)$ keine Konstante ist.*

Es seien $C_1, \cdots, C_n$ die Randkomponenten von G. Die Häufungsmengen von $f(z)$ auf C_ν mögen mit B_ν bezeichnet werden, ihre Durchmesser — die Schwankungen von $f(z)$ auf C_ν — mit s_ν.

Zunächst ist $f(z)$ in G *beschränkt*. Denn ist M die größte Distanz der Punkte von B_ν vom Nullpunkt, so ist bekanntlich nach dem Maximumprinzip der absolute Betrag von $f(z)$ in G kleiner als M, da $f(z)$ keine Konstante ist. Es sei nun B die Bildmenge von G, d. h. die Menge der Punkte, die den Werten von $f(z)$ in G entsprechen. B ist dann offenbar *beschränkt, offen und zusammenhängend*. Der Rand von B besteht aus Punkten, die zu den Mengen B_ν gehören. S — die Schwankung von $f(z)$ in B — ist dann der Durchmesser von B. Es seien dann w, w' zwei Randpunkte von B, deren Distanz gleich S ist, die Strecke $w\,w'$ sei mit D bezeichnet.

Wir nehmen nun an, daß $S \geqq s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ ist. Dann ist sicher $S > s_\nu$, $\nu = 1, \cdots, n$. Daher gehören w, w' sicher nicht zu derselben Häufungsmenge B_ν; es möge nun w zu B_1, w' zu B_n gehören.

Es sei η ein von w und w' verschiedener Punkt der Strecke D, und es sei L das in η auf D errichtete Lot. Dann liegen w und w' auf verschiedenen Seiten von L. Da aber w und w' Randpunkte von B sind, gibt es auch Punkte von B auf beiden Seiten von L, und da B zusammenhängend ist, *liegen auch auf L innere Punkte von B*.

Es sei nun d_ν die Projektion von B_ν auf D und zugleich die Länge dieser Projektion. Dann ist offenbar $d_\nu \leqq s_\nu$.

Ist nun zuerst $S > s_1 + s_2 + \ldots + s_n$, so ist erst recht $S > d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. Daher gibt es auf D eine Strecke Δ, die von den Projektionen der Punkte der Mengen B_ν frei ist. Dann aber trifft das Mittellot L auf der Strecke Δ keine der Mengen B_ν, so daß es also den Rand von B sicher nicht trifft. Da aber nach dem eben Bemerkten L einen inneren Punkt der offenen Menge B enthält, muß dann L ganz der Menge B angehören, was ihrer Beschränktheit widerspricht.

Es sei nun $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$. Wird dann nicht die ganze Strecke D von den Projektionen d_ν überdeckt, so gibt es also eine Teilstrecke

Δ von D, über der keine Randpunkte von B liegen, und wir können schließen wie oben.

Es sei nun D vollständig von den Projektionen d_ν der B_ν überdeckt. Dann muß $s_\nu = d_\nu$ sein, und die Strecken d_ν können sich nicht überdecken, sondern stoßen nur in ihren Endpunkten aneinander an. Errichtet man also in den Endpunkten w und w_1 (vgl. Fig. 1) von d_1 die Lote L (durch w) bzw. L_1 (durch w_1) auf D, so liegen im Innern des von ihnen begrenzten Parallelstreifens keine Punkte von $B_2, \ldots, B_n$. Da ferner w ein Punkt von B_1 ist und der Durchmesser von B_1 gleich d_1 ist, liegen keine Punkte von B_1 außerhalb der um w mit dem Radius d_1 beschriebenen Kreisscheibe K. Schneidet man aus unserem Streifen die Kreisscheibe K heraus, so zerfällt er in zwei Teile T_+ und T_-, die nur im Punkte w_1 aneinanderstoßen und sich ins Unendliche erstrecken. Im Innern von T_+ und T_- liegen nunmehr keine Punkte der Menge $B_1, B_2, \ldots, B_n$, also insbesondere keine Randpunkte von B. Nun liegt aber nach dem oben Gesagten auf L_1 ein innerer Punkt von B, und daher gehört eine hinreichend kleine Kreisscheibe κ um diesen Punkt auch zur Menge B. κ hat aber gemeinsame Punkte mit T_+ oder T_-, und da weder T_+ noch T_- Randpunkte der Menge B enthalten, muß das ganze Innere von T_+ oder T_- zu B gehören, was der Beschränktheit von B widerspricht.

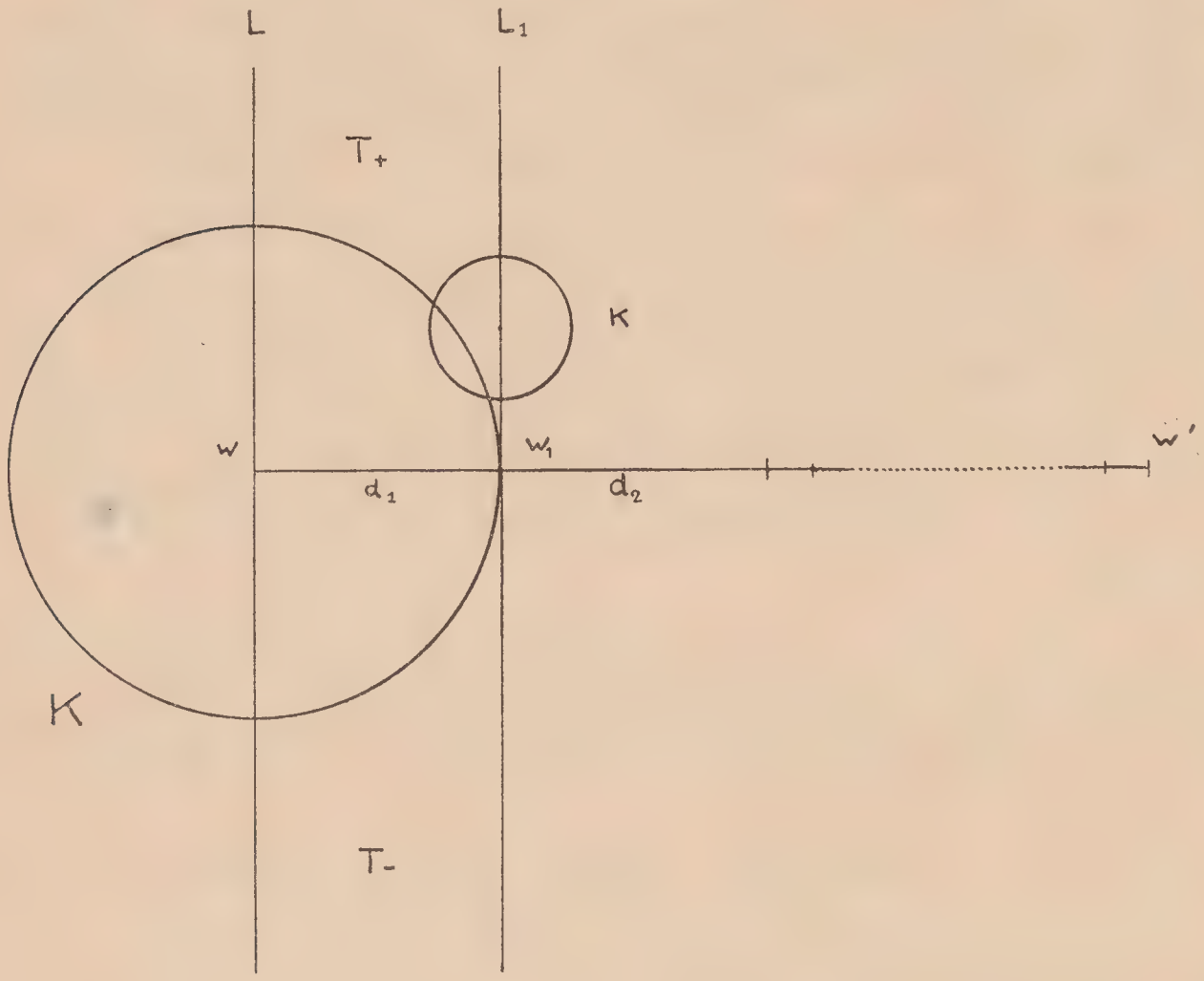


Fig. 1.

IV.

9. Es ist von Interesse, hervorzuheben, daß bei diesem Beweise die Eigenschaft der Funktion $f(z)$, analytisch zu sein, nur unwesentlich benutzt wurde und unser Satz einen wesentlich *topologischen* Charakter hat. Wir wollen eine etwas anders gegliederte Beweisanordnung unseres Satzes angeben, bei der nunmehr von vornherein auch über $f(z)$ allgemeinere Annahmen zugrunde gelegt werden.

Es sei G ein n-fach zusammenhängendes den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthaltendes Gebiet, $C_1, \cdots, C_n$ seine n Randkomponenten. $f(z)$ sei eine in G stetige komplexe Funktion, welche die Eigenschaft hat, daß durch die Abbildung $w = f(z)$ sowohl G als auch jede offene Teilmenge von G auf eine offene (zweidimensionale) Menge abgebildet wird. Es genügt z. B. nach dem Schönfliesschen Satz von der Invarianz des zweidimensionalen Gebietes anzunehmen, daß die Abbildung $w = f(z)$ (stetig und) im *Kleinen eineindeutig ist.*

Die Häufungsmengen $B_1, \cdots, B_n$ auf $C_1, \cdots, C_n$ werden wie oben definiert. Genau wie oben folgt, das jede der Mengen B_ν abgeschlossen und zusammenhängend, d. h. ein *Kontinuum* ist, während jetzt allerdings B_ν auch für eine nicht punktförmige Randkomponente C_ν sich sehr wohl auf einen Punkt reduzieren kann. Wir nehmen an, daß keine der Mengen B_ν den unendlich fernen Punkt im Innern enthält. Die Durchmesser $s_1, \cdots, s_n$ von $B_1, \cdots, B_n$ bezeichnen wir als die Schwankungen von $f(z)$ auf $C_1, \cdots, C_n$ und behaupten, daß die Schwankung S von $f(z)$ in G — d. h. der Durchmesser der Bildmenge G' von G — nicht größer ist als $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$, und wenn alle s_ν endlich sind und wenigstens zwei der s_ν nicht verschwinden, sogar $S < s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ gilt.

Zum Beweise beachte man, daß G' offen und zusammenhängend, also ein Gebiet ist, und den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält, also einen Rand R besitzen muß. Dieser Rand setzt sich offenbar nur aus Punkten zusammen, die zu $B_1, \cdots, B_n$ gehören. Es sei B die »äußere« der Randkomponenten von G', d. h. diejenige Randkomponente von G', für die innerhalb eines der von ihr begrenzten Gebiete, die den unendlich fernen Punkt nicht enthalten, das Gebiet G' und alle übrigen Randkomponenten von G' liegen. Dieses Gebiet bezeichnen wir mit G^*. B setzt sich aus Punkten der B_ν zusammen. Es seien etwa $B_1, B_2, \cdots, B_k$ die B_ν-Mengen, deren Punkte an B beteiligt sind. Dann ist zunächst der Durchmesser S von G' zugleich der Durchmesser von B und daher sicher nicht größer als $s_1 + \cdots + s_k$, also erst recht nicht größer als $s_1 + s_2 + \cdots s_n$. Wann kann nun s gleich $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ sein? Dann müssen offenbar $s_{k+1}, \cdots, s_n$ verschwinden. Daher müssen unter den $s_1, \cdots, s_k$ wenigstens zwei von 0 verschiedene vorkommen. Wir können ferner von den punktförmigen unter den $B_1, \cdots, B_k$ absehen, da sie in den anderen dieser Häufungsmengen enthalten sind. Nunmehr folgt aber die Ungleichung

$$S < s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

aus dem folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 3. *Ist G^* ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das den unendlich fernen Punkt weder im Innern noch als einen Randpunkt besitzt, und ist der Rand B von G^* gleich der Vereinigungsmenge der nicht punktförmigen Kontinua $B_1, \ldots, B_k$, $k > 1$, so ist der Durchmesser S von B kleiner als die Summe der Durchmesser s_ν von $B_1, \cdots, B_k$.*

Dieser Satz ergibt sich aber aus der Überlegung, die wir oben an die Figur 1 geknüpft haben. Bei diesem Beweis muß also die Metrik des Distanzbegriffes wesentlich benutzt werden; bei der Zurückführung des obigen Satzes auf den Hilfssatz 3 wurde ja nur von der Stetigkeit der Distanz als Funktion des Punktepaares und der Dreiecksungleichung Gebrauch gemacht[1]. — Immerhin

[1] Insbesondere braucht also zum Beweise der Ungleichung $S \leqq s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ nur die Stetigkeit der Distanz und die Dreiecksungleichung benutzt zu werden. Wenn dabei alle Distanzen beschränkt sind, kann an die Stelle des unendlich fernen Punktes ein beliebiger Punkt treten, der weder zu B noch zum Rande von B gehört. Dieser Beweis der Relation

ist es klar, daß auch der Hilfssatz 3 nicht nur für die gewöhnliche Maßbestimmung, sondern auch unter sehr viel allgemeineren Annahmen über die Distanzfunktion gilt.

V.

10. Wir beweisen endlich, daß die Ungleichung des Schottkyschen Schwankungssatzes im folgenden Sinne die beste ist:

Satz 3. *Es seien* $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ *n beliebige positive Zahlen. Ist dann*

$$0 < \sum < \sigma_1 + \cdots + \sigma_n ,$$

so gibt es ein n-fach zusammenhängendes (sogar von regulären analytischen Kurven begrenztes) Gebiet G und eine in diesem Gebiet samt dem Rand reguläre eindeutige Funktion $f(z)$*, derart, daß die Schwankungen von* $f(z)$ *auf den n Randkomponenten von G die Werte* $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ *haben, während ihre Schwankung in G größer ist als* $\sum$.

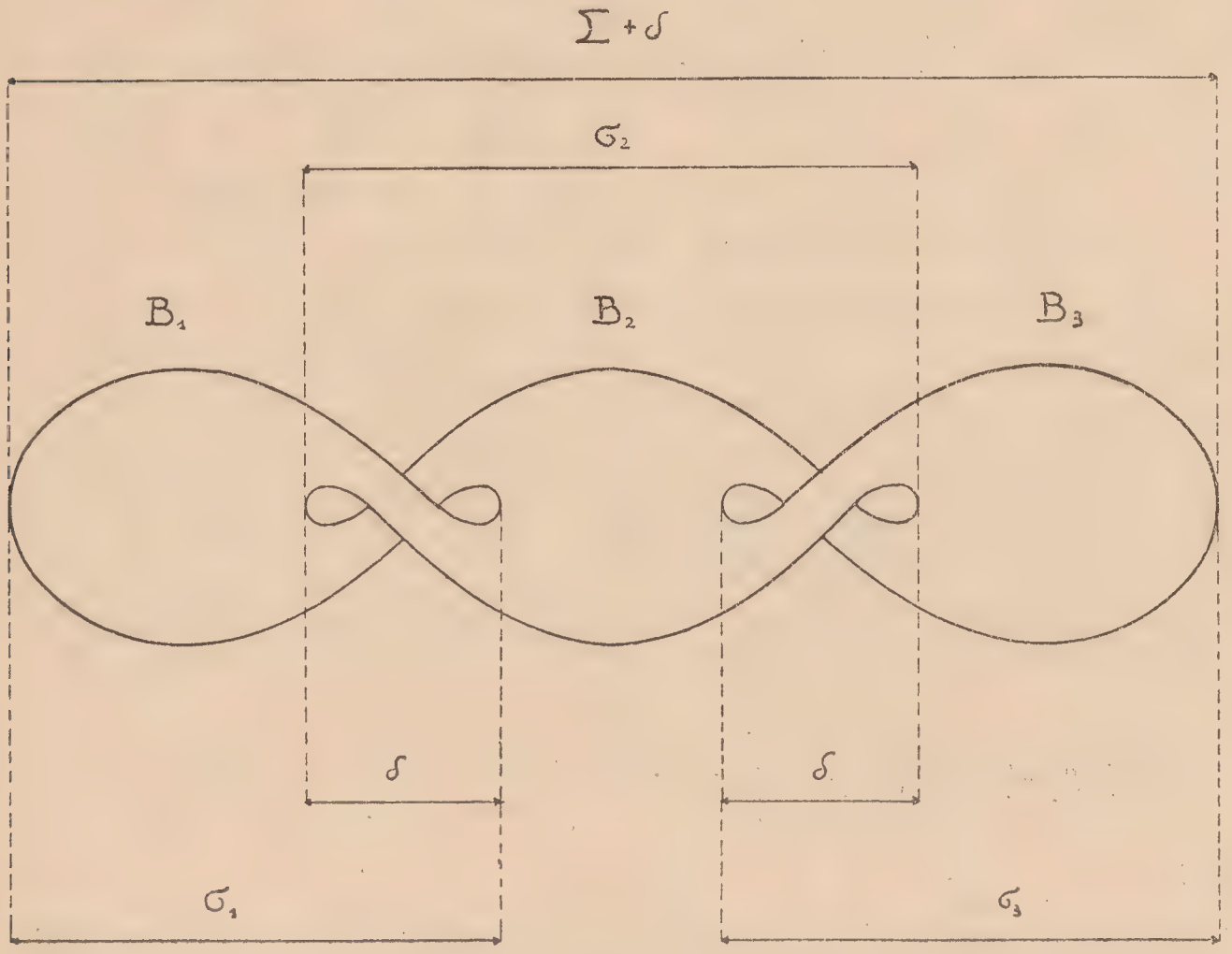


Fig. 2.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der nebenstehenden Figur 2, in der, um die Vorstellungen zu fixieren, $n = 3$ angenommen wurde. Das in der Figur abgebildete 3-fach zusammenhängende Gebiet G' in der w-Ebene (genauer auf einer etwa dreiblättrigen Riemannschen Fläche über der w-Ebene[1]), dessen Randkurven als analytisch angenommen werden können, ist offenbar schlichtartig und kann daher bekanntlich z. B. auf ein von 3 gerad-

$S \leq s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ gilt also insbesondere auch dann, wenn es sich um die Kugeldistanzen handelt, so daß der Satz 2* richtig bleibt, wenn in ihm Schwankungen durch Kugelschwankungen und »kleiner« durch »nicht größer« ersetzt wird. In dieser Formulierung kann er direkt für den Beweis der in der Fußnote a. p. 277 gegebenen Variante des Satzes 1 benutzt werden.

[1] Um die Figur von zwei sich kreuzenden übereinanderliegenden Bändern auf einer Riemannschen Fläche zu realisieren, genügt es, an die gegebene w-Ebene längs zweier geeignet gelegter Schnitte ein anderes Blatt derart anzuhängen, daß das untere Band vor der Kreuzung an einem Schnitt in das untere Blatt hinübergeht, um dann nach der Kreuzung am anderen Schnitt wieder in das erste Blatt zurückzukehren. Offenbar kann man so jede Kreuzung unabhängig von den anderen mit Hilfe eines geeignet angehängten Blattes der Riemannschen Fläche realisieren. So erhält man im Falle unserer Figur ein dreiblättrige Riemannsche Fläche. — Natürlich kann unsere Figur bereits auf einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche ausgebreitet werden. Es ist leicht zu sehen, wie hierzu in der Figur zwei Verzweigungsschnitte einzutragen sind. Doch dürfte die zuerst angegebene Realisierung im allgemeinen Falle anschauungsmäßig zugänglicher sein. — Übrigens genügt es ja für die Abbildbarkeit, daß wir es hier mit einer schlichtartigen Riemannschen Mannigfaltigkeit zu tun haben.

linigen Schlitzen C_1, C_2, C_3 begrenztes schlichtes Gebiet G der z-Ebene konform und eineindeutig abgebildet werden. Ist $w = f(z)$ die diese Abbildung vermittelnde Funktion, und werden die Bezeichnungen so gewählt, daß C_1, C_2, C_3 bzw. B_1, B_2, B_3 entsprechen, und setzt man ferner $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sum - 3\delta$, so sind offenbar die Schwankungen von $f(z)$ auf C_1, C_2, C_3 bzw. gleich σ_1, σ_2, σ_3, während die Schwankung von $f(z)$ in G den Wert $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\delta = \sum + \delta$ hat, also größer als $\sum$ ist.

Ausgegeben am 20. August.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. v. Ficker sprach über »Den Sturm in Norddeutschland am 4. Juli 1928«.

Der Vortrag behandelt die außerordentlich heftige Sturmböe, die am 4. Juli 1928, vom Rhein ausgehend, ganz Norddeutschland bis Ostpreußen durchzog. Die Untersuchung bot Gelegenheit, das Vorrücken der Kaltluftmassen in Beziehung zum Durchzug einer aus höheren Schichten der Atmosphäre stammenden Druckwelle klarzustellen und die Umwandlung einer flachen Depression in eine tiefe Zyklone zu studieren.

2. Hr. Haberlandt legte eine Arbeit vor: Über Regenerationsvorgänge bei *Bryopsis* und *Codium*.

Die Regenerationsvorgänge, die sich an isolierten Fragmenten der Fiedern von *Bryopsis muscosa* und an abgeschnittenen Palisadenschläuchen von *Codium tomentosum* einstellen und bis zur Bildung neuer Pflänzchen fortschreiten, werden eingehend beschrieben. Ferner wird der stimulierende, lebensverlängernde Einfluß besprochen, den der Zusatz von zerriebenen *Bryopsis*-Pflänzchen zur Kulturflüssigkeit auf die Regenerate ausübt. Einige allgemeine entwicklungsphysiologische Bemerkungen bilden den Schluß der Mitteilung.

3. Das korrespondierende Mitglied Hr. Bang Kaup legte das zweite Stück seiner gemeinsam mit Frl. Dr. A. von Gabain bearbeiteten Türkischen Turfan-Texte vor. (Ersch. später.)

Es gibt ein historisch und religionsgeschichtlich interessantes manichäisches Bruchstück bekannt und ein kleineres Fragment, dessen Lokalisierung inhaltlich noch nicht gelungen ist. Im Anhang wird ein koptisches Fragment mit dem Worte *κελεφός* gegeben.

4. Hr. Fick überreichte seinen Vortrag »Übersicht über die Fragen der Gelenk- und Muskelmechanik (Sonderabdr. 1929),

5. das auswärtige Mitglied Hr. Dragendorff übersandte seine Arbeit »Rappresentazione di un aruspice sopra un vaso Aretino« (Sonderabdr. Firenze 1928).

6. Hr. Wiegand überreichte das 2. Heft des IV. Bandes der »Antiken Denkmäler«, hrsg. vom Deutschen Archäologischen Institut (Berlin 1929).

7. Vorgelegt wurde der 41. Bd. der »Politischen Korrespondenz Friedrichs des Großen« (Leipzig 1929) und das Werk von Prof. Dr. Edmund O. von Lippmann »Geschichte des Zuckers seit den ältesten Zeiten bis zum Beginn der Rübenzuckerfabrikation« (Berlin 1929).

8. Das ordentliche Mitglied Hr. Planck feierte am 28. Juni sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum. Die Akademie hat ihm aus diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Preußische Regierung hat am 2. Juli die von der Akademie vollzogene Wahl des Hrn. Dr. Albert Schweitzer in Lambarene (französ. Kongogebiet) zum Ehrenmitglied bestätigt.

Der Sturm in Norddeutschland am 4. Juli 1928.

Von H. v. Ficker.

Im Verlauf des 4. Juli 1928 durchzog ein Sturm von stellenweise ungewöhnlicher Stärke ganz Norddeutschland vom Rhein bis Ostpreußen, der an vielen Orten erheblichen Schaden verursachte, u. a. auch im Flughafen Tempelhof (Berlin). In den »Erfahrungsberichten des deutschen Flugwetterdienstes« sind eine Reihe von Studien über diesen bemerkenswerten Sturm veröffentlicht worden, die auch ein umfangreiches Beobachtungsmaterial mitteilen[1]. Wenn hier abermals eine Untersuchung über den Sturm durchgeführt wird, so muß es damit begründet werden, daß erstens in den bisher veröffentlichten Studien einzelne bemerkenswerte Erscheinungen in der Entwicklung des Sturmes entweder keine oder eine zu geringe Beachtung gefunden haben und daß zweitens eine Bearbeitung auf Grund des großen inzwischen eingegangenen Registriermaterials die Erklärung mancher Einzelheit gestattet. Die Entwicklung des Sturmes war nämlich in mehr als einer Richtung eine bemerkenswerte: Es waren mehrere Kaltluftmassen beteiligt, deren Zusammenwirken der Entwicklung ein eigenartiges Gepräge gibt. Zweitens haben sich während des Sturmes in einem ursprünglich durch sehr schwache Gradienten ausgezeichneten Gebiet innerhalb kurzer Zeit sehr kräftige Gradienten entwickelt, so daß man die Umbildung einer flachen Depression in eine wohl ausgebildete Zyklone verfolgen kann. Drittens ist gerade über das mittlere Norddeutschland ein Wirbel verhältnismäßig kleinen Durchmessers hinweggezogen, dessen Beziehung zum Frontverlauf untersucht werden kann. Die Sturmfront scheint nach den Berichten zahlreicher Beobachter zwar vielfach durch Wirbelbildungen ausgezeichnet gewesen zu sein, aber nur in den Barogrammen von Berlin und Potsdam kommt die Wirbelbildung auch äußerlich zum Ausdruck.

[1] Erfahrungsberichte des Deutschen Flugwetterdienstes, herausgegeben vom Höhenwetterdienst Berlin W 9: Bericht über den Kaltlufteinbruch am 4. Juli 1928.

Zweite Folge Nr. 21: Der zeitliche Verlauf des Kaltlufteinbruches (K. Keil und H. Kirsten).
» » » 23: Die Temperaturen über Deutschland am 4. Juli 1928 (H. Kirsten).
» » » 25: Bericht über die aerologischen Verhältnisse des 4. Juli 1928: 1. Temperatur und Druck (K. Keil).
» » » 29: Bericht über die aerologischen Verhältnisse des 4. Juli 1928: 2. Temperatur und Feuchtigkeit (K. Keil und H. Kirsten).
» » » 30: Bericht über die 24stündige Luftdruckänderung am Boden vom 2.—5. Juli 1928 (K. Keil, H. Kirsten, G. Freudenthal).
Dritte Folge Nr. 30: Bericht über die aerologischen Verhältnisse des 4. Juli 1928: 1. Die Höhenwindverhältnisse (K. Keil).

Als Material wurden der Untersuchung hauptsächlich Registrierungen des Drucks, der Temperatur, der Windrichtung, der Windstärke und des Niederschlags zugrunde gelegt. Das innerhalb des Netzes des Preußischen Meteorologischen Instituts gewonnene Material wurde in liebenswürdiger Weise durch die Leiter der übrigen deutschen Observatorien ergänzt. Zu ganz besonderem Dank bin ich aber Hrn. General Delcambre (Paris) und Hrn. Prof. van Everdingen (de Bilt) verpflichtet, die mir zahlreiche Registrierungen aus Frankreich bzw. den Niederlanden zur Verfügung gestellt haben. Das hauptsächliche Material entstammt allerdings dem preußischen Beobachtungsnetz; es wurden auch die Meldungen der Niederschlags- und Gewitterstationen verwertet, ohne daß die Benützung eines so außerordentlich großen Materials in der Untersuchung selbst zum Ausdruck kommen könnte.

1. Entwicklung und Verlauf des Sturms im allgemeinen.

Der Sturm am 4. Juli beendigte eine mehrtägige Warmwetterperiode in Mittel- und Westeuropa. Noch am 3. Juli traten — abgesehen von den küstennahen Gebieten — Temperaturmaxima von 30° und darüber auf. Als Vorläufer der großen Sturmböe entwickelten sich bereits am 3. Juli in Westdeutschland lokale Gewitter, die sich vom Rhein ostwärts namentlich im Gebiete der deutschen Mittelgebirge ausbreiteten, nach Mitteldeutschland vorstießen und einige Ausläufer in der Nacht vom 3. zum 4. Juli weit nach Osten, bis nach Schlesien entsandten, aber weder Süddeutschland noch die nördlichen Gebiete Norddeutschlands berührten. Gleichzeitig, d. h. ebenfalls in der Nacht vom 3. zum 4. Juli, setzten sich kalte Luftmassen von der Nordsee her in Bewegung und drangen sehr langsam südöstlich vor, sich bis zu dem von Gewittern bestrichenen und abgekühlten Gebiet vorschiebend. Ein ähnlicher Vorgang hatte sich in Frankreich und in den Niederlanden bereits am 3. Juli bemerkbar gemacht. Die ozeanische Kaltluftmasse kam in Nordwestdeutschland ungefähr um Mitternacht zum Stillstand. In allen Gebieten, die bis Mitternacht des 3. Juli von dieser langsam vorrückenden Kaltluftmasse überschwemmt wurden, wurden durch die am 4. Juli einsetzende große Böe keine Winde von Sturmstärke erzeugt. Die große Böe entwickelte sich unter starkem Druckanstieg von den Niederlanden und Nordfrankreich herkommend, passierte morgens den Rhein, zog östlich durch das Gebiet der vorausgegangenen Gewitter und erreichte ihre größte Stärke östlich der Elbe, nach dem Eintritt der bereits in der Nacht von der Nordsee vorgestoßenen, aber für Stunden zum Stillstand gekommenen Kaltluftmassen in den Böenzug, der — von den westlichen Gebieten abgesehen — die Temperatur überall auf etwa 10°—12° herabdrückte. In Süddeutschland machten sich nur langsame Abkühlung mit Druckanstieg, Bewölkungszunahme und mäßigen Winden bemerkbar, so daß von einem Übergreifen der Sturmböe auf süddeutsches Gebiet nicht gesprochen werden kann. Die Böe rückte von Mitteldeutschland vielmehr in nordöstlicher Richtung gegen die Ostsee vor; Ostpreußen wurde am Abend des 4. Juli erreicht. Die Ausbreitung nach Schlesien, wo noch am 4. Juli Temperaturen von 30° eintraten, erfolgte

verhältnismäßig schwach und im großen und ganzen ohne Niederschläge; wo hier stellenweise Sturm eintrat, ist er auf lokal beschränkte, wohl durch die Böe angeregte Gewitterbildung zurückzuführen. Stürme von Stärke 10—11 waren auf das Gebiet östlich der Elbe beschränkt. In manchen Gebieten trat die stärkste Luftbewegung bereits bei den als Vorläufer der Böe zu bezeichnenden Gewitterzügen ein.

Im ganzen zeigen der 3. und 4. Juli ein verwickeltes Ineinandergreifen verschiedener Kaltluftmassen, deren Beziehung zueinander zu untersuchen ist. Es werden deshalb der Reihe nach untersucht: Luftdruckverteilung, Luftdruckänderungen, Beziehung des Böenverlaufes zum Luftdruckgang, Vorgänge in Frankreich und den Niederlanden, Verlauf und Bewegung der Fronten, Entstehung des Wirbels bei Berlin in Beziehung zum Frontverlauf, Niederschläge in Beziehung zum Böenverlauf. Zu bemerken ist, daß der Verlauf im ganzen charakteristisch für nicht seltene Vorkommnisse ist und daß nur die Intensität als Ausnahmefall zu betrachten ist.

2. Luftdruckverteilung und Änderung der Wetterlage.

Um den Sturm als Teilphänomen einer großen Wetterentwicklung richtig zu deuten, muß man letztere für den Zeitraum vom 2.—5. Juli betrachten. Zu diesem Zwecke ist in Karten kleinsten Maßstabes (Fig. 1) die Druckverteilung dieser Tage dargestellt. Wetterkarten größeren Maßstabes mit Fronten usw. stehen ja an jeder meteorologischen Anstalt zur Verfügung. Da von den Fronten später noch ausführlich die Rede ist, handelt es sich hier nur darum, aus den Kärtchen das Charakteristische der Wetterentwicklung herauszulesen und in wenigen Worten zu erläutern.

Anfangs- und Endzustand sind durch äußerlich ähnliche Wetterlagen gekennzeichnet, nämlich durch ausgedehnte Hochdruckgebiete über Mitteleuropa; auch in Südeuropa ist der Druck hoch. Aber zwischen diesen Hochdruckgebieten besteht trotzdem ein großer Unterschied: Im Anfangszustand handelte es sich um eine warme Antizyklone, im Endzustand um eine kalte, in rascher Bewegung befindliche und rasch abwandernde Antizyklone, die wenigstens zum Teil ein Erzeugnis niedrigtroposphärischer Vorgänge war.

Die Anfangs-Antizyklone wird abgebaut durch ein Tiefdruckgebiet, das hauptsächlich im Norden vorüberzieht, mit dem aber wohl auch das unbedeutende Tief, das am Morgen des 3. Juli an der Küste Westfrankreichs erschienen ist, ursächlich zusammenhängt. Die Zusammengehörigkeit beider Depressionen ist klar sichtbar am Abend des 3. Juli: Das südliche Tief, sehr unregelmäßig gestaltet und über Frankreich und Deutschland sich ausbreitend, erscheint als Ausläufer der im Norden bis Skandinavien vorgerückten Depression. Im Gebiete des südlichen Tiefs ist es außerordentlich warm, die Gradienten sind sehr schwach und das ganze Gebilde macht den Eindruck, als sei es wenigstens zum Teil auf thermische Auflockerung und Abtransport der Luftmassen über Frankreich und Deutschland zurückzuführen. Von Westen her folgt dem südlichen Tief hoher Druck aus der Gegend des Azorenmaximums, und es sei schon hier bemerkt, daß mit der weiteren Aus-

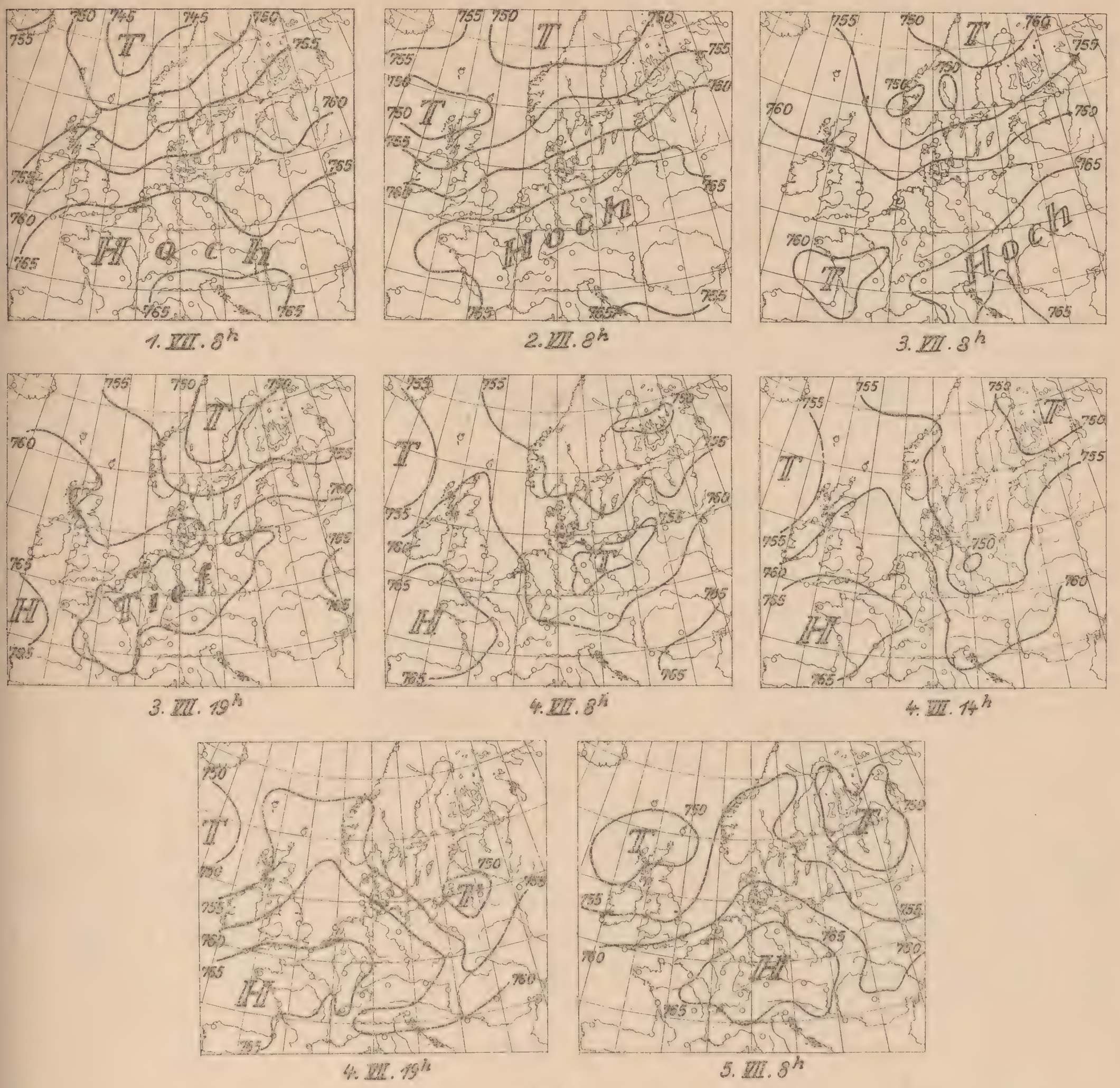


Fig. 1.

breitung des Azorenhochs der Sturm in Deutschland sich entwickelt. Innerhalb des südlichen Tiefs entwickeln sich Gewitter, sowohl in Frankreich wie in Westdeutschland. An den Küsten dringt überall, wenn auch langsam, kalte Luft vor — ein Vorgang, dem der weit nach Osten vorspringende Hochdruckkeil im Norden des südlichen Tiefs (von England bis Dänemark) zuzuordnen sein wird.

Am 4. Juli hat sich das westliche Hochdruckgebiet stark ausgebreitet, während das südliche Tief an Ausdehnung verloren, an Intensität gewonnen hat. Aber die Gradienten sind immer noch schwach; der Böeneinbruch von Nordwesten hat um diese Zeit den Mittelrhein erreicht und entwickelt sich ostwärts, ohne daß irgendeine Wetterdienststelle den äußerst heftigen Sturm, der mittags an und östlich der Elbe einsetzt, vorausgesagt hätte.

Die Wetterlage entwickelt sich nur insofern regulär weiter, als das Azorenhoch mit den kalten Luftmassen rasch nach Osten vorrückt, wobei

am 5. Juli sich die erwähnte, kalte Antizyklone vom Azorenhoch abgespalten hat und dann rasch den Zusammenhang mit dem Azorenhoch verliert. Überraschend ist nur, daß das südliche Tief vom Morgen bis Mittag des 4. Juli bei langsamer Verschiebung sich rasch vertieft — in Berlin fällt der Druck auf 748 mm — und durch diese Vertiefung die Entwicklung der Böe zu wirklicher Sturmstärke verursacht oder begleitet, wenn man die Frage nach Ursache und Wirkung außer Betracht läßt.

Von Berlin zieht die vertiefte Depression (Zyklone) nordöstlich, erreicht abends Ostpreußen und liegt am Morgen des 5. Juli bereits über Finnland, während dieser Verschiebung ständig an Umfang gewinnend, ohne an Tiefe einzubüßen. Aus der sehr unregelmäßig gestalteten Depression, die westlich der Elbe zu konstatieren war, hat sich somit eine sehr ausgeprägte Zyklone entwickelt.

Die Vertiefung der Depression erzeugt einen Druckverlauf, wie er nur höchst selten bei uns zu beobachten ist und in manchem, wenn auch höchst abgeschwächt, an den Druckgang bei tropischen Zyklonen erinnert (vgl. Fig. 21).

Im ganzen kann man sagen: Eine bei ihrem Auftreten an der französischen Westküste sehr flache Depression wird nach Übertritt auf Land vermutlich infolge thermischer Faktoren vertieft. Kalte Luftmassen dringen von Westen und Norden in diese warme Depression ein. Warum letztere sich so überraschend vertieft, ist zunächst ganz unklar. Mit dem Einbrechen der Kaltluft geht Druckanstieg im großen und ganzen (nicht überall) parallel, und diesem Einbruch von Kaltluftmassen muß zum Teil die temporäre Ausdehnung des Azorenhochs nach Osten zugeschrieben werden. Mit den Kaltluftmassen spaltet sich dann bis zum 5. Juli eine kalte Antizyklone vom Azorenhoch ab und es setzt — nebenbei bemerkt — eine Entwicklung ein, die der Entwicklung vom 2.—5. Juli sehr ähnlich ist, ohne daß die Stürme auch nur annähernd so heftig wie am 4. Juli wurden.

3. Wanderung der barometrischen Steig- und Fallgebiete.

Auf 6 kleinen Karten (Fig. 2) ist der Verlauf der isallobarischen Gebilde in der Zeit vom 3. Juli morgens bis 5. Juli morgens dargestellt. Sie zeigen die von Termin zu Termin (8^h, 14^h, 19^h) eingetretenen Druckänderungen. Daß die Termine zeitlich nicht äquidistant sind, ist mißlich, aber für die Übersicht nebensächlich. Steiggebiete (S) und Fallgebiete (F) des Druckes sind auf den Kärtchen nummeriert.

Am 3. Juli zwischen 8^h und 14^h steigt der Druck im Norden (S_1), fällt in Mitteleuropa (F_1); bis 19^h ändert sich die Lage der Änderungsgebiete nicht, nur erscheint am Abend des 3. Juli im Westen ein Steiggebiet S_2. F_1 gehört zu dem früher erwähnten, südlichen Tiefdruckausläufer einer im Norden vorüberziehenden Depression, deren Rückseite S_1 angehört. Die lokalen Gewitter, die in Westdeutschland den Witterungsumschwung einleiten, entwickeln sich im Fallgebiet F_1, während das Steiggebiet S_1 an dem Eindringen kalter Luft von der Nordsee in die küstennahen Gebiete beteiligt ist.

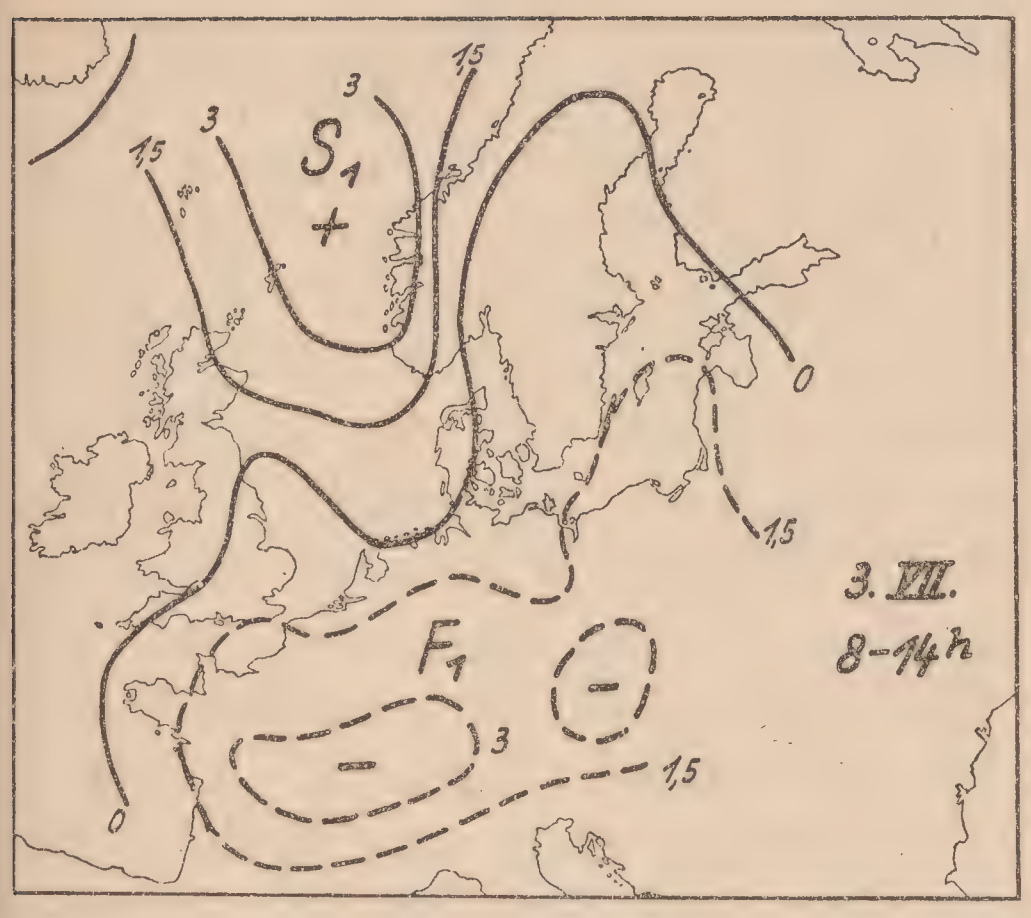

3. VII.
8–14h
3. VII.
14–19h
3.–4. VII.
19–8h
4. VII.
14–19h
4. VII.
8–14h
4.–5. VII.
19–8h

Fig. 2.

Die große Böe entwickelt sich mit dem Steiggebiete S_2, das zwischen 19^h und 8^h, von Südwesten ausgehend, ganz Frankreich überlagert und am Rhein den Übertritt der Böe auf deutsches Gebiet anzeigt. Die Ausbreitung des Steiggebietes S_2 von Südwesten her, also aus Gebieten, in denen eine nennenswerte Abkühlung nicht konstatierbar ist (vgl. S. 299), zeigt einerseits das Azorenhoch als Ausgangsgebiet von S_2 an und läßt andererseits vermuten, daß S_2 — mindestens noch in diesem Entwicklungsstadium — wohl nicht durch niedrig-troposphärische Kaltluftmassen erzeugt ist. Bis 14^h verschiebt sich S_2 bis zur Elbe, wandert dann langsamer gegen ENE und bis zum 5. Juli östlich nach Rußland, während die sich vertiefende Zyklone nach Finnland gezogen ist. Das Fallgebiet F_2, das S_2 nachfolgt, hat mit der Entwicklung der Böe nichts mehr zu tun. Wesentlich für die Böenentwicklung sind die Steiggebiete S_1 und S_2, wobei S_2 bis zum Abend des 4. Juli zwischen Nordküste und Alpen entwickelt ist. Im ganzen zieht also eine Luftdruckwelle[1], von Südwesten ausgehend und gegen ENE fortschreitend, über Mitteleuropa hinweg. Bereits die Isobarenkarten zeigen, daß die Amplitude der Druckwelle ungefähr in der Linie Bordeaux–Köln–Berlin–Königsberg am größten sein muß und nördlich und südlich dieser Linie rasch abnimmt.

4. Die Druckwelle; Beginn des Druckanstieges; totaler Druckanstieg.

In Fig. 3 ist der Druckverlauf vom 3.—5. Juli in 6 Stationen gezeigt, die an der Küste selbst oder in unmittelbarer Nähe der Küste liegen: Brest, Vlissingen, Helgoland, Putbus (Rügen), Köslin (Pommern), Königs-

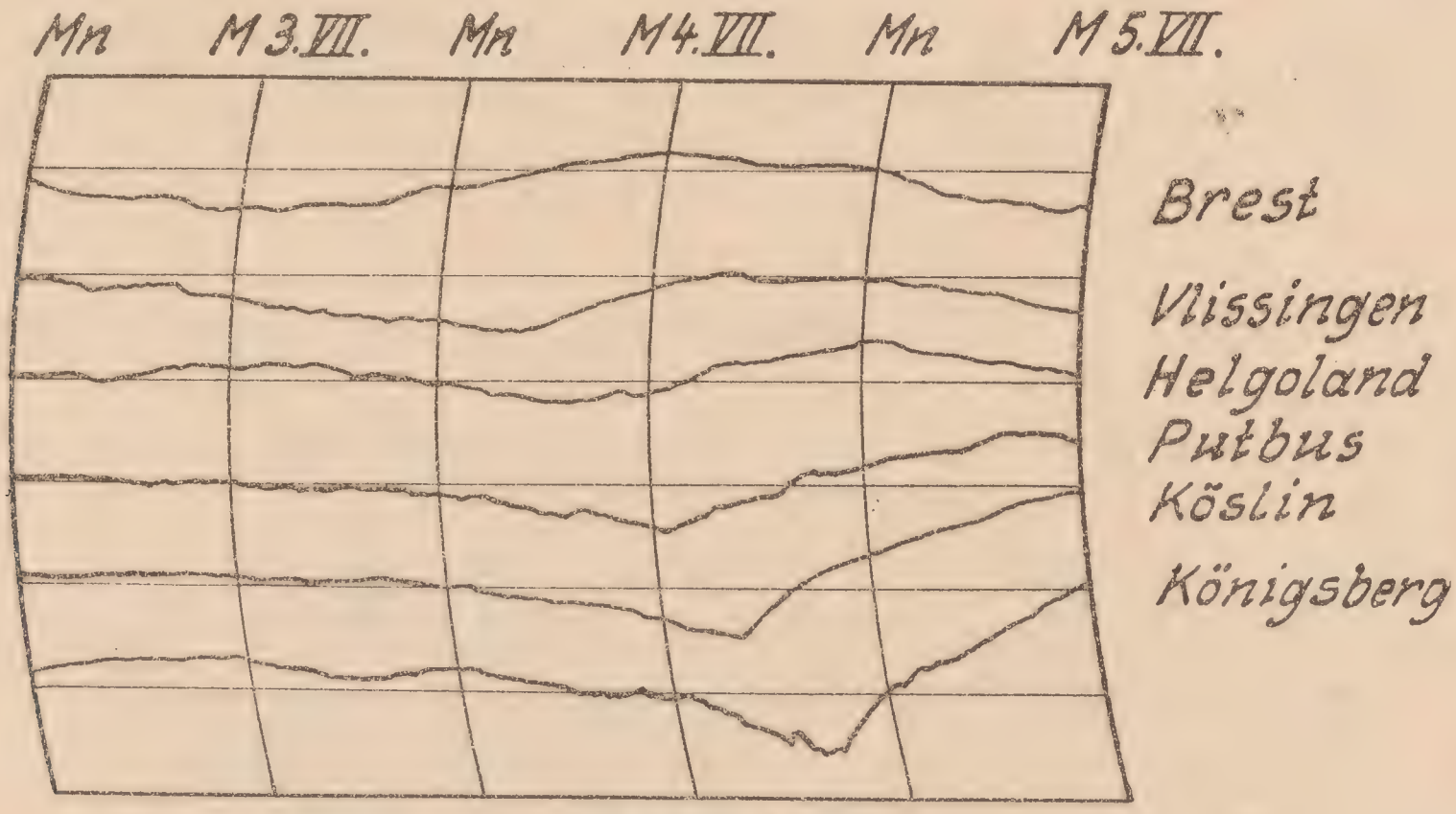


Fig. 3.

berg. Der tiefste Druck tritt in Putbus einen Tag später als in Brest ein. Während die Druckwelle sich ostwärts verschiebt, nimmt ihre Amplitude zu. Zwischen Brest, wo die Druckwelle vom Meer auf Festland übertritt,

[1] Das System, aus F_1 und S_2 zusammengesetzt, wird nur der Kürze wegen als »Luftdruckwelle« bezeichnet.

und Helgoland besteht zwar noch kein bedeutender Unterschied. Weiter nach Osten hin nimmt aber die Amplitude kontinuierlich zu, was einerseits darauf zurückzuführen ist, daß das Zentrum tiefen Druckes in Frankreich südlich von Brest liegt und dann in fast nordöstlicher Richtung nach Königsberg zieht, wie aus Fig. 4 hervorgeht, in der die Isochronen des Druckanstieges konstruiert sind. In Frankreich sind die Isochronen des Druckanstieges nicht zweifelsfrei zu konstruieren, da das scharfe Einsetzen des Druckanstieges, das weiter östlich gefunden wird, noch nicht vorhanden ist. Sicher ist nur, daß der Druckanstieg um 14^h des 3. Juli in Brest einsetzt und bis 2^h des 4. Juli bis zur französischen Ostgrenze fortschreitet.

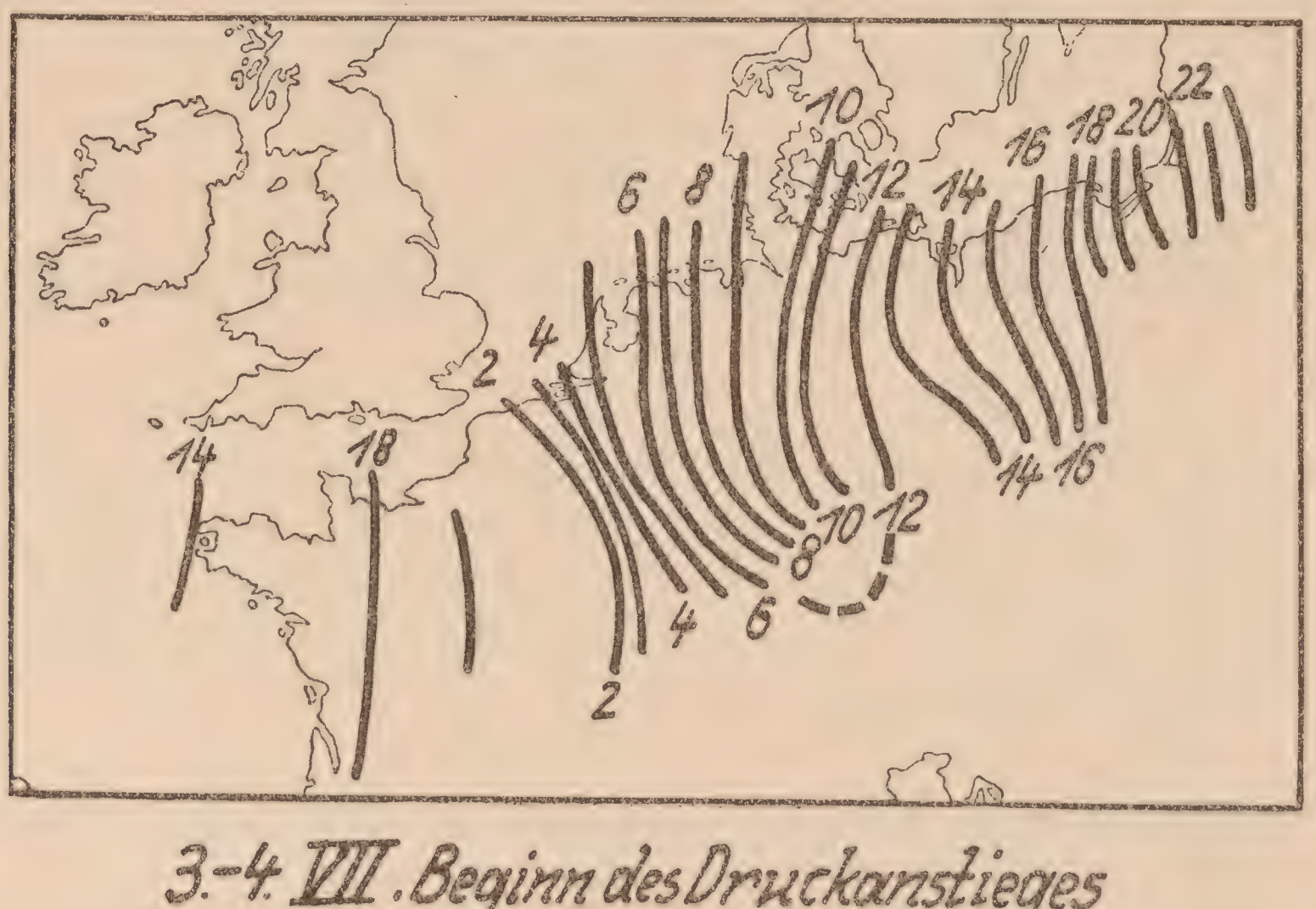


Fig. 4.

Der Druckverlauf an den französichen Stationen wird später noch behandelt. Durch Deutschland pflanzt sich dann der Druckanstieg verhältnismäßig regelmäßig nach Nordosten fort, ist aber in Süddeutschland nicht mehr so deutlich wie in Norddeutschland. Im allgemeinen zeigen die Isochronen in Deutschland auch das Fortschreiten der Böe an, ohne daß es aber in Nordwestdeutschland und in Süddeutschland dabei zu Stürmen gekommen wäre. Der Sturm blieb auf jene Gebiete Deutschlands beschränkt, in denen die Amplitude der Druckwelle sich verstärkte, wobei ausdrücklich hervorgehoben werden muß, daß sowohl Druckfall wie nachfolgender Druckanstieg größer geworden sind. Da vor und nach dem Sturm ziemlich ausgeglichene Druckverhältnisse ohne stärkere Gradienten vorhanden waren, bemißt man die Größe der Amplituden am besten nach der Größe des Druckanstieges, die in Fig. 5 dargestellt ist. Man sieht sofort, daß längs einer von Bordeaux nach Königsberg verlaufenden Linie die Amplitude der Druckwelle größer war als nördlich und südlich dieser Linie und daß längs dieser Linie selbst von Südwest gegen Nordost die Druckschwankung immer größer wurde, in Übereinstimmung mit der aus der Druckverteilung sich ergebenden

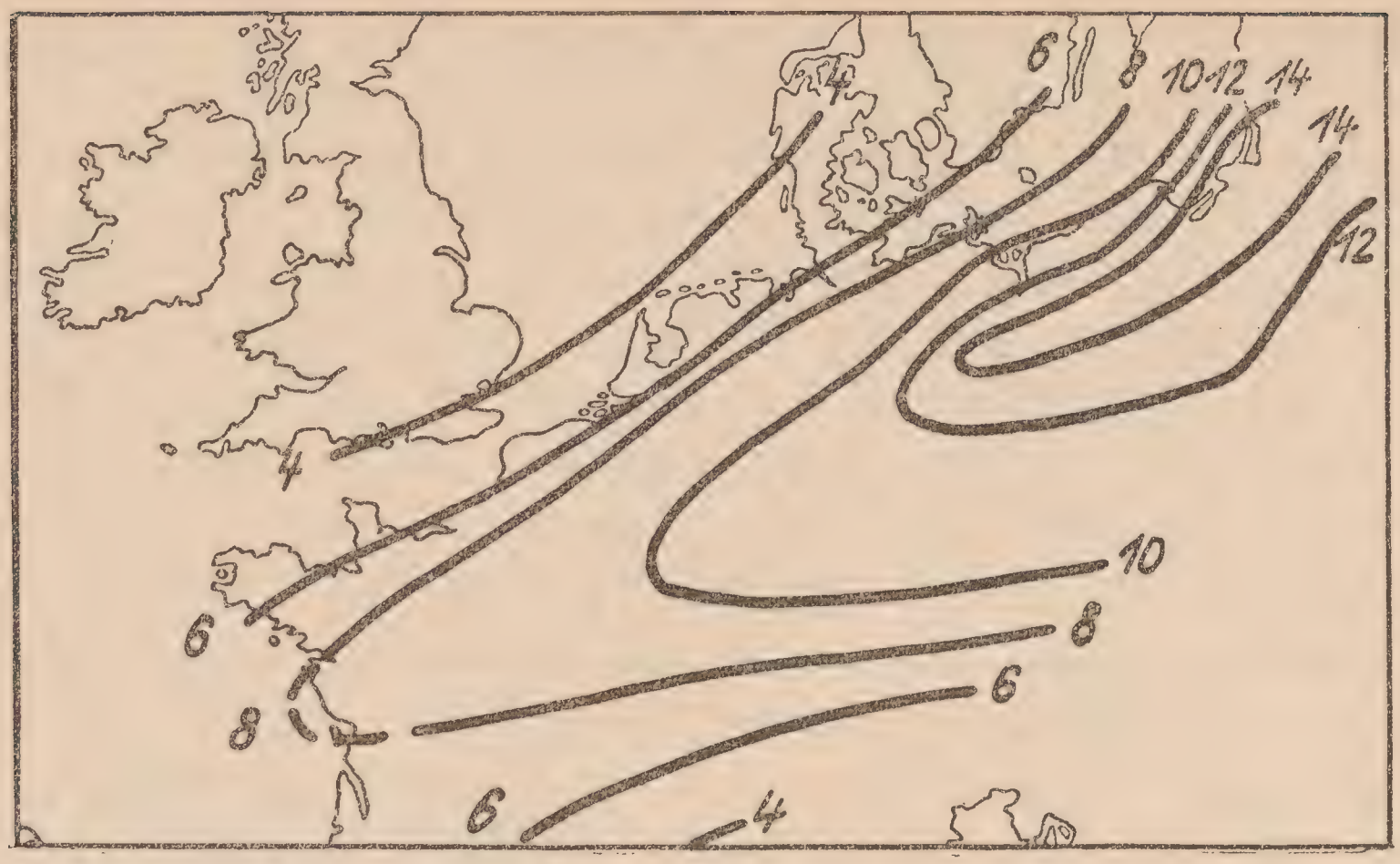


Fig. 5.

Tatsache, daß die Depression sich bei ihrer Verschiebung nach Nordosten ständig vertiefte. Hat man also schon nicht den Fall einer Zyklonenentstehung, so doch den Fall einer auffälligen Vertiefung und im ganzen die Umgestaltung einer unregelmäßigen Depression in eine wohlausgebildete, in Anbetracht der Jahreszeit sehr tiefe Zyklone.

5. Vorgänge in Frankreich und in den Niederlanden.

Die Vorgänge in Frankreich sind weniger intensiv und deshalb komplizierter als weiter im Osten. Von den außerordentlich schönen Registrierungen an 12 Stationen können nur einige Proben gegeben werden: Fig. 6 gibt den

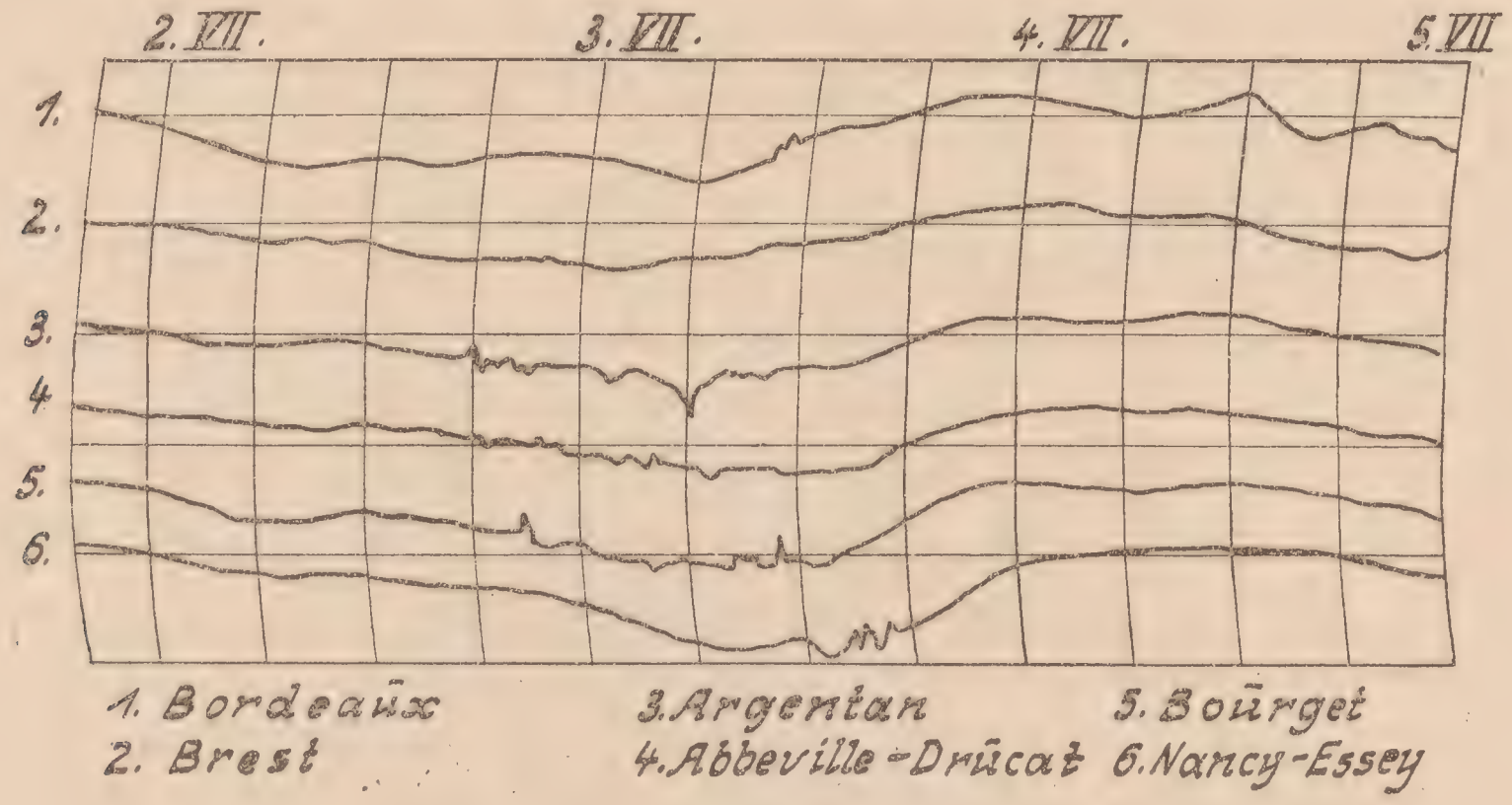


Fig. 6.

Druckverlauf an 6 Stationen wieder. Bordeaux, Brest und Abbeville-Drucat liegen an der Küste, Argentan in Nordwestfrankreich, Bourget bei Paris, Nancy nahe der Nordostgrenze. In Bordeaux und Brest ist der

Verlauf des Drucks einfach, entspricht einer wenig gestörten Welle mit erheblich größerer Amplitude in Bordeaux. In Abbeville–Drucat treten bereits zahlreiche, kleine Störungen auf, die landeinwärts stärker werden, bereits in den Vormittagsstunden des 3. Juli beginnen und die für Gewitter charakteristischen Formen zeigen. Nancy, wo der Druckanstieg unter lebhaften Schwankungen sich zwischen 2^{n} und 6^{h} des 4. Juli entwickelt, zeigt den Übergang zu dem Druckverlauf, der für Deutschland am 4. Juli charakteristisch ist.

Von maßgebender Wichtigkeit sind die Temperaturregistrierungen (Fig. 7). Zunächst fällt der große Temperaturunterschied zwischen Brest und Bordeaux auf. Auch am 2. Juli erreicht die Temperatur in Brest nicht 20° und der Temperaturrückgang zum 3. Juli ist nur unbedeutend, d. h. die Druckwelle bleibt ohne erheblichen Einfluß auf den Temperaturgang. Letzteres ist auch

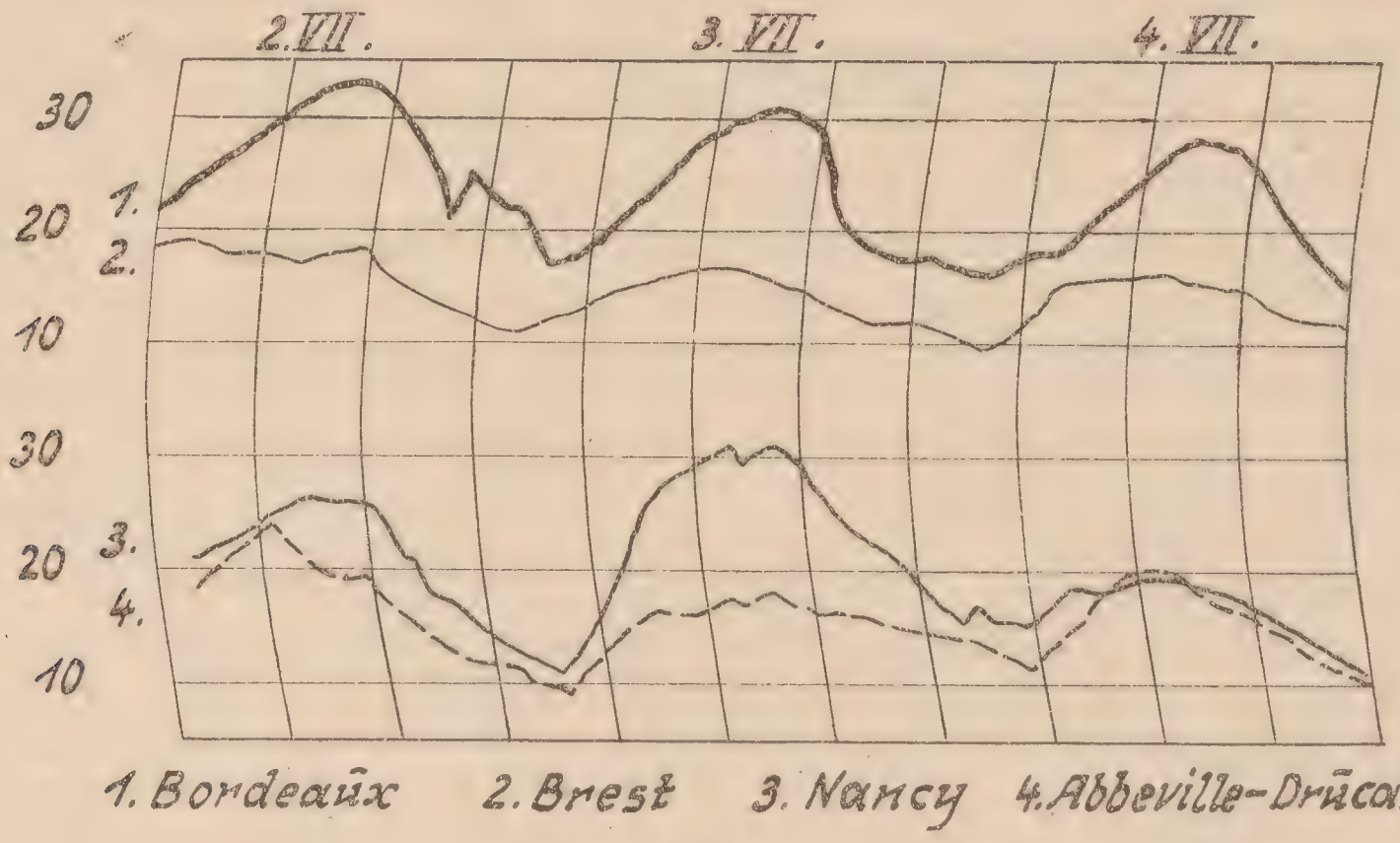


Fig. 7.

in Bordeaux noch angenähert der Fall, wo auch am 3. Juli die Temperatur noch über 30° steigt; es zeigt sich nichts im Temperaturgang, was als Einbruch einer Böe gedeutet werden könnte, trotz des bedeutenden Druckanstieges. Der Wind dreht vom 2.—3. Juli von SE auf WSW, ohne wesentliche Temperaturänderung. Man hat hier also einen Druckanstieg ohne entsprechende Abkühlung — charakteristisch für einen Vorstoß des Azorenhochs.

Ganz anders liegen die Verhältnisse in Abbeville-Drucat. Obwohl auch am 2. Juli die Temperatur nicht besonders hoch ist, hat man am 3. Juli erheblich niedrigere Temperaturen — sehr niedrige im Verhältnis zu Bordeaux oder den Binnenstationen. Die Abkühlung kommt mit NNW-Wind, aber bei fallendem Druck, also noch im Fallgebiet der Druckwelle. Kalte Seeluft dringt hier bis zum 3. Juli landeinwärts vor, ist aber zu seicht, als daß der Druckfall des Kaltlufteinbruches den offenbar von höheren Schichten ausgehenden Druckfall kompensieren könnte. In Argentan, dessen Registrierung nicht mitgeteilt ist, ist ebenfalls der 3. Juli kühler als der 2. Juli. Die Druckschwankungen sind eine Begleiterscheinung der langsam vordringenden Seeluft. Wieder andere Verhältnisse zeigt Nancy an der Nordostgrenze

Frankreichs. Hier ist der 3. Juli — ebenso wie in Deutschland — noch sehr warm, aber bis zum 4. Juli erfolgt ein sehr kräftiger Temperaturrückgang. Der Einbruch kalter Luft ist zeitlich nicht genau zu fixieren, da er in die Zeit normaler nächtlicher Abkühlung fällt und die Temperatur nur auf etwa 15° herabdrückt. Um 2^h (4. Juli) beginnt Druckanstieg, hier also wohl in unmittelbarem Zusammenhang mit der Abkühlung. Daß der Einbruch ungefähr um Mitternach erfolgt, zeigt die Windregistrierung: Um 23^h geht SE in W über, von 2^h bis 8^h hat man heftige Schwankungen der Windrichtung, worauf W andauert. In Bourget setzt ebenfalls um 23^h heftiger NW ein, der nach lebhaften Schwankungen ab 1^h konstant wird.

Im ganzen findet man also sehr verschiedene Verhältnisse: In Brest kühles Wetter, in Bordeaux kräftigen Druckanstieg ohne entsprechende Abkühlung, in Abbeville Abkühlung bei fallendem Druck, in Nancy Abkühlung bei steigendem Druck. Der Befund ist am leichtesten so zu deuten, daß die von Westen kommende Druckwelle zunächst keinen ausgesprochenen Zusammenhang mit den niedrig-troposphärischen Vorgängen hat. Der Druckfall, dem die erste Bildung der zunächst sehr flachen, wohl thermisch etwas verstärkten Depression über dem Festland zuzuschreiben ist, erzeugt zunächst Advektion an sich kalter Seeluft landeinwärts, ein Vorgang, der vielleicht die Amplitude der Druckwelle in der Linie Brest–Abbeville verkleinert, den Druckfall aber nicht zu kompensieren vermag. In rasche Bewegung gerät die kalte Luft wohl erst dann, nachdem sie unter den Einfluß des von Westen nachfolgenden Drucksteiggebietes gerät, dessen Effekt sich jetzt mit dem Druckeffekt der eindringenden kalten Luft kombiniert und S_2 liefert. Etwas schematisch könnte man sagen: Das Fallgebiet der Druckwelle saugt kühle Seeluft von Norden in das erhitzte Land herein, worauf sich unter Einwirkung des nachfolgenden Drucksteiggebietes die von Norden eingedrungene Kaltluft als Böe ostwärts in Bewegung setzt. Das würde heißen, daß die Kaltluft durch die Druckwelle gewissermaßen gesteuert wird.

Nach Abbeville–Drucat und Brest zu schließen, hat die Seeluft eine Temperatur von etwa 10—12°, worauf auch die Vorgänge in den Niederlanden hinweisen, die durch Fig. 8 angedeutet sind. Wie in Frankreich finden wir an und nahe der Küste (Vlissingen, de Bilt) eine einfache Druckwelle; Druckanstieg beginnt in de Bilt etwa 3^h später als in Vlissingen. In Maastricht hat man — ähnlich wie in den binnenländischen, französischen Stationen — einen unruhigen, gestörten Druckgang mit größerer Amplitude. In Vlissingen steigt die Temperatur nicht über 20°, sinkt langsam auf etwa 15°, um dann um 3^h des 4. Juli rasch auf 10° zu sinken, worauf der Luftdruck steigt. In de Bilt sinkt einige Stunden später die Temperatur mit kleiner, scharfer Stufe ebenfalls auf etwa 10°, ungefähr zur gleichen Zeit,

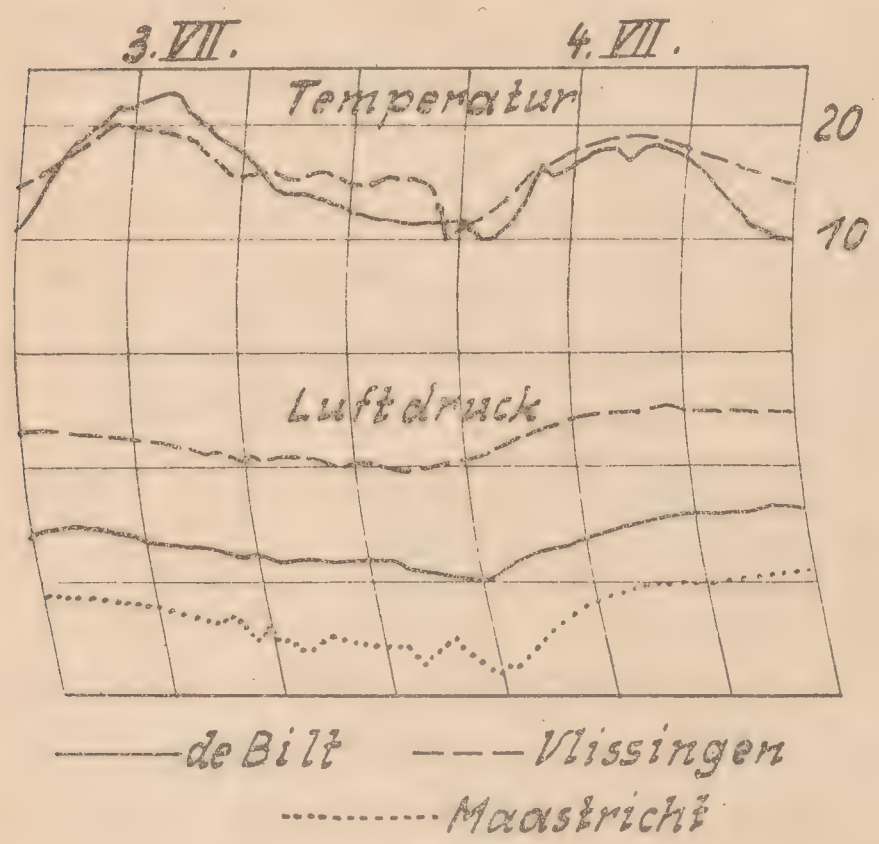


Fig. 8.

in der der Böenvorstoß nach Deutschland beginnt. Der Einbruch kalter Luft erfolgt in de Bilt aus Nord (NNE—NNW), hindert bereits am 3. Juli bei fallendem Druck stärkere Erwärmung und nimmt nur am 4. Juli morgens leichten Böencharakter an, nunmehr mit steigendem Druck. Der Temperaturgang in Vlissingen ist jenem in Abbeville-Drucat sehr ähnlich, nur fehlt letzterer Station die kleine Böe am 4. Juli morgens. Da trotzdem auch in Abbeville der Druck steigt, so darf man die Bedeutung der Böe in den Niederlanden für den Einsatz des Druckanstieges nicht überschätzen.

An Hand eines allerdings dürftigen, aerologischen Materials hat bereits Keil (Erfahrungsberichte, 2. Folge Nr. 25) darauf hingewiesen, daß in Frankreich und den Niederlanden starke Abkühlung, die vom 3.—4. Juli bis mindestens 5000 m hinauf Platz greift, bei fallendem Druck eintritt, d. h. zur Aufstiegszeit am 3. Juli ist der Druck höher als am 4. Juli und der Drucküberschuß des ersten Tages nimmt mit wachsender Höhe zu. Aber aus den beiden Aufstiegen in Soesterberg kann man nicht streng nachweisen, daß die Abkühlung tatsächlich bei fallendem Druck vor sich gegangen ist. In de Bilt z. B. ist der Druck um 8^h des 3. Juli auch höher als um 10^h des 4. Juli, obwohl während des zweiten Termins der Druck kräftig steigend ist. Aber da auch in de Bilt mit Ausnahme des kleinen Böeneinbruches das langsame Einströmen kühlerer Luft bei fallendem Druck vor sich geht, so darf man das gleiche auch im Sinne Keils für die freie Atmosphäre annehmen, woraus sich die Advektion kalter Luft hier als ein Vorgang darstellt, der im Fallgebiete der von Westen kommenden Druckwelle vor sich geht. Dieses Fallgebiet erscheint am Boden infolge der kompensierenden Wirkung der Kaltluftinvasion stark abgeschwächt. Erst das Hereinrücken des Steiggebietes der Druckwelle läßt auch am Boden Druckanstieg wirksam werden. Bezeichnet man die Druckwelle als »primär«, um diese von vielen gründlich mißverstandene Beziehung auch hier zu gebrauchen, so ist klar, daß in Frankreich und den Niederlanden die Amplitude der Druckwelle auch nahe der Küste größer sein würde, wenn nicht der Druckeffekt der Kaltluftzufuhr das primäre Fallgebiet abschwächen würde. Es ist selbstverständlich, daß die Amplitude der am Boden beobachteten komplexen Druckschwankung dort am größten werden muß, wo das primäre Fallgebiet mit niedrig-troposphärischer Erwärmung und wo das nachfolgende primäre Steiggebiet mit niedrig-troposphärischer Abkühlung zusammenfällt, was weiter im Osten der Fall ist. Über Herkunft und Wesen der »primären« Druckwelle möchte ich hier nicht sprechen. Daß sie vorhanden und im betrachteten Gebiet anscheinend unabhängig von den Vorgängen in der unteren Troposphäre ist, beweisen die Verhältnisse in Bordeaux, Abbeville und die aerologischen Daten von Soesterberg, Villacoublay und de Kooj.

Wie kräftig der primäre, unkompensierte Druckfall ist, geht aus folgendem hervor: Am 4. Juli (10^h) ist der Druck in de Bilt um 2 mm niedriger als um 8^h des 3. Juli, obwohl bis mindestens 5 km eine Abkühlung von 6° eingetreten ist. Hätte sich in der Höhe von 5 km der Druck nicht geändert, so müßte am Boden ein Druckanstieg von 9,5 mm eingetreten sein. Tatsächlich ist er um 2 mm niedriger als zur Zeit des ersten Aufstieges.

Vom 4. zum 5. Juli geht dann sowohl in Soesterberg wie in Villacoublay Erwärmung bei steigendem Druck vor sich, so daß also auch das primäre Steiggebiet geschwächt ist, übrigens eine charakteristische Erscheinung bei Vorstößen des Azorenhochs. Die Einzeldaten selbst hat bereits Keil veröffentlicht.

Im ganzen erhält man also für Frankreich und die Niederlande folgendes Bild: Von Südwesten geht eine Druckwelle aus, deren Fallgebiet in den binnenländischen Stationen durch Erwärmung verstärkt, an der Küste aber durch den Zufluß kalter Seeluft abgeschwächt wird. Die Vorgänge in Nancy an der Nordostgrenze deuten an, daß die eingedrungene kalte Luft sich böenartig in Bewegung setzt, nachdem das Steiggebiet der Druckwelle hereingerückt ist. Auch der schwache Böenvorgang in Vlissingen und in de Bilt läßt sich in diesem Sinne deuten.

6. Entwicklung und Verschiebung der Böe in Deutschland.

Die Vorgänge in Deutschland lassen sich übersichtlicher schildern, nicht nur wegen des reicheren, verfügbareren Beobachtungsmateriales, sondern auch

deshalb, weil die Teilvorgänge viel ausgesprochener sind als im Westen. Im Westen läßt sich aber die teilweise vorhandene Unabhängigkeit der Temperatur- und Druckvorgänge besser nachweisen, weil in Deutschland das Fallgebiet der Druckwelle meist mit niedrig-troposphärischer Erwärmung, das Steiggebiet mit Abkühlung zusammenfällt, so daß die Existenz und die Selbständigkeit einer aus SW zuwandernden Druckwelle nicht mehr ganz klar hervortritt.

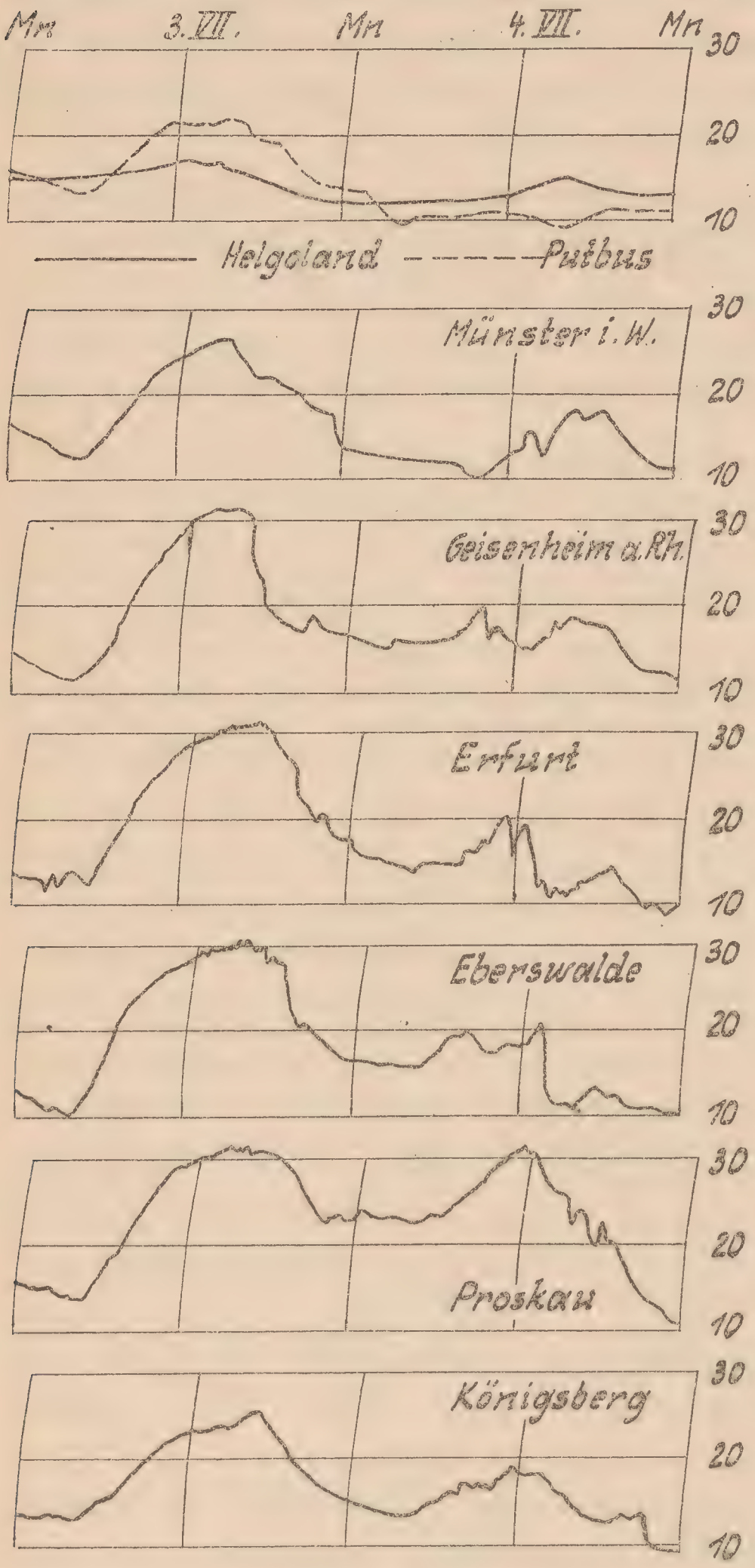


Fig. 9.

In Deutschland fließt die Kaltluft der Hauptböe fast überall aus NW zu. Sie tritt zuerst in Westdeutschland auf und kommt dort vermutlich aus den Niederlanden und aus Nordfrankreich. Die Erscheinung nun, daß zunächst kalte Luft vom Meere eindringt und verhältnismäßig langsam, d. h. ohne Erzeugung von Stürmen, ein großes Gebiet einnimmt und von hieraus die später sich entwickelnde Böe speist, läßt sich in Deutschland sehr klar nachweisen. Es ergibt sich auch, daß das von der langsam eindringenden Seeluft eingenommene Gebiet von der späteren Böe nicht berührt wird. In Fig. 9 sind einige Beispiele für den Temperaturgang an deutschen Stationen mitgeteilt: In Helgoland ist nur eine sehr geringfügige Abkühlung vom 3./4. Juli zu merken, ähnlich wie in Brest; Helgoland liegt gewissermaßen im Ausgangsgebiet der Kaltluft, die sich unter dem Einfluß eines im Norden vorübergehenden Steiggebietes (S_I der Fig. 2) landeinwärts in Bewegung setzt, während gleichzeitig das Fallgebiet (F_I der Fig. 2) der von SW zuwandernden Druckwelle in gleichem Sinne wirkt. Diese ozeanische Kaltluft breitet sich langsam nach S und E aus, erreicht Münster in Westfalen knapp vor Mitternacht, ostwärts Putbus auf Rügen um 2^h des 4. Juli. Wie den Druckregistrierungen (Fig. 12) zu entnehmen ist, erfolgt dieser langsame, aber kräftige Einbruch kalter Luft bei fallendem Druck, ähnlich wie z. B. in dem nordfranzösischem Abbeville–Drucat. Für die Ausbreitung dieser ozeanischen Kaltluft, die die Temperatur auf 10—12° herabdrückt, wurden Isochronen konstruiert, die in Fig. 11 zugleich mit den Isochronen der Hauptböe mitgeteilt sind.

Geisenheim a. Rhein zeigt, wie in Westdeutschland bereits am 3. Juli Gewitter eintraten, die in langen Zügen, die Tiefebene und Süddeutschland meidend, bis weit nach Mitteldeutschland vorstießen und — zuletzt ohne Gewittererscheinungen — die Temperaturen bis fast zur unteren Oder hin auf etwa 15° herabdrückten, worauf am Morgen des 4. Juli erneut Erwärmung einsetzte, die erst durch den Einbruch der großen Böe beendigt wurde. In Geisenheim zieht die große Böe etwa um 8^h durch, in Erfurt zwischen 11 und 12^h, in Eberswalde, nordöstlich von Berlin, um 14^h. In Geisenheim, das von der Hauptmasse der Kaltluft nicht berührt wird, sinkt die Temperatur nur auf etwa 15°, während im übrigen die Temperatur auf etwa 10° zurückgeht, in Eberswalde in einer einzigen Stufe, während z. B. in Erfurt — charakteristisch für eine große Zahl von Stationen — die Abkühlung in zwei durch eine Erwärmung getrennten Stufen erfolgt; hier ist der Böeneinbruch gestaffelt, was für die Entwicklung des Wirbels bei Berlin von Wichtigkeit gewesen sein dürfte. Proskau zeigt die Verhältnisse in Schlesien, im Südosten Deutschlands: Der 4. Juli wird noch so warm wie der 3. Juli, dann erfolgt starke, aber verhältnismäßig langsame Abkühlung ohne Niederschlag und ohne Sturmböe; wo in Schlesien Stürme eingetreten sind (z. B. in Gleiwitz) dürften sie auf Gewitterbildung mehr lokalen Charakters zurückzuführen sein. Die Ausbreitung der Böe nach SE war gehemmt, die nach NE begünstigt; Königsberg wurde um 21^h erreicht, nachdem auch hier der 4. Juli erheblich kühler als der Vortag war, vermutlich infolge des Zuflusses von Ostseeluft.

Für Süddeutschland sind die Thermogramme von Stuttgart, München und Zugspitze mitgeteilt (Fig. 10). In Stuttgart und München ist der 4. Juli wohl wesentlich kühler als der Vortag, aber von einem kräftigen Böeneinbruch kann mindestens in München nicht mehr gesprochen werden. In Stuttgart setzen am 4. Juli morgens kleinere Böen ein, aber die Temperatur sinkt bis in die späten Nachmittagsstunden nicht unter 20°. Im allgemeinen schützen die deutschen Mittelgebirge das südliche Deutschland vor den kältesten Luftmassen; nur einige »Tropfen« kalter Luft überspülen die Mittelgebirge südwärts. Zwar weist auch die am Nachmittag des 4. Juli auf der Zugspitze einsetzende Abkühlung darauf hin, daß warme Luftmassen durch kältere ersetzt werden. Aber da auf der Zugspitze (2966 m) die Temperatur nicht einmal so tief sinkt als auf der um 1300 m niedrigeren Schneekoppe, so ergibt sich klar, daß der Hauptschwall kalter Luft, der in Mitteldeutschland die schweren Böen bringt, Süddeutschland unberührt läßt.

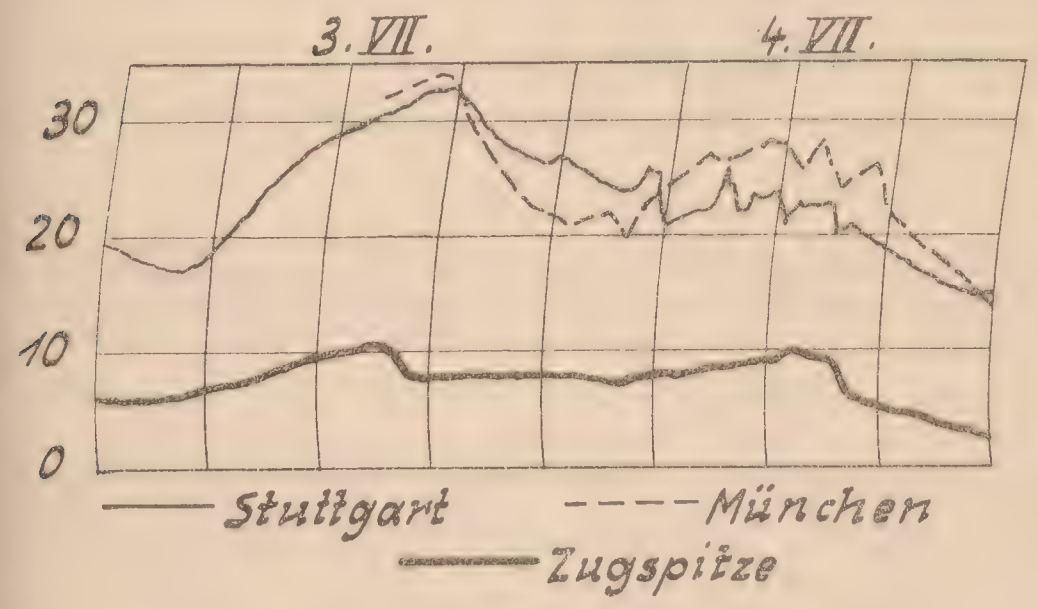


Fig. 10.

Den auf S. 307 zu anderem Zwecke mitgeteilten Thermogrammen einiger Höhenstationen (Fig. 13) ist zu entnehmen, daß in diesen allerdings noch geringen Höhen die Temperatur vom 3. zum 4. Juli langsam sinkt, auch

auf der Schneekoppe, auf der Böen oder Gewitter dabei noch keine Rolle spielen. Auf dem süddeutschen Dreifaltigkeitsberg, der von der großen Böe überhaupt nicht berührt wird, ist dieser langsame Temperaturrückgang am reinsten zu sehen, während er auf der Zugspitze erst am Nachmittag des 4. Juli einsetzt.

Konstruiert man nun mit Hilfe des ganzen, vorhandenen Registriermaterials die Isochronen sowohl für den Einbruch ozeanischer Luft wie für das Fortschreiten der großen Böe am 4. Juli, so erhält man das in Fig. 11 wiedergegebene Isochronensystem. Die Isochronen des langsam von NW sich entwickelnden Einbruches kalter, ozeanischer Luft, der bei

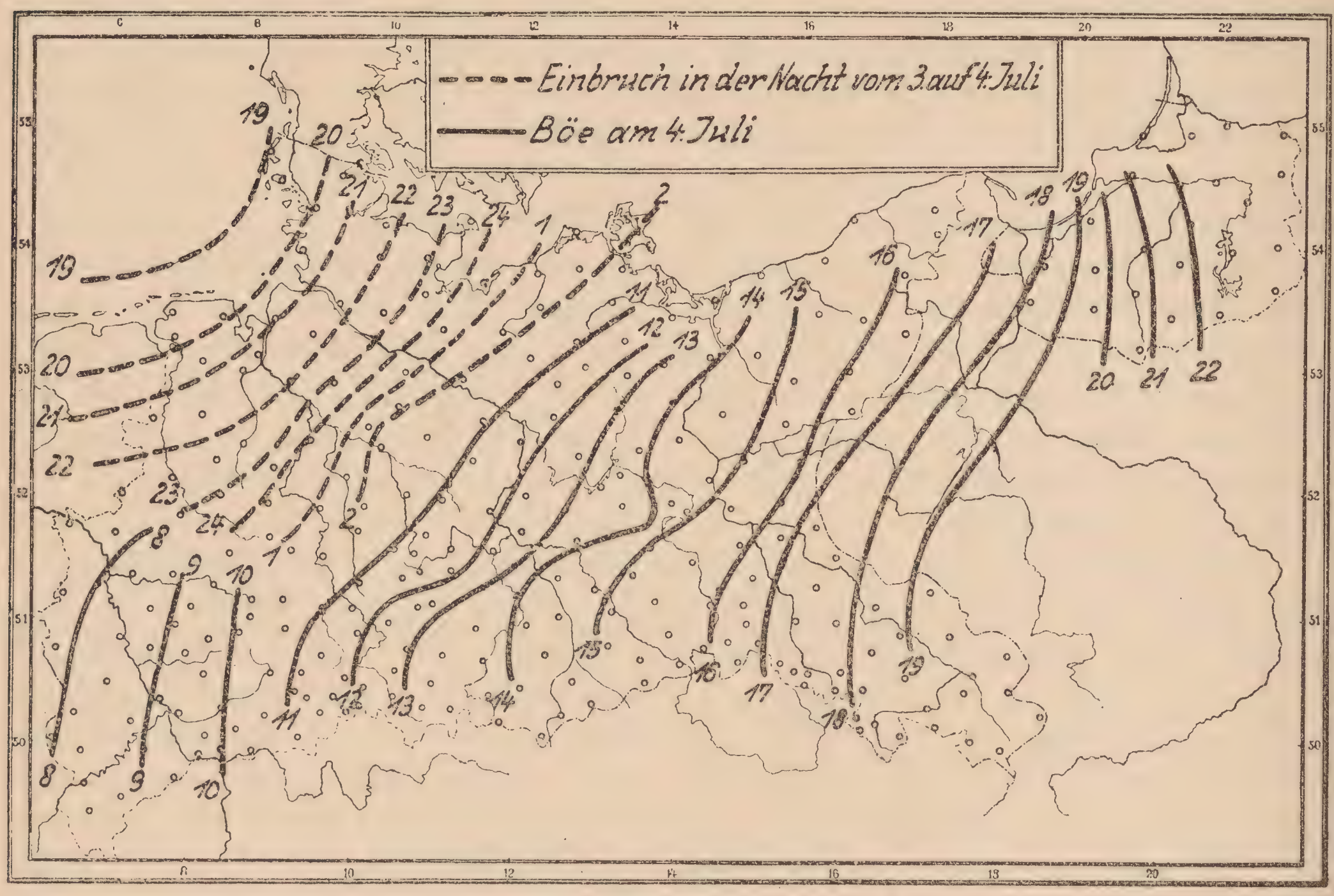


Fig. 11.

fallendem Druck vor sich geht, sind gestrichelt, während die Isochronen der großen Böe ausgezogen sind. Von 19^h—2^h überschwemmt die ozeanische Luft ganz Nordwestdeutschland; längs der für 2^h gezeichneten Isochrone wird die Front bis etwa 10^a des 4. Juli stationär. Die Ausbreitung der ozeanischen Luft nach S wird anscheinend durch die Mittelgebirge gehemmt, die Ausbreitung nach E durch Nordostwinde mittlerer Stärke, die sich am Morgen des 4. Juli von der Ostsee landeinwärts entwickeln. Bis zur Isochrone für 2^h dringt Luft von etwa 12° vor. Ein Knick, der für die Isochronen von 1^h und 2^h charakteristisch ist, ist durch das nach NW vorspringende Gebirgsmassiv des Harzes bedingt. Das Eindringen der kalten Seeluft ist mit stellenweise kräftigen Niederschlägen verbunden (vgl. S. 323) und starke Bewölkung breitet sich mit höheren Luftströmungen noch weit in östlicher Richtung über die 2^h-Isochrone hinaus aus.

Der großen Böe gehen zwei Gewitterzüge als Vorläufer voraus, die später behandelt werden. Die große Böe selbst verschont das Gebiet des ozeanischen Kaltluftvorstoßes und überschreitet etwa um 8^h, von Nordwesten kommend, den Rhein unter starkem Druckanstieg, der auch in Süddeutschland zu finden ist, obwohl dort, bei nur mäßigen westlichen Winden, die Abkühlung schwach ist. Zur Sturmstärke entwickelt sich die Böe erst dort, wo etwa um 11^h die an der Front zum Stillstand gekommenen Kaltluftmassen des ozeanischen Einbruches in den von Westen kommenden Böenzug sich eingliedern, selbst nunmehr äußerst rasch vorstoßen und zu heftigen Stürmen zunächst in Mitteldeutschland Veranlassung geben. Daß die ozeanischen Kaltluftmassen, erneut in Bewegung gesetzt, den Hauptbestandteil der Böenmasse bilden, spricht sich auch darin aus, daß der Isochronenverlauf der großen Böe ab 11^h der Richtung nach mit dem Isochronenverlauf des ozeanischen Kaltlufteinbruches übereinstimmt.

Von den Vorgängen, die zum böenartigen Vorstoß der bereits stationär gewordenen ozeanischen Kaltfront führten, kann man sich folgende Vorstellungen machen: Da trotz des Stationärwerdens der Front aus Nordwest noch immer kalte Luft nachfloß, muß die Grenzfläche im Verlauf der Nacht immer steiler geworden sein, unter Steigerung der potentiellen Energie des Systems, die aber zunächst sich nicht umsetzen konnte, da das Fallgebiet der von Südwest kommenden Druckwelle den Effekt des Kaltlufteinbruches überkompensierte. Erst als das Steiggebiet der Druckwelle hereinrückte und das Fallgebiet in das noch warme Gebiet abgezogen war, entwickelte sich ein kräftiger, von W nach E gerichteter Druckgradient, der die stationär gewordenen Fronten nach E in Bewegung setzte. Erst das Steiggebiet der Druckwelle hat die gewissermaßen inaktiv gewordenen Luftmassen ozeanischer Herkunft wieder aktiviert und zu neuem Vorstoß befähigt[1]. Bei dem weiteren Vorstoße kombinierte sich dann der Druckeffekt der vorstoßenden kalten Luft mit dem Steiggebiete der Druckwelle, woraus sich der große Druckanstieg in dem von der Böe durchzogenen Gebiete erklärt, während das nach Osten abziehende Fallgebiet der Druckwelle durch andauernden Zufluß sehr warmer Luft, wenn nicht vertieft, so doch konserviert wurde. Da Höhenmaterial in genügendem Ausmaß nicht zur Verfügung steht, kann über die Herkunft der Druckwelle nur gesagt werden, daß sie vom Azorenhoch ausging.

Bis zu einem gewissen Grade lassen sich die Zusammenhänge auch aus den Druckregistrierungen herauslesen, wobei allerdings der langsame, nächtliche Vorstoß kalter, ozeanischer Luft, äußerlich betrachtet, keine Spur im Druckgang hinterlassen hat. In Fig. 12 sind 6 Registrierungen wiedergegeben: Helgoland zeigt die Verhältnisse an der Küste; Soltau liegt in Nordwestdeutschland in dem von ozeanischer Luft präokkupierten Gebiet; Solingen, Neuwied und Lüdenscheid liegen in Westdeutschland am oder

[1] Vgl. H. Wagemann, »Über Steiggebiete des Luftdruckes bei russischen Kältewellen«. Abhandl. d. Preuß. Met. Inst. Band IX, Nr. 2, Berlin 1929. Der Verfasser gibt interessante Beispiele für die Aktivierung »latenter« Steiggebiete des Luftdruckes. Zur Ruhe gekommene Kaltluftmassen werden durch zuwandernde Drucksteiggebiete wieder in Bewegung gesetzt.

unweit des Rheins; Hohenheim bei Stuttgart in Süddeutschland. In Helgoland hat man, wie bereits früher erwähnt, eine einfache Druckwelle, die man aber wohl auch nicht als die ungestörte, ursprüngliche Welle betrachten darf, da ja über Helgoland mit Nordwestwind kontinuierlich kalte Luft strömt, über Helgoland anschwillt und das Fallgebiet der Druckwelle abstumpft. In Soltau, südöstlich von Helgoland, ist Fall und Anstieg des Drucks bereits kräftiger, da über Soltau die kalten Luftmassen des ozeanischen Einbruches wohl nicht mehr so hoch reichen dürften wie über Helgoland. Sehr gestörte Registrierungen zeigen die drei westdeutschen Stationen mit raschem, kräftigem Druckanstieg bei Einbruch der großen Böe. Aber der großen Böe gehen zahlreiche Störungen in Gestalt kräftiger Druckschwankungen bei im allgemeinen noch fallendem Druck voraus. Die ersten dieser Schwankungen

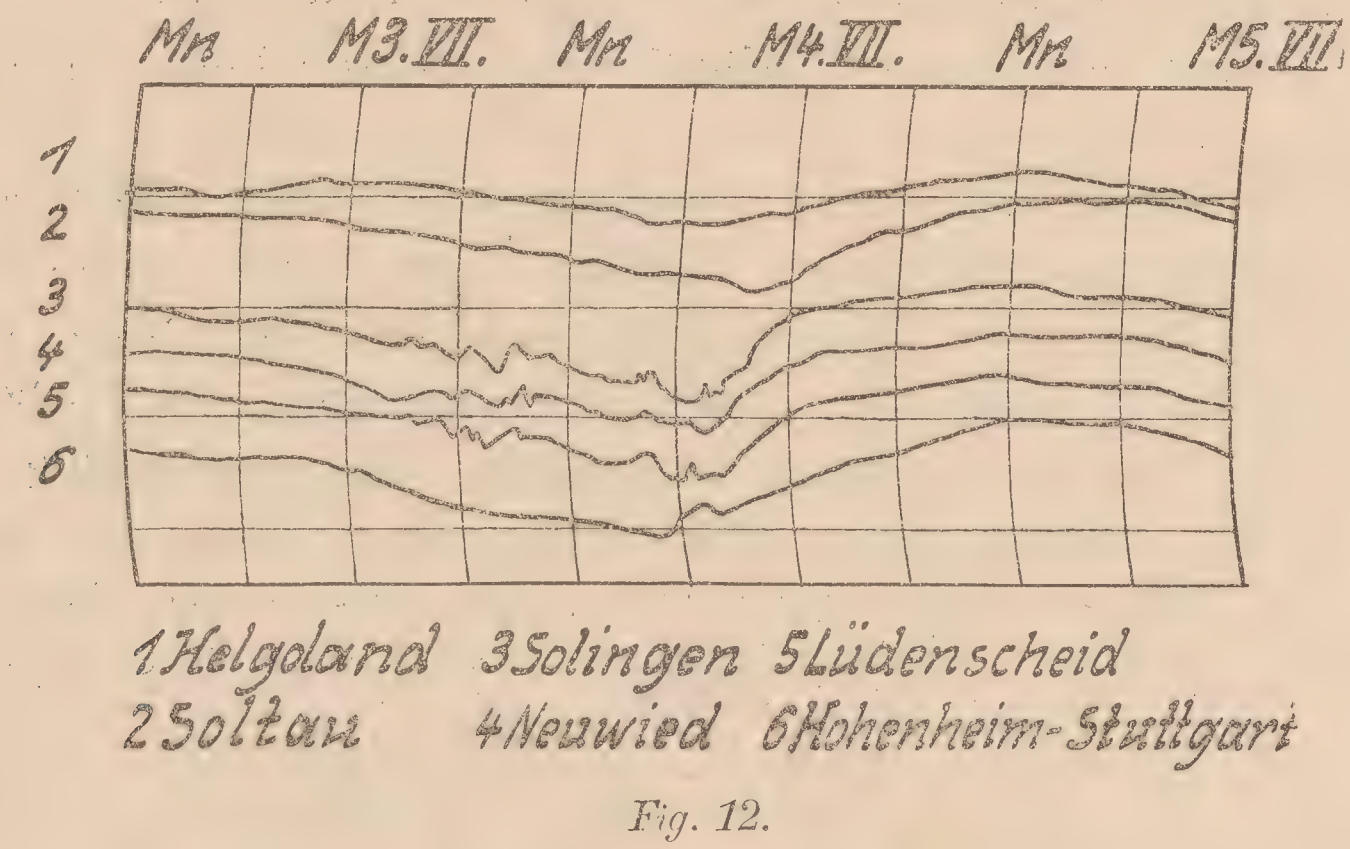


Fig. 12.

setzen bereits am Nachmittag des 3. Juli ein und sind von Gewittern vielleicht örtlichen Charakters begleitet. Bei den Störungen in der Nacht zum 4. Juli, die ostwärts fast bis Schlesien zu verfolgen sind, kann aber an lokale Vorgänge nicht mehr gedacht werden, sondern es handelt sich um Vorläufer der großen Böe, die im nächtlichen Temperaturgang der Niederungsstationen allerdings nur mehr in Spuren, auf den höher gelegenen Stationen (vgl. Fig. 13) aber sehr deutlich nachweisbar sind. Das vorrückende Fallgebiet der Druckwelle wird durch diese Böenvorläufer nur temporär abgeschwächt. In Hohenheim–Stuttgart endlich, südlich des Mittelgebirgsriegels, wo der große Böeneinbruch Norddeutschlands überhaupt nicht vorhanden ist, hat man einen viel einfacheren Verlauf des Druckes, aber mit kräftiger Amplitude, somit im ganzen eine Druckwelle, die einem ungestörten Verlaufe mehr entsprechen dürfte als jene Helgolands. Der Druckanstieg beginnt in Hohenheim bemerkenswert früh (bereits um 5^h des 4. Juli), ein deutliches Anzeichen dafür, daß die Druckwelle im allgemeinen von SW nach NE wandert. Der Beginn des Druckanstieges in Hohenheim hat ebenfalls böigen Charakter, entsprechend den gleichzeitigen Temperaturstufen im Thermogramm (vgl. Fig. 10). Aber da die Temperatur dabei nicht unter 20° sinkt, kann an einen Zusammenhang mit dem Einbruch ozeanischer Luft in Nordwestdeutschland nicht gedacht werden. Hier fließt wohl Luft aus Westen, aus Frankreich zu, wo ja z. B. in Nancy bereits um Mitternacht

kalte Luft eingebrochen ist. (In München, östlich von Hohenheim, beginnt Druckanstieg bereits um 6^h, zunächst ohne jede Abkühlung und bei sehr hohen Temperaturen auf der Zugspitze.)

Von größter Wichtigkeit für die Deutung des Zusammenhanges zwischen Druckwelle und Kaltlufteinbruch ist die Tatsache, daß in Mitteldeutschland nach einem aerologischen, bereits von Keil mitgeteilten Aufstieg in Lindenberg die Abkühlung von stark steigendem Druck begleitet ist, während im Westen (Frankreich und Niederlande) die entsprechende Abkühlung bis 5 km hinauf bei fallendem Druck vor sich gegangen ist. Die Kaltluft hat sich also im Westen, allerdings verhältnismäßig langsam vorrückend, in das Fallgebiet der Druckwelle ausgebreitet, was in Deutschland nur im Nordwesten der Fall war. In Mittel- und Ostdeutschland ist der Kaltlufteinbruch mit dem Steiggebiet der Druckwelle gekoppelt und wäre ohne letzteres wohl überhaupt zum Stillstand gekommen.

Fig. 13.

7. Vorläufer der Böe am Morgen des 4. Juli.

Wie bereits erwähnt, gingen dem Einbruch der großen Böe einige verhältnismäßig schmale, mit Gewittern und Starkregen verbundene Böenzüge voraus, die zwar sehr weit nach Osten vordrangen, aber in die Tiefebene nicht übergriffen. Diese Vorläufer sind aus den Temperaturregistrierungen der Niederungsstationen nicht deutlich abzuleiten, teils wegen der normalen, nächtlichen Abkühlung, teils wegen der Abkühlung durch vorausgegangene Gewitter, letzteres namentlich in den westlichen Gebieten. Diese Vorläufer prägen sich aber sehr deutlich aus in den Temperaturregistrierungen einiger hochgelegener Stationen (Fig. 13), namentlich auf der Wasserkuppe, dem Brocken, dem Fichtelberg und den Talstationen des Riesengebirges (vgl. Fig. 16), ferner aber auch aus den Druckregistrierungen der Hoch- und Niederungsstationen. Dazu kommen die Meldungen der Gewitterstationen, zahlreiche Niederschlagsregistrierungen und — weniger zahlreich — einiger Anemographen, so daß sich die Isochronen dieser Böenzüge leicht konstruieren

ließen. Diese Vorläufer haben in manchen Orten (z. B. Dresden und einige schlesische Stationen) größere Windgeschwindigkeit erzeugt als die später einsetzende große Böe. Bemerkenswert sind vor allem die Druckregistrierungen, weil sich kurzdauernde Störungen über eine große Strecke hin verfolgen lassen. Ein in Berlin in der ersten Morgenstunde einsetzender, sehr rascher Druckfall von etwa 3 mm, wie er nur höchst selten zur Beobachtung kommt, bot den Anlaß, sich mit der Herkunft dieser Druckstörung und damit mit den Vorläufern der großen Böe zu befassen.

In Fig. 14 sind nochmals die Isochronen des in der Nacht erfolgten, später stationär werdenden, ozeanischen Kaltlufteinbruches gezeichnet; außer-

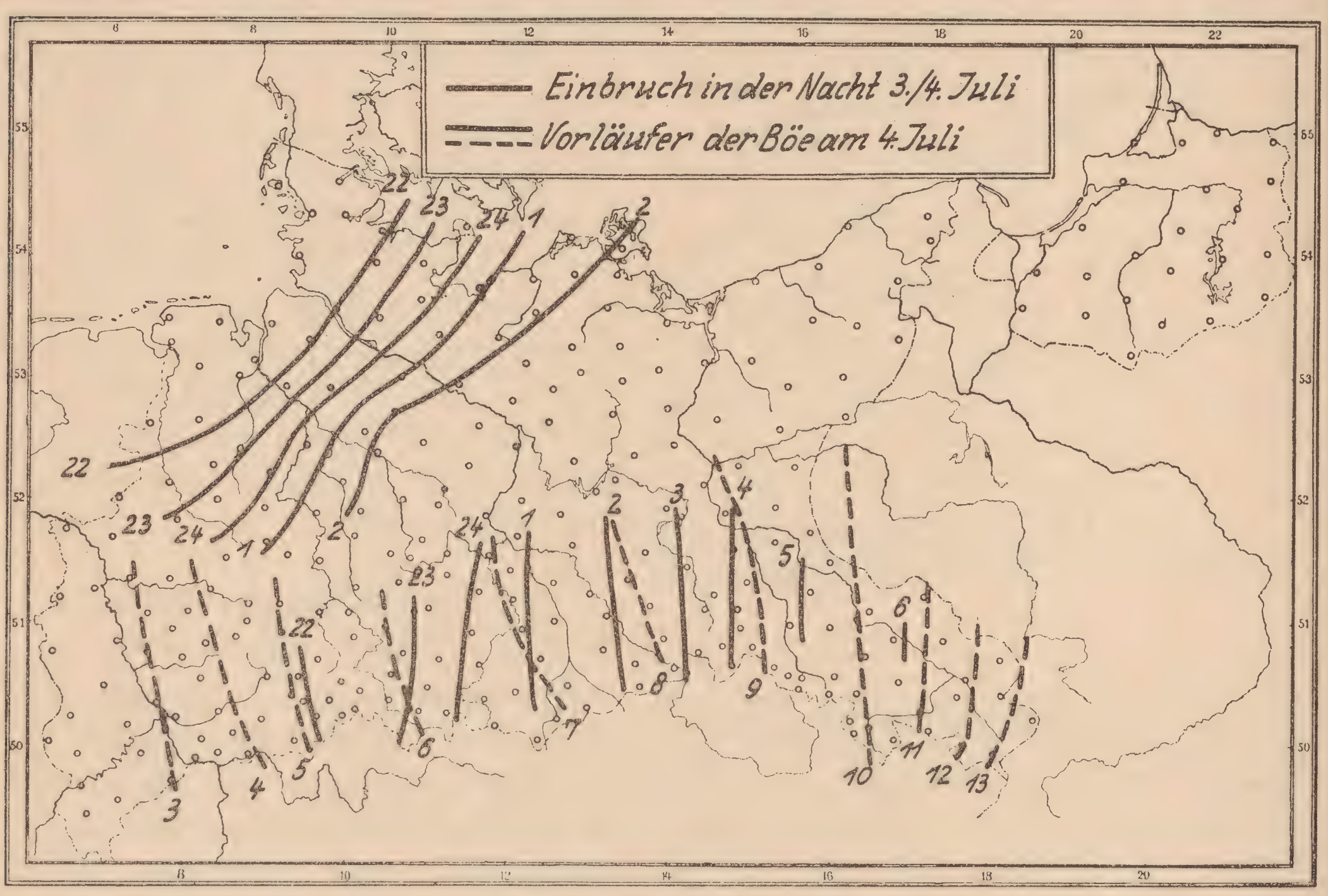


Fig. 14.

dem die Isochronen der beiden Vorläufer der großen Böe. Der erste setzt, zunächst sehr undeutlich, um 22^{h} im südwestlichen Norddeutschland, in der Gegend von Marburg ein, kann äußerlich als Fortsetzung der im rechtsrheinischen Gebiet niedergegangenen Gewitter angesehen werden, zieht im Mittelgebirge östlich, wird in der Druckregistrierung am deutlichsten in Thüringen und endigt etwa um 5^{h} im westlichen Schlesien. Der zweite Vorläufer beginnt, ebenfalls wenig ausgesprochen, um 3^{h} am Rhein, zieht ungefähr mit gleicher Geschwindigkeit wie der vorausgegangene Böenzug ostwärts und läßt sich bis Schlesien verfolgen, wo er die hohen Temperaturen unterbricht, aber noch nicht endgültige Abkühlung einleitet, wobei es in Schlesien zu einigen Gewittern kommt. Der Temperaturverlauf auf der Wasserkuppe und dem Fichtelberg (vgl. Fig. 13) zeigt, daß zunächst in der Höhe zwischen beiden Böenzügen wieder kräftige Erwärmung eintritt, zugleich

aber auch, daß der Kaltluftkörper dieser Böenzüge sich mindestens bis zu einer Höhe von etwa 1200 m erstreckt. Der erste Vorläufer erreicht jedoch die Schneekoppe (1602 m) nicht mehr, wohl aber der zweite, wenn auch schwach. Der Brocken ist aber in der Nacht vom 3./4. Juli im Verhältnis zu Fichtelberg und Schneekoppe schon sehr kalt. Der Brocken ist aber noch zu warm, als daß man annehmen könnte, er sei von der ozeanischen Kaltluftmasse schon erreicht; auch die Windrichtung (SW) spricht dagegen.

Die Druckregistrierung einiger Stationen (Fig. 15) zeigt den verschiedenen Charakter der Druckstörung in den einzelnen Gebieten namentlich während des ersten Vorläufers. In Eberswalde, nordöstlich von Berlin, hat man überhaupt keine Störung. In Berlin selbst hat man die bereits erwähnte auf-

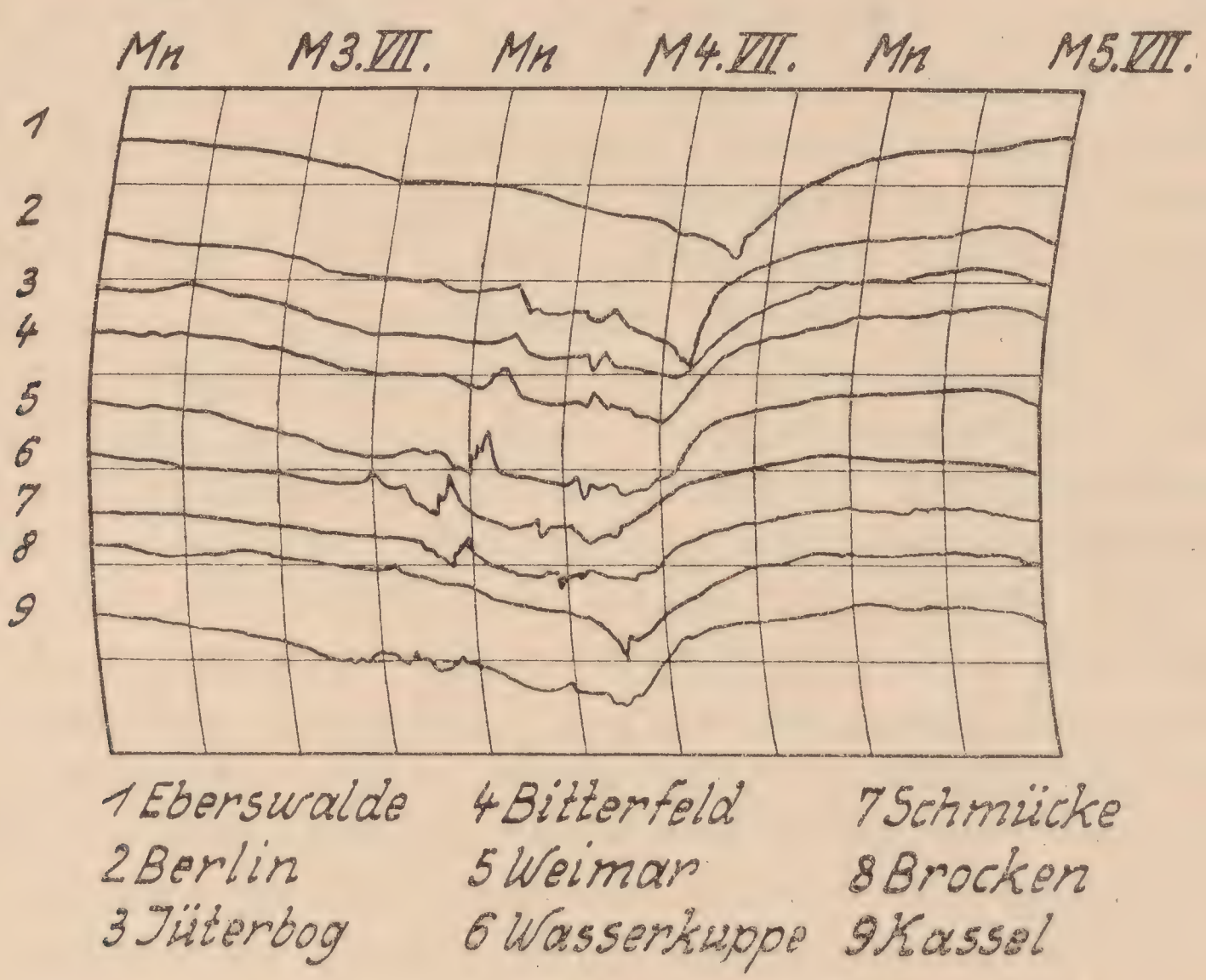


Fig. 15.

fällige Druckstufe nach unten um etwa 3^h. In südwestlicher Richtung nimmt die Störung immer mehr den Charakter einer »Gewitternase« an, bemerkenswerterweise auch auf den hochgelegenen Stationen Schmücke und Wasserkuppe, während auf dem Brocken kaum mehr eine Spur der Druckstörung zu erkennen ist, was aber nicht durch die Höhe des Brockengipfels (nur 200 m höher als Wasserkuppe) verursacht sein kann, sondern dadurch, daß der gegen NW vorgeschobene Brocken eben schon außerhalb der Störungsbahn liegt. Man sieht sofort, daß in Berlin nur die Hälfte der Gewitternase vorhanden ist, nämlich der Druckabfall, während in den thüringischen Stationen die »Nase« dadurch zustande kommt, daß vor dem Böeneinbruch der Druck kräftig fällt. Dieser der »Gewitternase« vorausgehende Druckfall darf aber nicht mit dem in Berlin später eintretenden Druckfall identifiziert werden, da die Stationen Jüterbog und Bitterfeld den kontinuierlichen Übergang der Berliner Störung in die »Nase« der südwestlichen Stationen anzeigen.

Aus den Windregistrierungen von 13 Stationen ergibt sich für Mitteldeutschland folgendes: Um 0^h hat man nördliche bis nordwestliche Winde

im Gebiete zwischen Elbe und Oder, die äußerlich einen Zusammenhang mit den von Nordwest eingedrungenen, um 2^h stationär werdenden ozeanischen Kaltluftmassen haben, während in Schlesien und wohl auch in den westlichen Mittelgebirgen südwestliche Winde wehen, ungefähr, wie es in der Temperaturkarte für 21^h des 3. Juli (Fig. 19) dargestellt ist. Die »Drucknase« entwickelt sich mit kräftigem Nordwestwind, der stellenweise Sturmstärke annimmt, aber dann, im abfallenden Teil der Nase, in Südostwind übergeht. Im ganzen hat man den Eindruck, daß diese Vorläuferböe durch einen »Tropfen« kalter Luft verursacht wird, der sich von der von NW eindringenden Kaltluftmasse abspaltet und östlich wandert. Für einen Tropfen kalter Luft spricht ja auch der Temperaturgang der hochgelegenen Stationen. Die Abspaltung dieses Tropfens kalter Luft erklärt sich vielleicht aus dem raschen Druckfall in den thüringischen Stationen vor der Gewitternase; er deutet die Bildung eines kleinen Wirbels an, der östlich zieht und auf seiner Rückseite kalte Luft zum temporären Vorstoße zwingt, wenn nicht der Wirbel umgekehrt durch den Vorstoß kalter Luft erzeugt wird. Auf jeden Fall setzt aber nach Durchzug des »Tropfens« kalter Luft wieder Südost ein, der z. B. auch in den Registrierungen von Berlin und Niederfinow bei Eberswalde vorhanden ist, obwohl hier keine Drucknase sich entwickelt hat. In Berlin entspricht dem Südostwind zeitlich der rasche, auffällige Fall des Druckes, und der Druckfall zeigt das rasche Zurückweichen einer »Front« an, deren Wolkenbildung in Berlin direkt zu beobachten war, die aber als »Sekundärfront«, d. h. östlich der Front der ozeanischen Kaltluft, entwickelt gewesen sein muß. Auf der Temperaturkarte des 3. Juli 21^h (vgl. Fig. 19) dürfte die 20^h-Isotherme ungefähr dem Verlauf dieser »Front« entsprechen. Zwischen dem noch sehr warmen Schlesien und dem bereits stark abgekühlten Nordwestdeutschland liegen Luftmassen, deren Temperatur zwischen 15° und 20° liegt und die im allgemeinen auch bereits nach E, SE oder S strömen, wenn auch sehr langsam. Das Gebiet von Berlin steckt z. B. schon während der ganzen Nacht vom 3./4. Juli in diesen Übergangsmassen, über denen sehr warme, aus Süd und Südost zufließende Luft angenommen werden muß. Bei den Böenvorläufern verstärkt sich der Zufluß aus NW, nach Durchzug der Vorläufer gewinnt wieder SE an Raum.

Sehr instruktiv ist die Betrachtung der Temperaturvorgänge in dem Gebiete zwischen Berlin und dem Riesengebirge, auf die sich beistehende Fig. 16 bezieht. Buch und Eberswalde liegen in der Tiefebene bei Berlin in etwa 60 m, Grünberg nahe der schlesischen Grenze in 149 m, Arnsdorf am Fuß der Schneekoppe in 451 m, Krummhübel in 650 m, Schneekoppe 1602 m. Uns interessieren die Vorgänge in der Nacht vom 3./4. Juli. In der Tiefebene hat man bei vorwiegend westlichen bis nordwestlichen Winden Abkühlung auf etwa 17°, d. h. in der Tiefebene hat man ungefähr gleichniedrige Temperatur wie oben auf der Schneekoppe. In Grünberg, viel näher dem Gebirge, bleibt die Temperatur zunächst auf etwa 23° und nur die beiden Böenvorläufer erniedrigen die Temperatur unter 20°. In Arnsdorf am Gebirgsfuß bleibt die Temperatur bis zum Einbruch der großen Böe überhaupt über 20°, obwohl die Böenvorläufer sich im Temperaturgang scharf markieren. In Krumm-

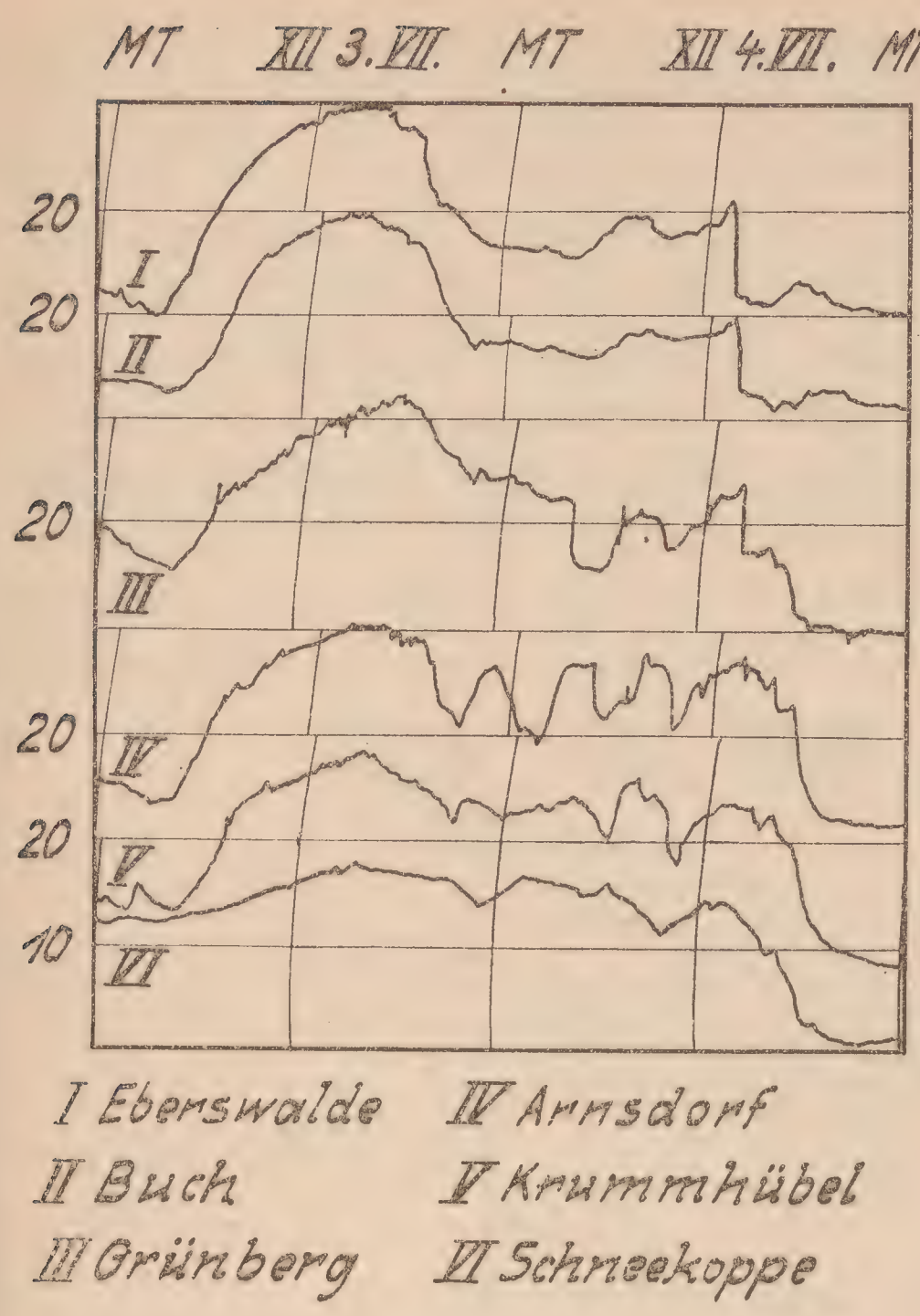


Fig. 16.

hübel sind die durch die Vorläufer erzeugten Temperaturschwankungen bereits geringer, und auf der Schneekoppe macht sich überhaupt nur der zweite Vorläufer bemerkbar. Im Gebirge hat man Föhn, in der vorgelagerten Ebene ist kalte Luft eingedrungen, die während der Böenvorläufer temporär bis zu den Gebirgstalstationen anschwillt und dann wieder abebbt.

Daß nach jeder der Vorläuferböen bei SE der Druck noch tiefer sinkt als vor Einsatz der Böe, ohne daß höhere Temperaturen wie vorher eintreten, weist darauf hin, daß man sich noch im allgemeinen im Fallgebiet der nordostwärts wandernden Druckwelle befindet. Bedenkt man ferner, daß die Vorläufer in Westdeutschland sehr undeutlich und erst in Mitteldeutschland und Schlesien sehr ausgesprochen sind, so kommt man zur Auffassung, daß diese Vorläufer doch letzten Endes mit den von Nordwest einbrechenden ozeanischen Luftmassen in Verbindung stehen, wenn auch nicht mit den kältesten Massen, die später die große Böe erzeugen.

Wie aus Fig. 15 hervorgeht, ist die Druckstörung des zweiten Vorläufers in Mitteldeutschland viel weniger ausgeprägt als jene des ersten. Aber auch bei der zweiten Vorböe setzt NW ein, der dann nach Durchzug wieder in SE übergeht; Starkregen, stellenweise Gewitter begleiten auch diesen zweiten Vorläufer, der weiter nach E vordringt als der erste. In Fig. 17 sind Druckregistrierungen einer Stationsreihe wiedergegeben, die sich von Frankfurt a. O. im allgemeinen südöstlich bis ins Riesengebirge erstreckt. In Frankfurt a. O. markiert sich die Störung ähnlich wie in Berlin, d. h. ohne Entwicklung einer ausgesprochenen Gewitternase. In Grünberg entspricht jedem der zwei Vorläufer eine »Nase«, und die des ersten ist noch kräftiger als die des zweiten. In Arnsdorf und Breslau-Krietern ist die Störung der ersten Vorböe schon sehr schwach, dafür wird die der zweiten kräftiger, die sich bis auf die Schneekoppe hinauf bemerkbar macht (mit Gewitter), aber in Bad Landeck sich im Druckgang — ebensowenig wie die erste — manifestiert. In Breslau bringt der zweite Vorläufer ein Gewitter, das den Temperaturanstieg kräftig, aber nur für kurze Zeit unterbricht, während in Landeck nur mehr leichte Böen im Temperaturgang nachweisbar sind. In Habelschwerdt, Proskau, Gleiwitz findet man vor dem Eintreffen der großen Böe überhaupt keine Störungen. Der Druckstufe der großen Böe geht hier und auf der Schneekoppe, jedoch andeutungsweise auch bereits in Frankfurt a. O.,

langsamer Druckanstieg voraus — ein Anzeichen dafür, daß hier im äußersten Südosten Norddeutschlands das Steiggebiet der Druckwelle dem durch den Böeneinbruch veranlaßten Druckanstieg bereits zuvorgekommen ist, worauf auch der etwas anders verlaufende, gemilderte Ablauf des großen Böeneinbruches zurückzuführen sein dürfte; ein großer Teil Schlesiens bleibt z. B. ohne Niederschlag. Man hat also folgendes Verhältnis: in Frankreich und Holland erfolgt der Kaltlufteinbruch im Fallgebiet der Druckwelle; in Deutschland erfolgt der Einbruch ozeanischer kalter Luft aus NW ebenfalls bei fallendem Druck, und erst das Hereinrücken des Steiggebietes der Druckwelle setzt die eingedrungenen Kaltluftmassen ostwärts als Böensturm in Bewegung; im Südosten Deutschlands erfolgt der Kaltlufteinbruch erst im Steiggebiet

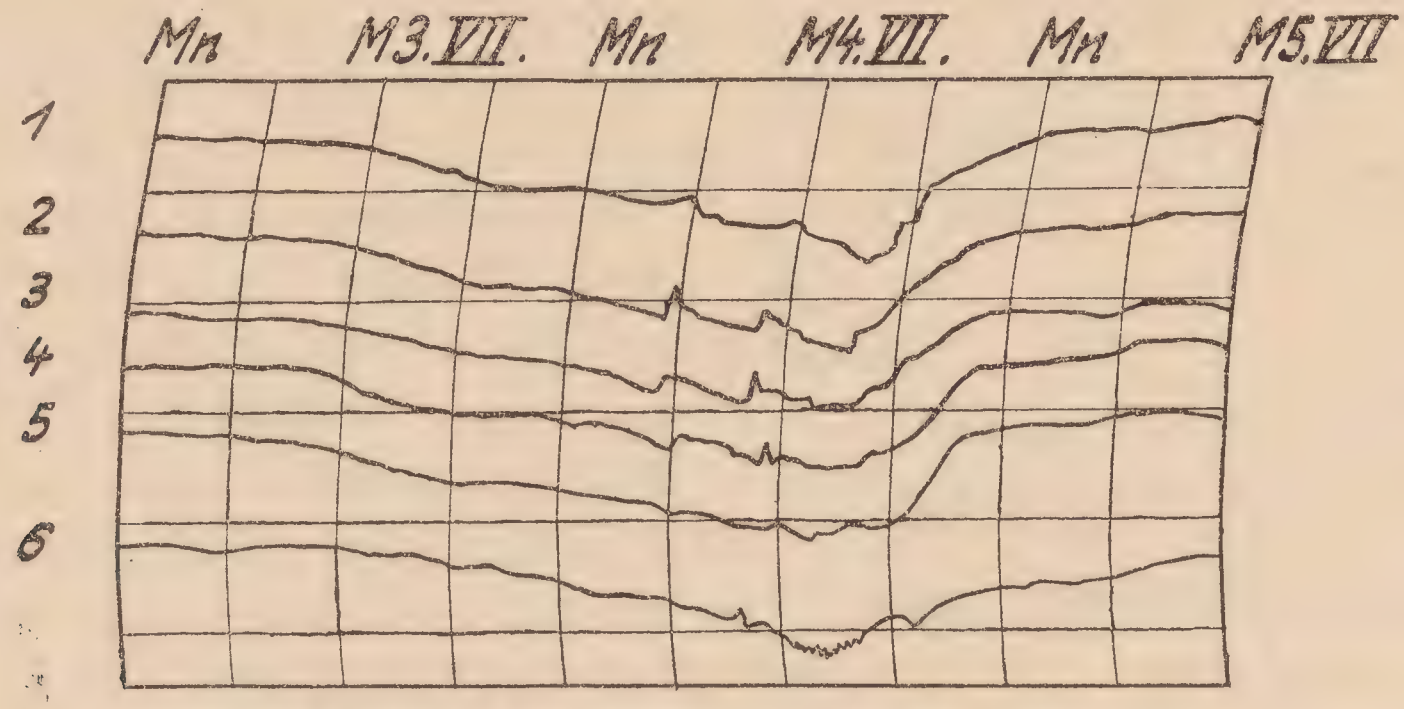


Fig. 17.

der von Südwest nach Nordost fortschreitenden Druckwelle[1]. Die beiden Vorläufer aber sind vermutlich erzeugt durch tropfenartig sich abspaltende Kaltluftmassen, die ostwärts rasch dem wärmsten Gebiet (Schlesien) zuwandern, sich aber im eigentlichen Tieflande im Temperaturgang der Bodenschichten fast gar nicht, vermutlich aber in höheren Schichten auswirken, worauf Druckgang, Niederschlag und Windwechsel hinweisen.

Hinzuweisen ist auf den Druckgang auf dem Brocken (Fig. 15); hier fehlen die Druckstörungen der Vorläufer, und der Druckfall ist, namentlich in den Stunden unmittelbar vor Einbruch der großen Böe, bemerkenswert rasch und kräftig, so daß die Amplitude der komplexen Druckwelle größer wird als in den Niederungsstationen der Nachbarschaft (Kassel, Weimar). Hier kann man den Ansatz zu zyklonaler Wirbelbildung vermuten, die in-

[1] Es mag ebenfalls dem von SW herannahenden Steiggebiet der Druckwelle zuzuschreiben sein, daß zwar noch die Vorläufer stellenweise, wenn auch nur schwach über die Mittelgebirge nach Süddeutschland übergriffen (mit Gewitterbildung und Starkregen), aber nicht mehr die an sich viel mächtigeren Kaltluftmassen der großen Böe. So meldet z. B. Bad Kissingen: »Am 4. Juli früh gegen 2^h hat sich hier ein leichtes, lokales Gewitter entladen. Zwischen 5 und 6^h früh ist außerdem ein starker, wolkenbruchartiger Regen niedergegangen. Nach 6^h sind weder Gewitterzüge noch sonstige atmosphärische Störungen aufgetreten.« Die erwähnten Störungen fallen zeitlich mit dem Vorüberzug der Vorläufer nördlich des Gebirges zusammen. Vom Durchzug der großen Böe war hier nichts zu merken.

folge des Einbruchs der großen Böe ein rasches Ende findet. Der Vorgang ist erwähnenswert wegen der ähnlichen, später zu behandelnden Vorgänge bei Berlin.

Die Vorgänge an der Südgrenze des betrachteten Gebietes, also die am Morgen des 4. Juli ostwärts ziehenden Böenzüge, lassen sich bei Berücksichtigung der Windverhältnisse als eine Aufeinanderfolge kleiner zyklonaler und antizyklonaler Wirbel deuten, die sich längs der von 2^h — etwa 11^h stationären Front der von NW eingebrochenen Kaltluftmassen ostwärts bewegen, allerdings nicht längs der Front der noch nicht weit genug vorgestoßenen kältesten Luftmassen. Ob kalte Luft nur zungenförmig an der Front vorstößt oder sich tropfenartig ganz ablöst, kann nicht entschieden werden. Unter ersterer Annahme würde sich für 6^h folgendes Schema ergeben:

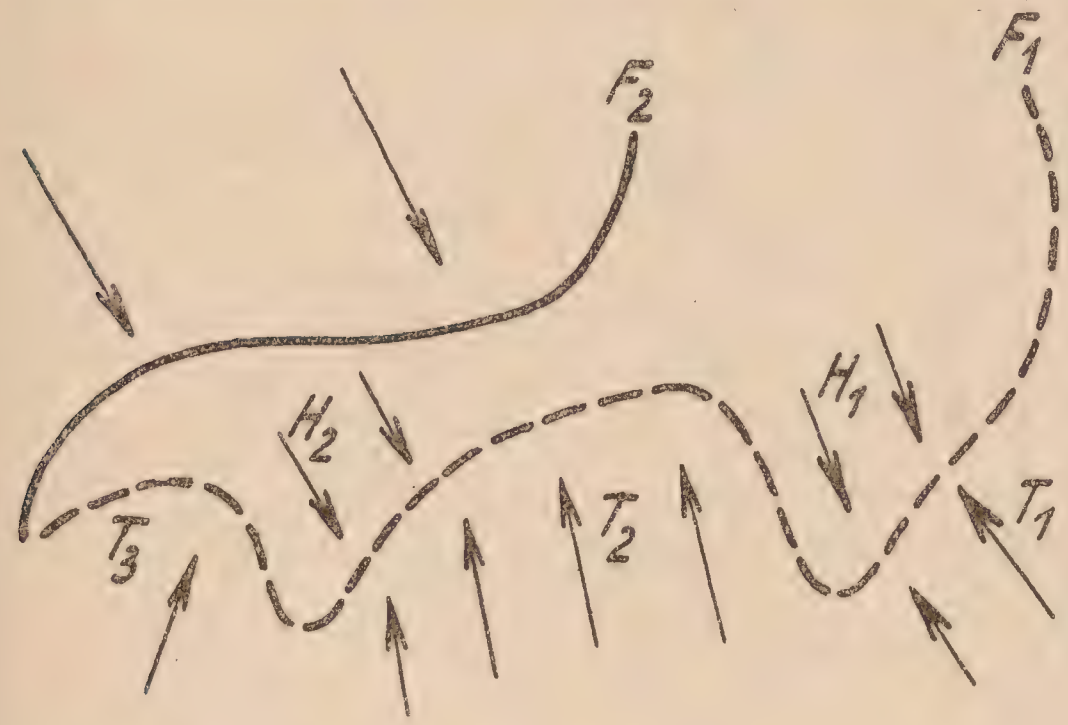


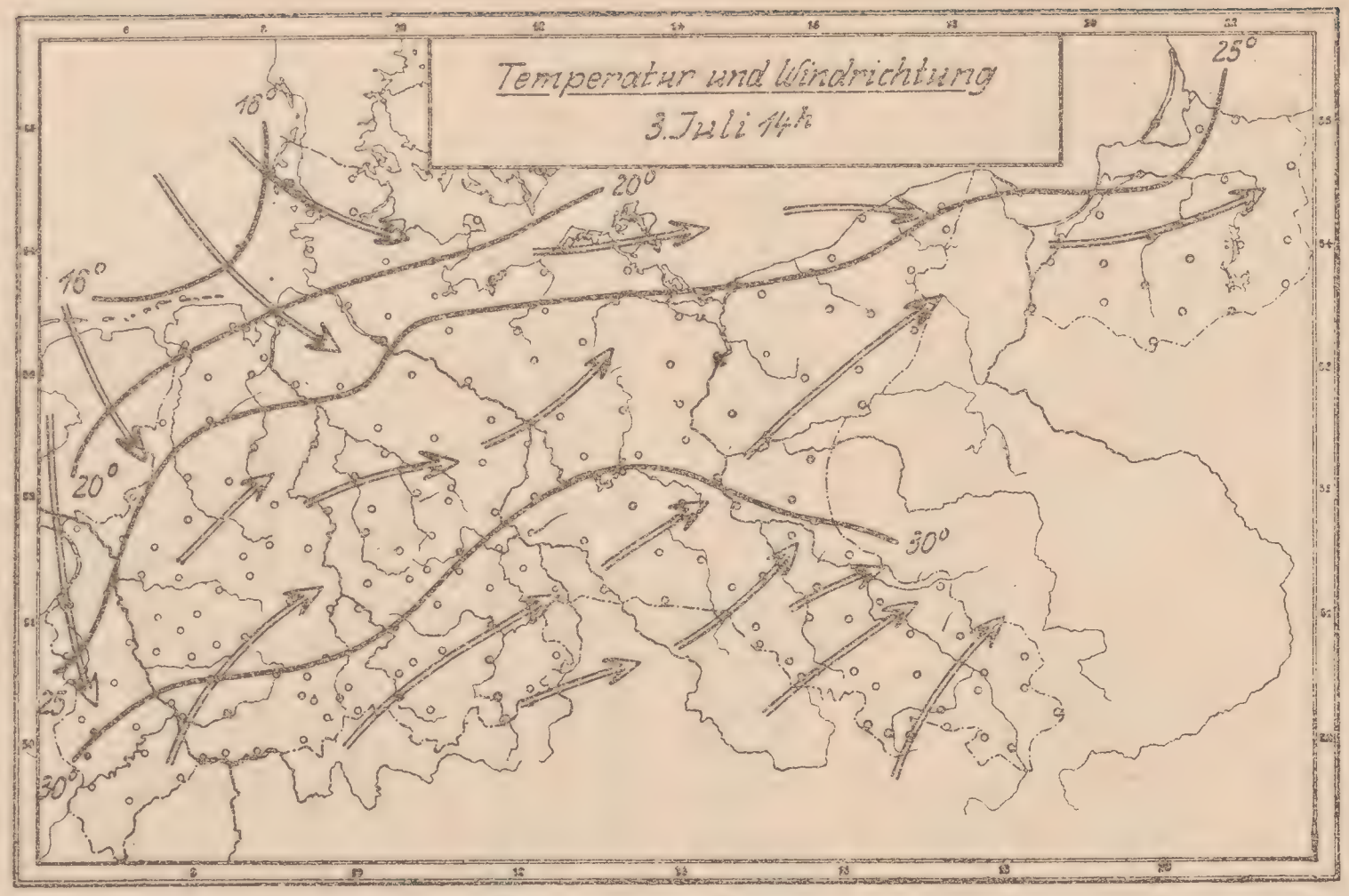
Fig. 18.

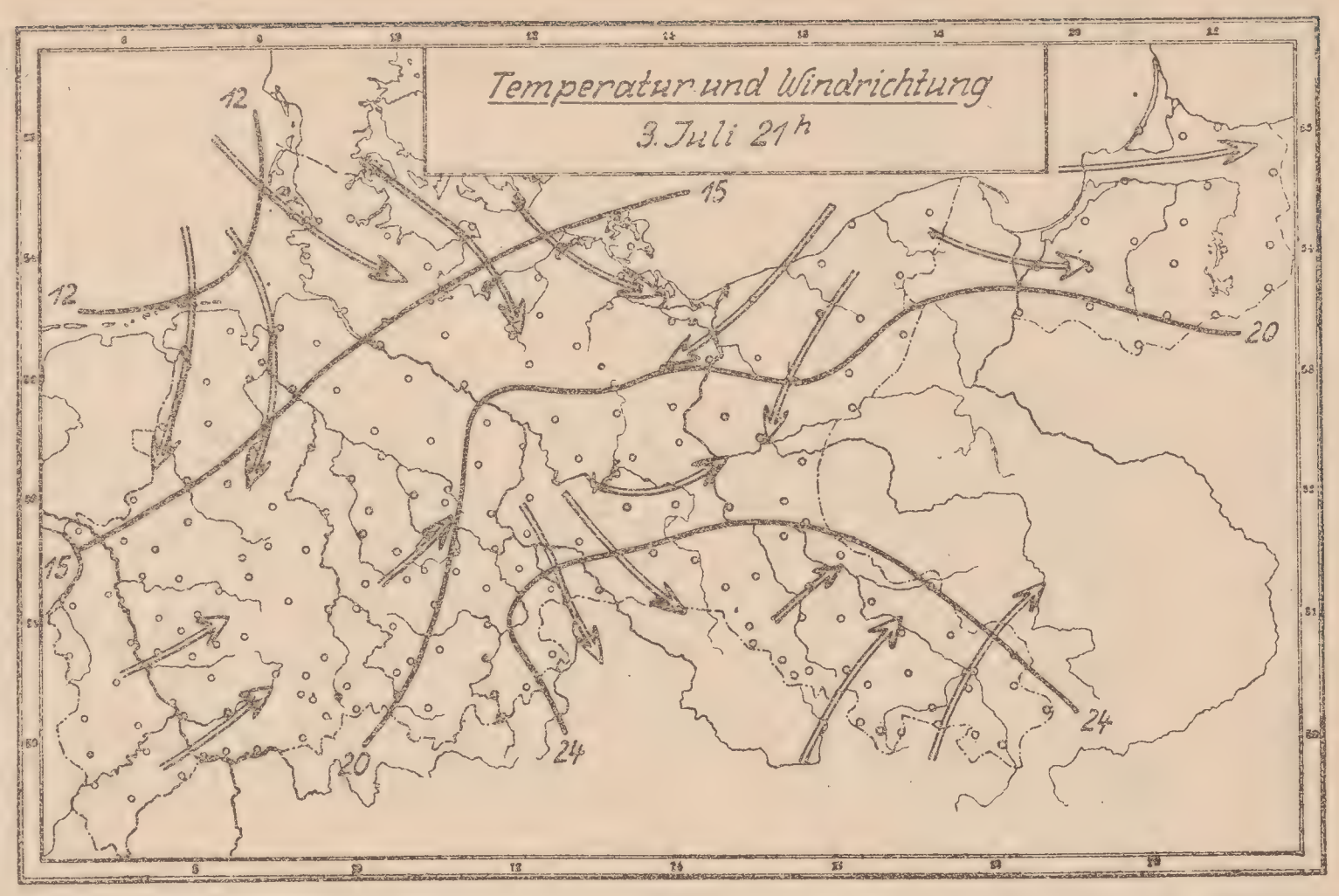
H_1 und H_2 sind ausquellende Kaltluftmassen, von NW vorstoßend. Die Deformation schreitet längs der Front F_1 fort. Die Zirkulation im Gebiet jeder ausquellenden Kaltluftmasse ist antizyklonal. Östlich jeder Ausquellstelle sinkt der Druck; man vergleiche in Fig. 15, wie der Gewitternase in Weimar, Wasserkuppe, Schmücke rascher Druckfall vorausgeht. Der Druckanstieg selbst ist wohl zum weitaus größten Teile statisch-thermisch bedingt, wenn man auch annehmen muß, daß im Gebiete derartiger antizyklonischer Wirbel die Flächen gleichen Druckes sich heben. Um 6^h liegt die erste Störung in Schlesien, die zweite in Thüringen. Den Wechsel von Warm und Kalt bei Durchzug des Störungssystems zeigen aber nur die höher gelegenen Stationen; die Niederung ist durch ein Kaltluftpolster geschützt. Doch zeigen die Druckänderungen auch in der Tiefebene an (rascher Druckfall in Berlin), daß in der Höhe nach Durchzug der ersten Störung südlicher Wind weit nach Norden durchgreift und die Front zurückdrängt. Das Ausquellen einer Kaltluftmasse schafft ja immer günstige Bedingungen für das Vordringen von Warmluft in entgegengesetzter Richtung. Über die Vorgänge, die das Ausquellen der Kaltluft herbeiführen, kann man zuverlässig nichts aussagen. Daß der Harz die Ausbreitung der eingedrungenen ozeanischen Kaltluft wie eine in das Tiefland vorspringende Bastion hemmt und einen Knick im Frontverlauf herbeiführt, wurde bereits erwähnt. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß das Ausquellen von der Weser her über die breite Einsenkung zwischen Harz im Norden und Thüringerwald im Süden erfolgt bzw. daß hier die orographischen Verhältnisse das Ausquellen der Kaltluft begünstigen. In diesem Gebiete werden auch die Druckstörungen sehr ausgesprochen.

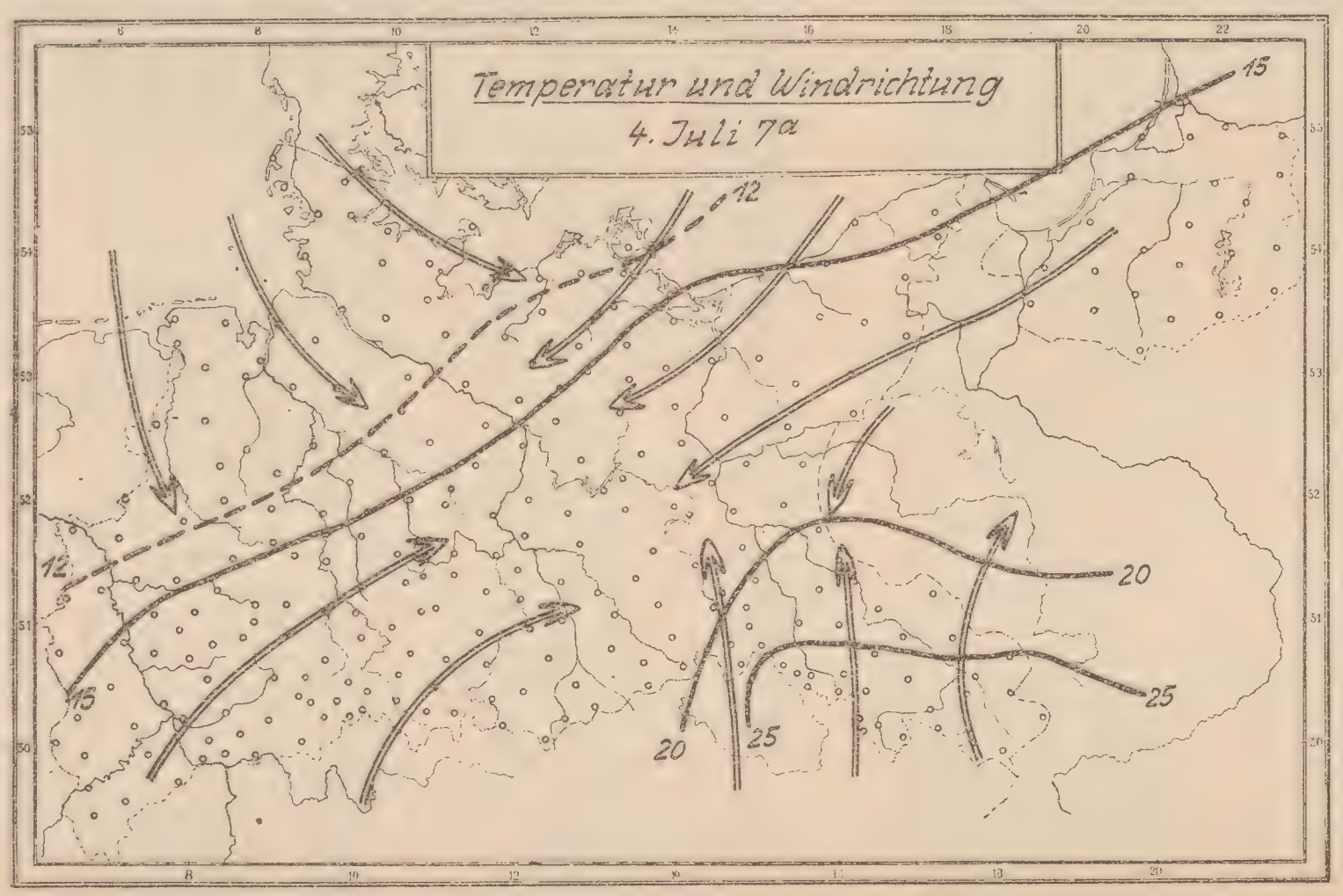
8. Die Temperaturverteilung und die Windrichtung über Norddeutschland.

Mit Hilfe aller verfügbaren Beobachtungen wurden für 4, für den Ablauf des ganzen Sturmes charakteristische Termine die Temperaturverteilung für Norddeutschland ermittelt und durch Isothermen dargestelllt (Fig. 19). In den Kärtchen ist auch die Windrichtung durch Pfeile angezeigt.

Am 3. Juli um 14^h hat der Süden des betrachteten Gebietes bei vorwiegend südwestlichen Winden Temperaturen über 30°. Nach Norden nimmt die Temperatur langsam, nach Nordwest rasch ab. An der Nordseeküste beginnt gerade der Einbruch ozeanisch kalter Luft, die im äußersten Westen, aus den verhältnismäßig kühl gebliebenen Niederlanden, wenigstens temporär schon weiter nach Süden eingebrochen ist und z. B. gerade zur Zeit des Termins in Aachen ein Gewitter verursacht. Ob die später am Rhein und


Temperatur und Windrichtung
3. Juli 14h
10°
20°
25°
15°
20°
30°
25
30


Temperatur und Windrichtung
3. Juli 21h
12
15
20
12
15
20
24
24


Temperatur und Windrichtung
4. Juli 7a
15
12
12
20
25
15
20
25

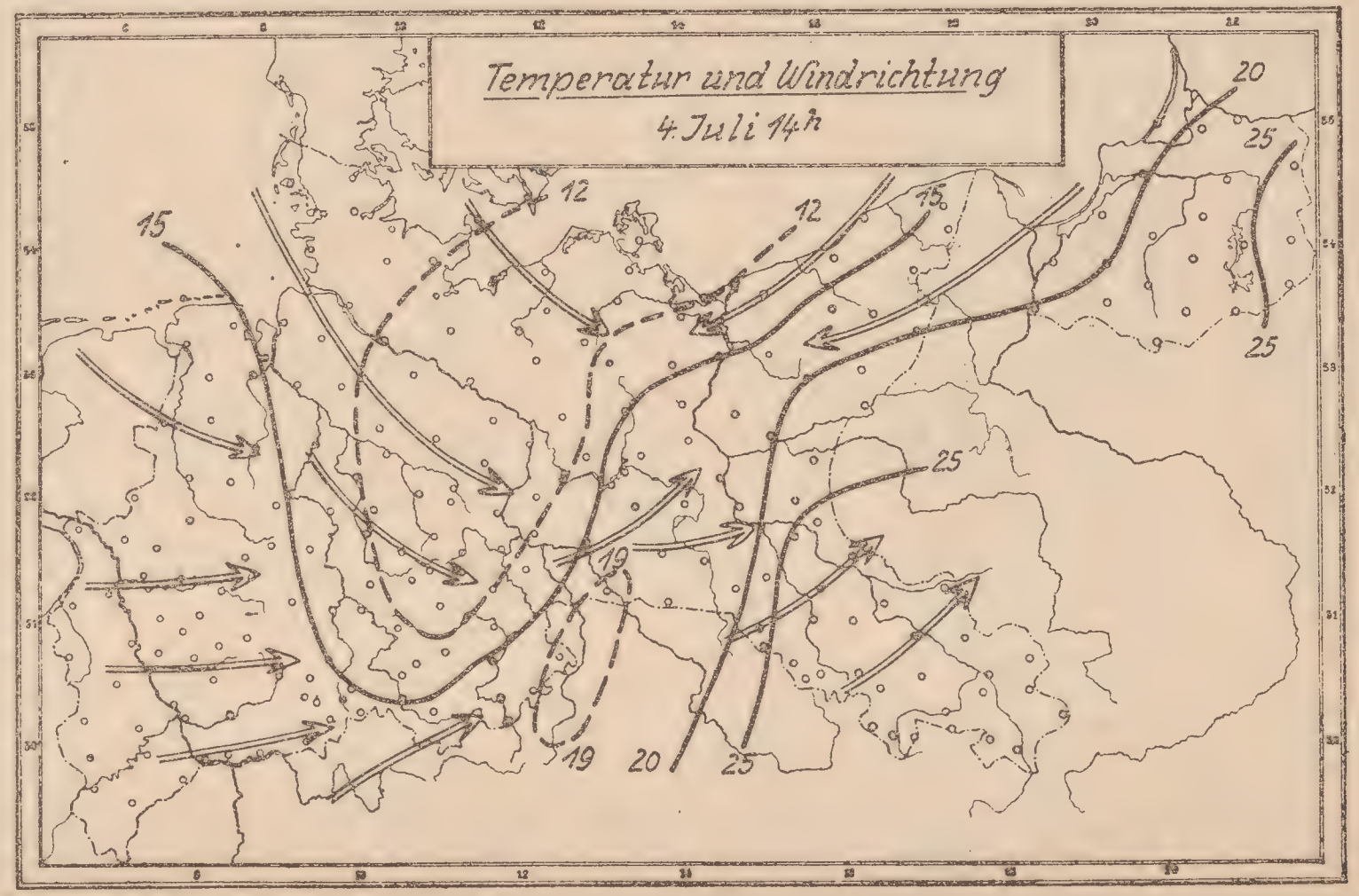

Temperatur und Windrichtung
4. Juli 14h
20
25
12
12
15
15
25
25
19
19
20
25

Fig. 19.

östlich des Rheins einsetzende Gewittertätigkeit damit zusammenhängt, kann nicht entschieden werden.

Bis 21^h hat sich die ozeanische Luft nach Süden und Osten ausgebreitet. Stärkere Abkühlung hat auch der W erfahren, wo zahllose Gewitter niedergegangen sind, aber Südwestwind weht. In Schlesien ist es noch sehr warm bei Südwest, während an der Ostseeküste sich NE landeinwärts entwickelt hat, der ebenfalls verhältnismäßig kühl ist. Während die Front der von NW eingebrochenen Nordseeluft ungefähr längs der 15°-Isotherme verläuft, verläuft längs der 20°-Isotherme eine sekundäre, nicht einheitliche Front, die das noch warme Gebiet im Westen gegen das Südwestwindgebiet, im Norden gegen das Nordostwindgebiet abgrenzt. Die Wolkenbildungen dieser Front waren von Berlin aus im NW sichtbar. Im warmen Gebiet, und zwar im Gebiet der mittleren Elbe, findet man vielfach Nordwestwinde, deren Herkunft und Entstehung schwer zu deuten ist. Im ganzen ergibt sich gegenüber 14^h eine deutlicher werdende zyklonale Gruppierung der Luftströmungen.

Am 4. Juli um 7^h hat man die Verteilung unmittelbar vor Einbruch der großen Böe. In Schlesien noch sehr warme Südwinde, im Südwesten kühle Südwestwinde, im Nordwesten die weit hereingedrungene kalte Nordseeluft mit 10—12°, im Nordosten, nunmehr sehr ausgesprochen und kräftig, einen breiten Nordoststrom, der Luftmassen von einer Temperatur zwischen 15 und 20° transportiert. Da die Druckgradienten — vgl. Fig. 20 — um 7^h, vom Westen abgesehen, noch sehr klein sind, sind auch die Windgeschwindigkeiten noch mäßig, wenigstens im Tiefland; in den hochgelegenen Stationen sowohl des Westens wie Ostens hat man teils südwestliche, teils (in Schlesien) südliche Winde von Stärke 4—7. Alle Strömungen konvergieren fast radial gegen das mittlere Norddeutschland, also gerade gegen das Gebiet, in dem der Druck sich später überraschend und sehr kräftig vertieft. Um das Windsystem als ausgesprochen zyklonal anzusehen, dazu ist die Ablenkung der einzelnen Strömungen noch zu gering.

Um 14^h ist die Entwicklung der großen Böe auf dem Höhepunkt und hat gerade das mittlere Norddeutschland erreicht. Schlesien ist, nunmehr mit südwestlichen Winden (Schneekoppe SW 10), noch immer sehr warm. Die von Nordwest eingebrochene ozeanische Kaltluft liegt als nahezu abgeschlossener Kaltluftkörper zwischen Ostsee und Thüringen und ist — veranlaßt durch das Steiggebiet der Druckwelle — nunmehr im raschesten Vorstoß gegen Osten. Zahlreiche Stationen melden bei Einbruch der Böe Windstärken von 8—10, und selbst der südöstlich von Berlin verlaufende Südweststrom ist sehr kräftig (Stärke 4—5). Ein verhältnismäßig warmes, kleines Gebiet von 19° im östlichen Thüringen und Sachsen ist darauf zurückzuführen, daß in einer Reihe von Stationen einem ersten Temperatursturz rasche Erwärmung folgt, worauf erst die endgültige Abkühlung einsetzt. In Fig. 9 kennzeichnet die Kurve für Erfurt diesen Stationstypus.

Bis 21^h ist ganz Deutschland, vom äußersten Nordosten abgesehen, abgekühlt mit Temperaturen zwischen 11° und 15°, so daß sich eine Isothermenkarte erübrigt.

Die ganze Entwicklung bietet das Bild eines von W, N und NE erfolgenden Angriffes kalter Luft auf ein sehr warmes Gebiet, wobei zuletzt die von Nordwest eingebrochene kälteste Luft die Hauptfront bildet. Bemerkenswert ist der Übergang eines fast einheitlichen Südweststromes in ein zyklonales System. Es ist selbstverständlich, daß die starken, warmen Winde, die an allen hochgelegenen Stationen beobachtet und erst durch die große Böe verdrängt werden, vor Eintritt der großen Böe sich in der Höhe weit in das in den tiefen Schichten bereits abgekühlte Gebiet ausbreiten müssen.

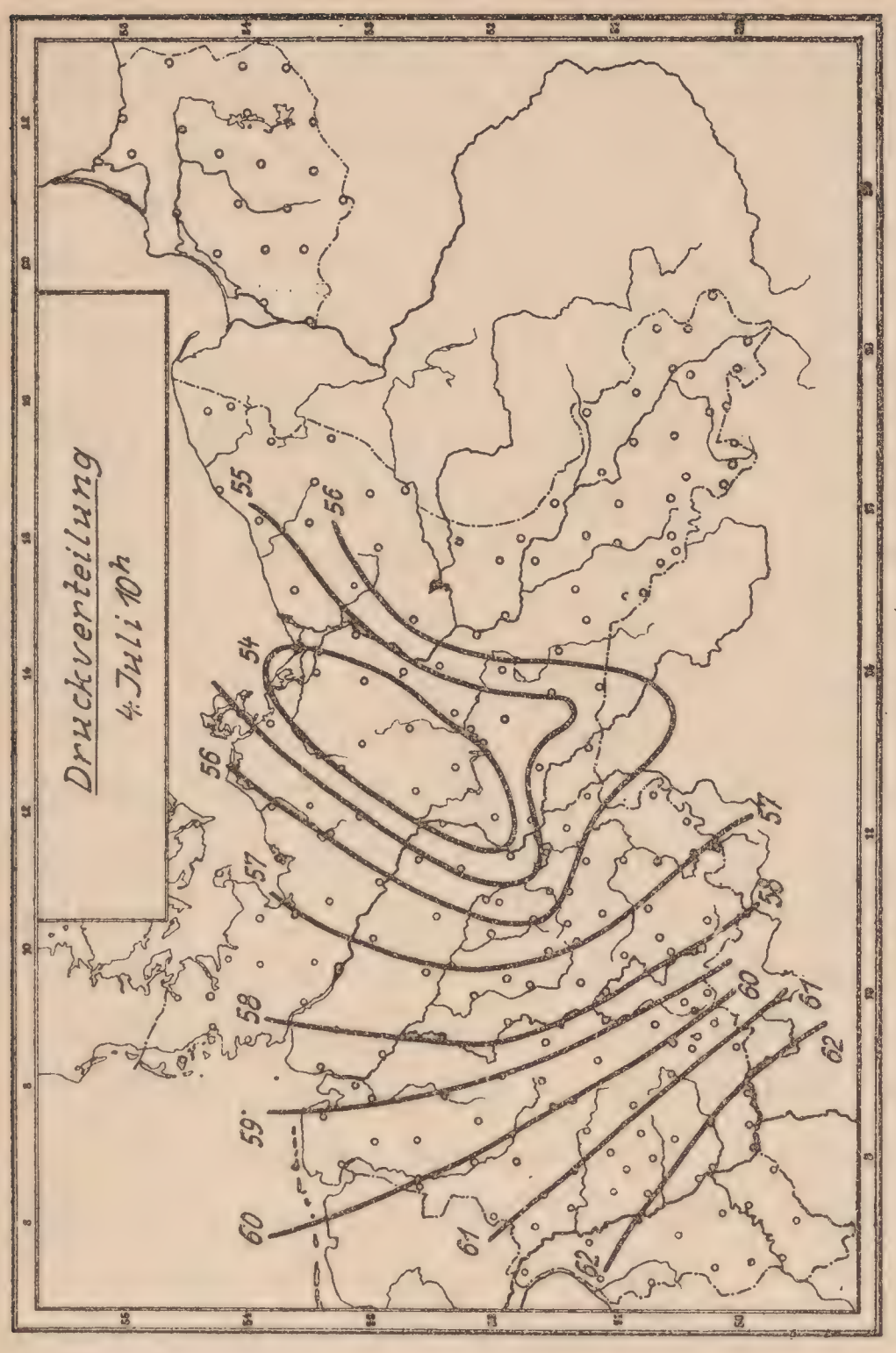
Die Ausbreitung der großen Böe ging durchaus nicht in der Richtung gegen das wärmste Gebiet (Schlesien) am raschesten und kräftigsten vor sich, sondern in der Richtung gegen Ostpreußen, wo schon vor Einbruch der Böe verhältnismäßig kühle Nordostwinde herrschend gewesen waren. Die Annahme, daß der Einbruch der Kaltluftmassen der Böe gegen das Gebirge, also durch das steigende Gelände gehemmt worden ist, liegt an sich nahe. Ich bin aber der Meinung, daß die kalten Massen durch das Steiggebiet der von Südwest nach Nordost wandernden Druckwelle gegen Nordosten gedrängt und durch dieses Steiggebiet nicht nur in Bewegung gesetzt, sondern auch gesteuert worden sind.

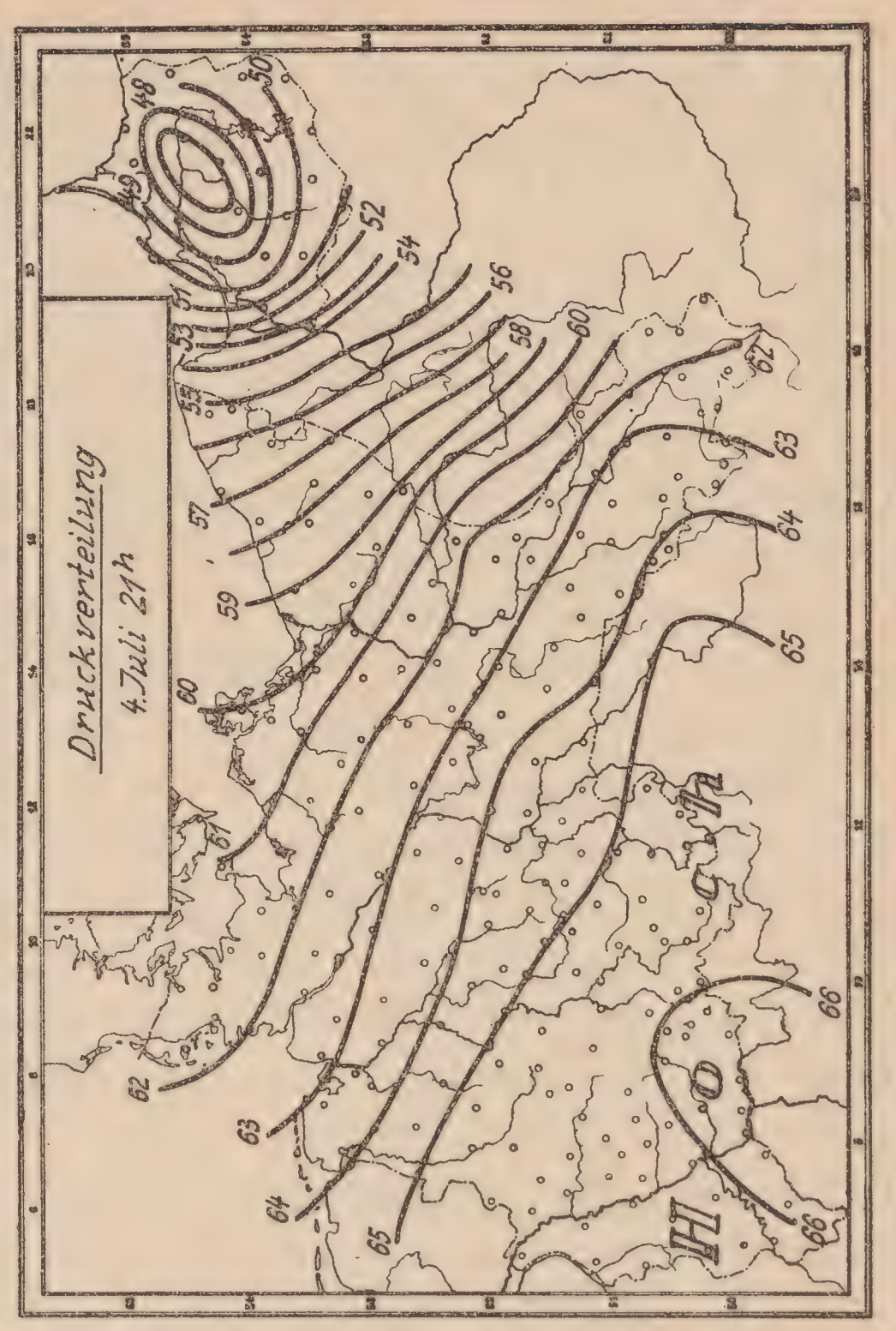
9. Druckverteilung über Norddeutschland am 4. Juli.

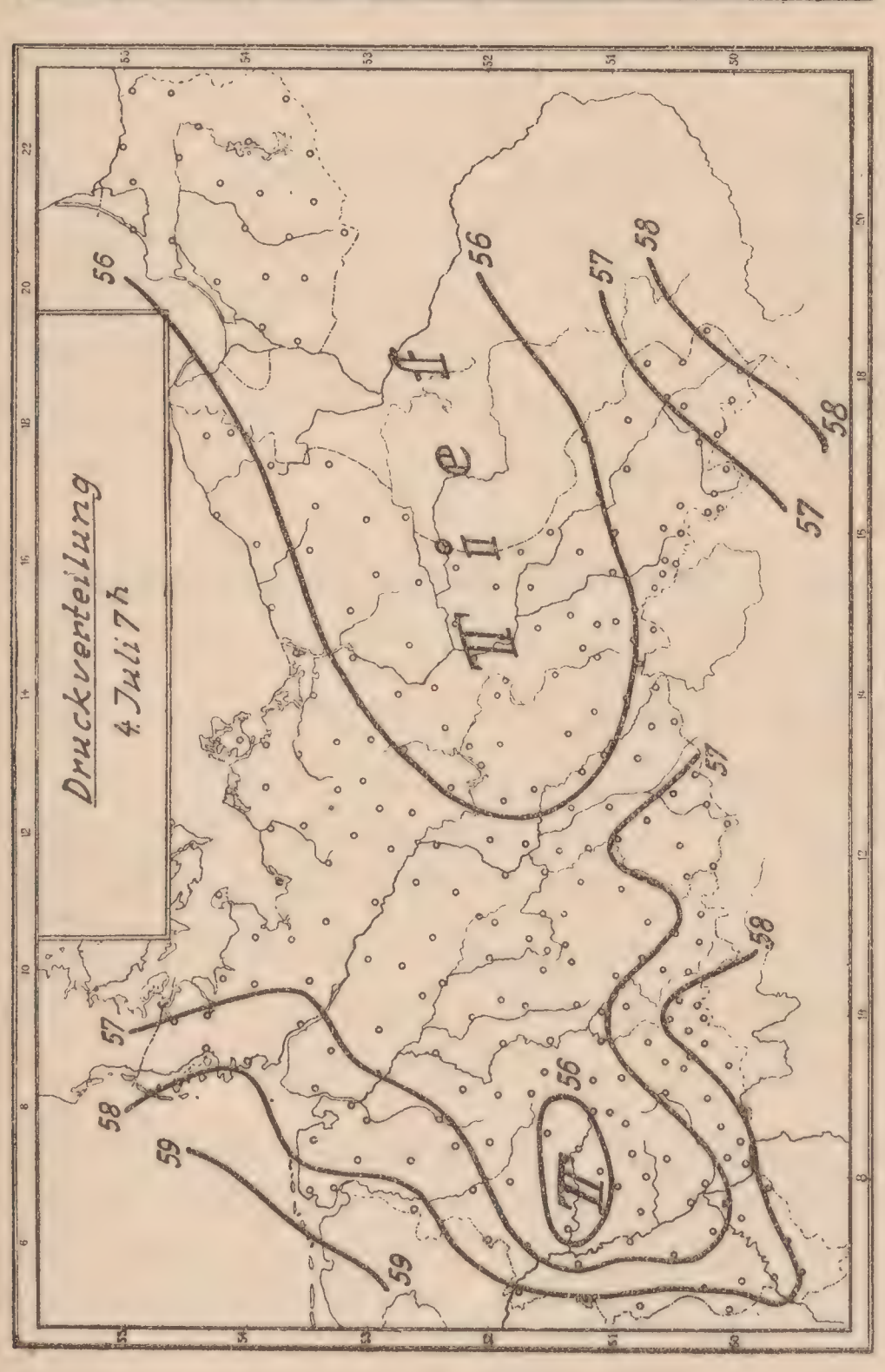
Die früher mitgeteilten Wetterkarten (Fig. 1) lassen Einzelheiten der Druckentwicklung über Norddeutschland nicht erkennen. Es wurden deshalb mit Hilfe möglichst zahlreicher Stationsbeobachtungen und Registrierungen die in Fig. 20 dargestellten Isobarensysteme konstruiert.

Am 4. Juli um 7^h — Beginn der großen Böe im Rheingebiet — liegt ein umfangreiches, aber sehr flaches Tief im Osten; stärkere Gradienten werden nur im Westen gefunden, wo auf der Rückseite einer kleinen, aber nicht sehr tiefen Depression der Druck rasch steigt. In dieser Depression erfolgt nach meiner Auffassung der Übergang vom Fall- zum Steiggebiet der Druckwelle. Die Hauptmasse des späteren Böensystems ist jedoch östlich dieser Depression bereits von NW bis an den Rand der Mittelgebirge vorgedrungen, aber stationär (inaktiv) geworden. In diesem Stadium findet man bereits das früher geschilderte, gegen das mittlere Norddeutschland fast radial konvergierende Windsystem.

Nach 3 Stunden, um 10^h, hat man bereits eine umfangreiche, leicht vertiefte Depression von der Ostseeküste bis zu den Mittelgebirgen herab, auf deren Rückseite sich überraschend schnell starke Gradienten entwickelt haben, da jetzt der Druckeffekt der in Bewegung geratenen Kaltluftmasse und Steiggebiet der Druckwelle sich kombinieren. Der Isobarenverlauf zeigt deutlich, daß der Druckanstieg von Südwesten ausgeht, also wesentlich auch durch das Steiggebiet der Druckwelle bestimmt sein muß. Die Vertiefung der Depression kann man sich dadurch erklären, daß — im Gegensatz zu 7^h — auf der Rückseite besonders kalte, auf der Vorderseite besonders warme Luft (von Schlesien her) zufließt, worauf ja auch der markante Druckfall nach Durchzug der ersten Vorböe hinweist.


Druckverteilung
4. Juli 10h
Tiefe
Hoch


Druckverteilung
4. Juli 21h
Hoch


Druckverteilung
4. Juli 7h
Tiefe

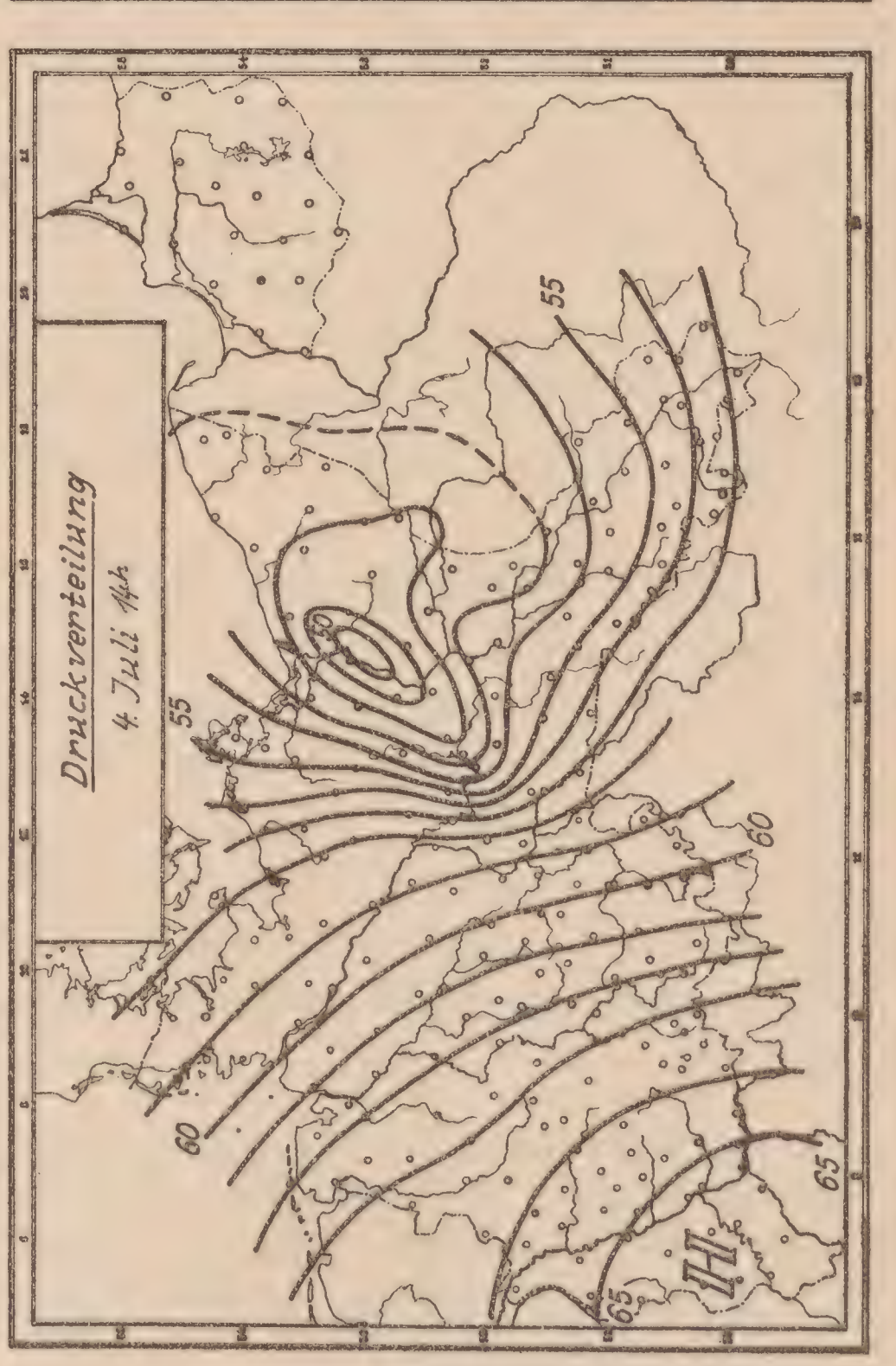

Druckverteilung
4. Juli 14h
Hoch

Fig. 20.

Um 14^h ist der Böensturm im mittleren Norddeutschland in höchster Entwicklung. Der Kern der Druckdepression — jetzt eine richtige Zyklone — liegt bei Stettin und hat sich äußerst rasch vertieft (750 m). Diese Zyklone hat sich aber nicht im nördlichen Teil der um 10^h vorhandenen Depression entwickelt, sondern das Zyklonenzentrum hat sich westlich von Berlin, zwischen Magdeburg und Berlin, ausgebildet. Um 1^h liegt das Zentrum (748 mm) gerade zwischen Potsdam und Berlin und zieht dann gegen NE, an Umfang gewinnend und ohne Neigung, sich auszufüllen. Im mittleren Norddeutschland hat sich die Depression in eine äußerst ausgeprägte, dauerhafte Zyklone umgewandelt. Weiterer Druckanstieg von SW her ist zu konstatieren, wie ja, im großen betrachtet, der ganze Fall nichts ist als ein Vorstoß des Azorenhochs, das eine Druckwelle aussendet. Bemerkenswert ist der östlich Berlins vorspringende Keil hohen Druckes, über dessen Herkunft im nächsten Abschnitt zu sprechen ist. Es ist wahrscheinlich, daß das Zentrum der Zyklone umfangreicher und tiefer ist, als es dargestellt wurde; aber eine genauere Konstruktion ist mangels zahlreicherer Beobachtungen nicht möglich. Bis 21^h ist die Zyklone und mit ihr die große Böe bis Ostpreußen gewandert. Im Südwesten liegt hoher Druck, der bis zum folgenden Tage eine abgeschlossene, über Mitteleuropa lagernde Antizyklone bildet. Die Ausbreitung der Druckwelle von SW her bewirkt, daß in Schlesien die Kaltluftmassen später eintreffen als das Steiggebiet der Druckwelle, was den gehemmten und stark abweichenden Verlauf des Böeneinbruches in Schlesien erklären könnte.

Die Umgestaltung einer wenig tiefen Depression in eine ausgesprochene Zyklone ist dadurch bewirkt, daß eine von SW zuwandernde Druckwelle im mittleren Norddeutschland Verhältnisse vorfindet, die einer raschen Vertiefung günstig sind: Im Osten Zufluß sehr warmer Luftmassen, die das zuerst eintreffende Fallgebiet der Depression verstärken oder mindestens konservieren, während das Steiggebiet eine bereits vorher eingedrungene Kaltluftmasse vorfindet und in Bewegung setzen kann. Spezielle Verhältnisse scheinen außerdem in der Gegend zwischen Magdeburg und Berlin zu einer besonders starken Vertiefung der Zyklone geführt zu haben.

10. Die Vertiefung der Zyklone im mittleren Norddeutschland.

Bereits bei Betrachtung der Druckregistrierungen der Fig. 15 ergibt sich, daß der Druckverlauf in Berlin knapp vor Einbruch der großen Böe nicht unerheblich von dem Verlaufe der übrigen Stationen abweicht. Etwa $^3/_4$ Stunden vor dem Einbruch der Kaltluft fällt der Druck um etwa 2 mm und bleibt zunächst auf dem niedrigen Stande, worauf der Druckanstieg der großen Böe einsetzt. In Fig. 21 sind Registrierungen des Sprungschen Waagebarographen für Berlin, Potsdam und Magdeburg mitgeteilt, die alle Einzelheiten des Druckganges erkennen lassen[1]. In Magdeburg ist die er-

[1] Man sieht hier auch in den Morgenstunden den raschen, stufenartig verlaufenden Druckfall nach Durchzug des ersten Vorläufers, der die drei Stationen nicht unmittelbar berührt. Aber nach Durchzug der Vorböe wird durch SE-Wind kalte Luft zurückgedrängt, so daß wohl nur ein dem Boden aufliegendes Kaltluftkissen zurückbleibt; auch eine um 6^h über Lindenberg aerologisch ermittelte Inversion in etwa 500 m Höhe weist auf die angedeutete Entstehung der »negativen« Druckstufe hin.

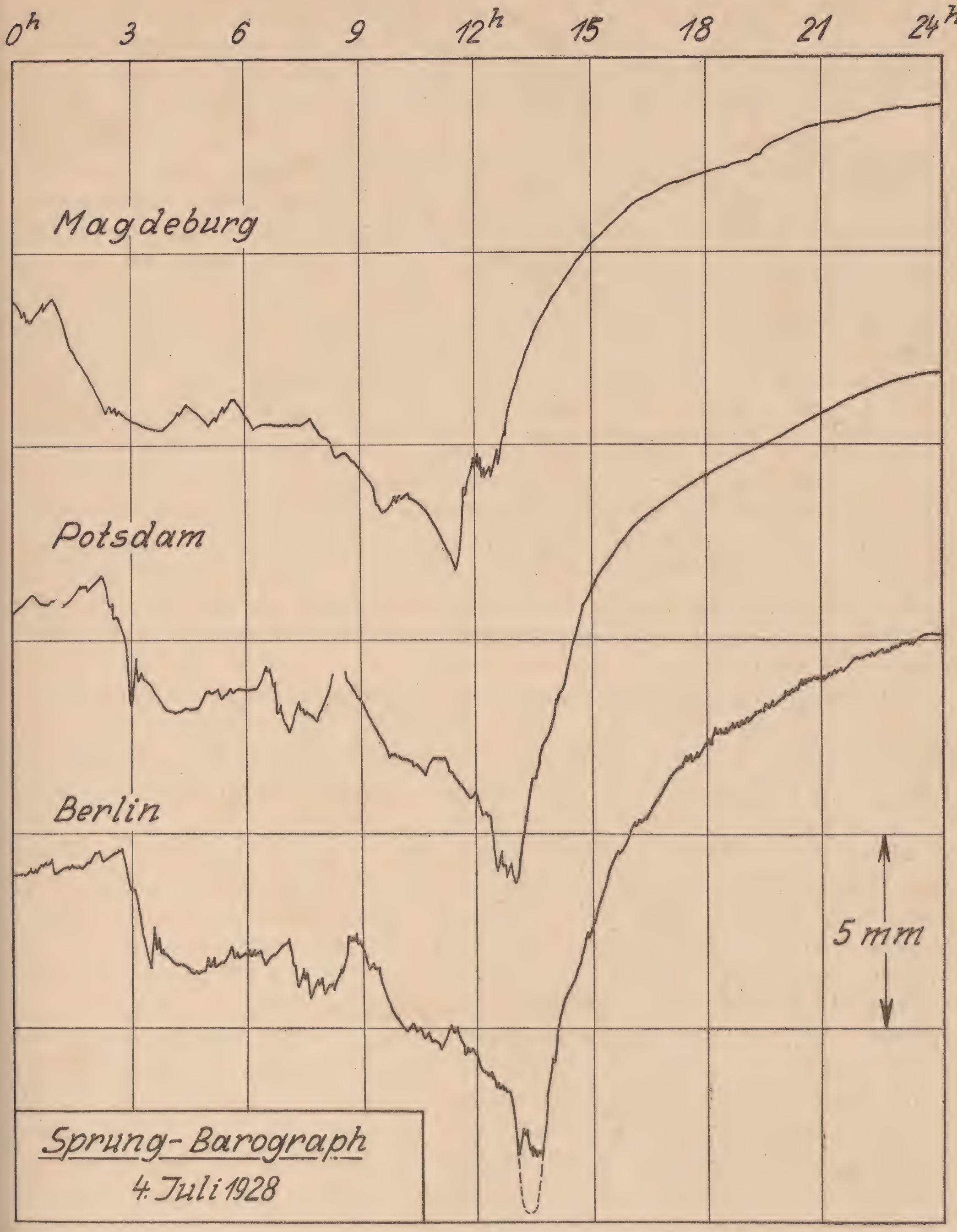


Fig. 21.

wähnte Einkerbung nur angedeutet, dafür ist aber der Druckanstieg durch eine Pause unterbrochen, die sich weiter östlich nicht findet. Potsdam und Berlin stimmen in allen wesentlichen Punkten überein; der rasche Druckfall setzt in Berlin um etwa 20 Minuten später ein als in dem 28 km entfernten Potsdam. Man hat es mit einem für Wirbelbildung charakteristischen Druck-

verlauf zu tun; die volle Entwicklung des Wirbels scheint aber durch den Kaltlufteinbruch gehemmt worden zu sein. An eine lokale Bildung von beschränkter Lebensdauer zu glauben, liegt nahe. Aber einerseits findet man bereits in Magdeburg den Ansatz zu diesem Druckgebilde, und die in Fig. 15 wiedergegebene Registrierung des Brocken, die bereits früher als Ausnahmefall erwähnt wurde, läßt ebenfalls einen Zusammenhang mit der späteren Gestaltung bei Berlin erkennen. Wenn diese nicht streng beweisbare Annahme richtig ist, so würde der Wirbel in etwa 2 Stunden vom Brocken nach Berlin (205 km) gewandert sein. Andererseits geht gerade in dem Gebiet Magdeburg–Berlin die früher betonte, auffällige Vertiefung der Depression und die Umbildung in eine sehr ausgeprägte und lebenskräftige Zyklone vor sich. Besonders mit Rücksicht auf die letztere Tatsache verlohnt sich eine eingehendere Untersuchung, selbst auf die Gefahr eines nicht zweifelfreien Resultates hin. Der Umstand, daß in den ganzen Berliner Registrierungen kein Gegenstück zu finden ist, darf nicht dazu verführen, dieses Druckgebilde als wenig typisches Kuriosum zu behandeln. Es ist durchaus möglich, daß derartige Bildungen recht häufig vorkommen und für die Umbildung von Zyklonen sehr wichtig sind. Bei ihrem geringen Durchmesser wird es aber nur sehr selten vorkommen, daß sie gerade über eine Station mit Druckregistrierung hinwegziehen. Daß in diesem Fall drei sogar mit Waagebarographen ausgerüstete Stationen berührt wurden, ist ein sehr glücklicher Zufall.

Die Wirbelbildung steht zeitlich in unmittelbarer Beziehung zur Kaltfront des großen Einbruches. In Magdeburg und Potsdam zeigen die Anemographen fast unmittelbaren Übergang von schwachem SSE zu stürmischem WNW und NW. In Potsdam wurde beim Einbruch der Kaltluft eine Geschwindigkeit von 38 m/sek. registriert. Geht man von der Annahme aus, daß es sich erstens um eine Wirbelbildung handelte und daß zweitens der Druckanstieg nach dem Böeneinbruch sich teils durch den Druckeffekt des letzteren, teils durch das Steiggebiet der zugewanderten primären Welle bedingt ist, so kann man für den Druckverlauf in Berlin folgende Erklärung versuchen: Eine aus unbekannten Gründen erfolgte Wirbelbildung erniedrigt im Gebiete von Berlin den Druck sehr rasch und verstärkt dadurch das Fallgebiet der Druckwelle. Der Druck würde noch tiefer sinken, der gestrichelten Linie der Berliner Registrierung entsprechend, wenn nicht Kaltluft einbrechen würde. Letztere verhindert das weitere Sinken des Druckes, der etwa $^3/_4$ Stunden — stark schwankend — fast konstant bleibt, bis das Steiggebiet der Druckwelle und mit ihm die Hauptmasse der kalten Luft hereinbricht, der auch die Rückseite des kleinen Wirbels angehört. Erst jetzt wirkt alles in der Richtung steigenden Druckes zusammen: Kaltlufteinbruch, Steiggebiet der Druckwelle und Rückseite des Wirbels. Die Wirbelbildung in Magdeburg wird durch den früher einsetzenden Kaltlufteinbruch in einem früheren Entwicklungsstadium abgeschnitten, aber es ist sehr wohl denkbar, daß die erwähnte Pause im Druckanstieg durch Wirbelbildung in der Höhe erzeugt ist und in diesem Falle dem Druckverlauf in Potsdam–Berlin zur Zeit niedrigsten Druckes entsprechen würde. Auch auf

dem Gipfel des Brocken ist eine derartige Unterbrechung nach dem ersten, starken Druckanstieg vorhanden. Aber angesichts des dürftigen Beweismateriales darf man nicht als bewiesen betrachten, daß ein im Brockengebiet entstandener oder zuerst nachweisbarer Wirbel über Magdeburg nach Berlin gezogen ist.

Wichtiger scheint die Frage, ob sich im mittleren Norddeutschland besondere, für die Ausbildung eines derartigen Wirbels günstige Bedingungen nachweisen lassen. Man wird dabei zunächst an Störungen im Frontverlauf denken, weil eine Suche in anderer Richtung von vornherein wenig aussichtsreich erscheint. In der Tat läßt sich nun gerade im mittleren Norddeutschland eine auffällige Störung in der Entwicklung der vorrückenden Kaltfront nachweisen, wobei nur ungewiß bleibt, ob diese Störung Ursache oder Folge der Zyklonenbildung ist. Auf eine in der Luftdruckverteilung sich ausprägende Begleiterscheinung wurde bereits hingewiesen: Um 10^h bereits angedeutet, um 14^h in voller Entwicklung dringt auf der Südostseite der Zyklone ein Keil hohen Luftdruckes (Achse SW—NE) ein, der vermuten läßt, daß hier kalte Luftmassen auf die Vorderseite der Zyklonen übergetreten, also den im Norden vorstoßenden Massen in östlicher Richtung vorausgeeilt sind. Daß es tatsächlich der Fall gewesen ist, kann man aus den Thermogrammen unschwer herauslesen. In Fig. 9 ist Erfurt als charakteristisch für eine Anzahl von Stationen angeführt, in denen der Einbruch der großen Böe sich in zwei Stufen vollzieht, die durch Erwärmung voneinander getrennt sind und von denen die erste die Temperatur bis etwa 15—16° erniedrigt. Im Gegensatz hierzu erfolgt in Magdeburg, Berlin, Eberswalde der Böeneinbruch mit einer einzigen, sehr kräftigen Temperaturstufe. In zwei Stufen erfolgt der Böeneinbruch in den Stationen: Erfurt, Dessau, Leunawerk bei Halle, Jüterbog, Schkeuditz bei Leipzig, Dresden, Lindenberg, Frankfurt a. O. Die Erwärmung zwischen den beiden Stufen fehlt im Harz (Brocken und Schmatzfeld), aber die Staffelung selbst läßt sich bis in die Linie Brocken–Erfurt zurückführen, also in jenes Gebiet, wo sich in der Druckregistrierung des Brocken zuerst Wirbelbildung ausspricht. Der Schwall kalter Luft, der die erwähnten Stationen vor Einbruch der großen Böe überschwemmt und von schwachem Druckanstieg (vor der großen Druckstufe) begleitet ist, erreicht das Gebiet von Potsdam-Berlin nicht, dringt aber östlich von Berlin in nordöstlicher Richtung vor, wie die Staffelung des Kaltlufteinbruches in Jüterbog, Lindenberg, Frankfurt a. O. beweist. Da das Gebiet von Berlin-Eberswalde warm bleibt, hat man also hier eine

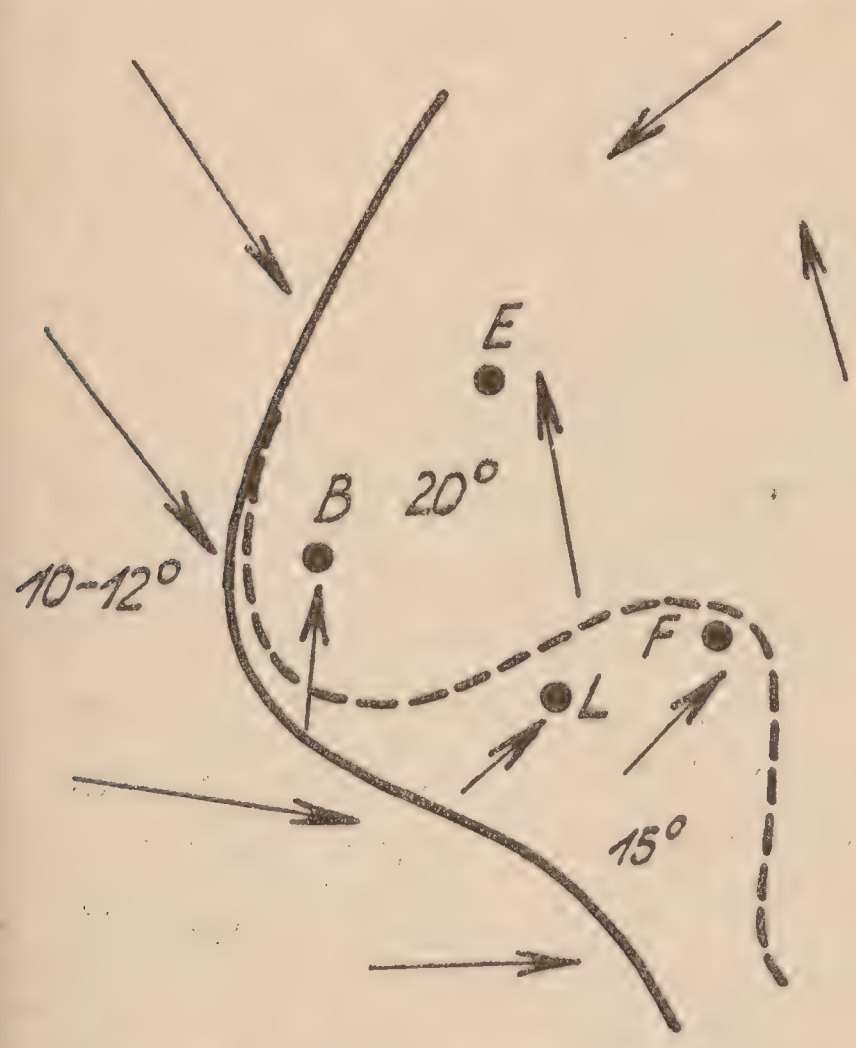


Fig. 22.

sekundäre Kaltfront als Vorläufer der großen Böe, die das Gebiet von Berlin auf drei Seiten umgibt. Das verhältnismäßig weit im Osten gelegene Frankfurt a. O. verzeichnet um 14^h SW 6—9, Lindenberg zwischen $12—14^h$ stürmischen SW, der erst nach 14^h in W, später NW übergeht. Diesem Vorbrechen kalter Luft und Herumschwenken südlich von Berlin entspricht der bereits erwähnte Keil hohen Druckes. Der Frontverlauf um etwa 13^h läßt sich roh durch vorstehende Figur schematisieren, wobei die Hauptfront (etwa 10—12°) ausgezogen, die sekundäre Front (15—16°) gestrichelt ist.

Das Zentrum der Zyklone liegt um 13^h über oder knapp westlich von Berlin und zieht dann mit dem Vorrücken der Hauptfront nach Nordosten, also längs der Front. Die durch die Sekundärfront bewirkte Deformation ist nicht rasch vergänglich; eine ähnliche Situation muß ungefähr um 11^{30} bei Magdeburg vorhanden gewesen sein. Was die ursächliche Beziehung zwischen der Frontdeformation und der Bildung der Zyklone anbelangt, so ergibt sich aus derartigem Beobachtungsmaterial kein sicherer Rückschluß. Die Kaltluft kann auf der Südseite vorausgeeilt sein, weil die Zyklone schon vorhanden war, obwohl man in diesem Falle keine rechte Erklärung für die überraschende Vertiefung der Zyklone erhält. Es kann aber auch die Bildung bzw. Vertiefung der Zyklone eine Folge der Frontstörung sein. Im Norden ist das Vorrücken der Front zweifellos durch die von der Ostsee her wehenden NE-Winde gehemmt, im Süden durch das von SW heranziehende Steiggebiet der Druckwelle befördert. Es entspricht nun einer schon vor mehr als sechs Jahrzehnten von Blasius[1] vertretenen, auf Beobachtung gestützten Annahme, daß Wirbelstürme (Tornados) sich dort bilden, wo aus einer im allgemeinen langsam vorrückenden Front Kaltluftmassen rasch vorstoßen. Er stellt sich vor, daß über den ausquellenden Kaltluftmassen ein »Luftdefizit« entsteht, das durch Zufluß warmer Luft in der Höhe sich auszugleichen sucht, wodurch eine wirbelförmige Anordnung der Strömungen entsteht. Da für die fraglichen Stunden gar kein aerologisches Material vorhanden ist, kann über die Vorgänge in der Höhe nichts ausgesagt werden. Auf dem Flugplatz Tempelhof bei Berlin wurde Wirbelbewegung in den Wolken beobachtet; mir selbst ist eine solche nicht aufgefallen.

Bei Beurteilung des Falles und der Wirbelbildung darf man nicht vergessen, daß bereits um 7^h gegen das mittlere Norddeutschland die vorerst noch schwachen Luftströmungen von allen Seiten radial konvergierten. Bis um 14^h wird daraus ein typisch zyklonales System mit heftigen, stark abgelenkten Winden auf verhältnismäßig kleinem Gebiet. Der starke Druckfall kann somit auch eine Folge der durch die zyklonale Anordnung wachgerufenen Fliehkräfte sein. Man hätte in diesem Fall den Vorgang, den Hann[2] für die Bildung der tropischen Zyklonen annimmt: In einem Gebiet mit schwachen Gradienten, aber etwas böigem Wetter entwickelt sich zunächst radialer Luftzufluß gegen das Gebiet niedrigsten Druckes, dem die

[1] W. Blasius, Storms, their nature, classifications and laws. Philadelphia 1875.
[2] Hann-Süring, Lehrbuch der Meteorologie IV. Aufl., S. 622 ff.

Luftmassen sich stark nähern können, weil die Ablenkung schwach ist. Erzeugt aber letztere trotzdem eine zyklonale Anordnung der ursprünglich zufliessenden Luftmassen, so müssen die Fliehkräfte den Druck im Zentrum stark erniedrigen und führen so zur Ausbildung des Wirbelsturmes. Der Unterschied gegenüber dem vorliegenden Fall liegt aber darin, daß bei tropischen Wirbelstürmen die großen Temperaturunterschiede fehlen. Die Ähnlichkeit mit den Vorgängen bei Tornados ist vielleicht größer. Zur vollen Entwicklung eines zerstörenden Tornados kommt es nicht, weil die Druckstufe der einbrechenden großen Böe dem durch den Wirbel erzeugten Druckfall entgegenwirkt.

Wie aus den Karten der Luftdruckverteilung hervorgeht, muß die immer umfangreicher werdende, nach NE ziehende Zyklone, die am 5. Juli über dem östlichen Baltikum und über Finnland liegt, auf diese im mittleren Norddeutschland aus einer wenig ausgesprochenen Depression entstandene Zyklone zurückgeführt werden. Darin liegt die Bedeutung des Falles, unabhängig von jeder Deutung der Vorgänge und der ursächlichen Verknüpfungen.

11. Niederschlagsverhältnisse.

Die Wetterentwicklung am 3. und 4. Juli war stellenweise mit sehr erheblichen Niederschlägen verbunden, deren Verteilung über Norddeutschland nicht ohne Interesse ist. Man hat es ja mit verschiedenen Kaltluftmassen zu tun und bereits aus der geographischen Verteilung der Regenmenge muß sich entnehmen lassen, an welchen Fronten die Niederschläge am ergiebigsten waren. Die Karte (Fig. 23), welche die Summen der vom 3. Juli morgens

Fig. 23.

bis 5. Juli morgens gefallenen Niederschläge zeigt, ist auf Grund der Beobachtungen von etwa 350 Stationen gezeichnet. Daneben standen noch Registrierungen von etwa 40 Stationen zur Verfügung. Es ist anzumerken, daß Süddeutschland fast ohne Niederschläge blieb.

In Norddeutschland haben wir zwei Gebiete, die niederschlagslos geblieben sind: Die der Küste vorgelagerten Nordseeinseln (Helgoland, Westerland usw.) und das westliche Schlesien mit Einschluß des Riesengebirges, also der Nordwesten und Südosten des Gebietes. Die Niederschläge im südöstlichen Schlesien sind deutlich auf Gewitterbildung mehr lokalen Charakters zurückzuführen. Niederschlagslos ist also das Ausgangsgebiet der von Nordwest vordringenden ozeanischen Kaltluft geblieben, sowie das Gebiet im Südosten, in das zwar die große Böe sich ausbreitete und sehr kräftigen Temperaturfall verursachte, über das aber zur Zeit des Einbruches bereits das Steiggebiet der Druckwelle vorgerückt war. Wenn man bedenkt, daß auf der Schneekoppe die Temperatur noch bis 0° sank, die Kaltluftmassen also sicher noch über die Schneekoppe hinaufreichten, so empfindet man es direkt als erstaunlich, daß es dabei nicht zu Niederschlägen kam. Daß Kaltlufteinbrüche, die von »primärem« Druckanstieg begleitet sind, in der Regel kein Schlechtwetter bringen, wurde zwar bereits für die Alpen gefunden, ohne daß man eine Erklärung für die ursächlichen Zusammenhänge hätte. Auch hier soll nur die Tatsache registriert werden.

Die von Nordwesten eindringende ozeanische Luft, im Ausgangsgebiet keinen Regen erzeugend, bewirkt im Küstengebiete und im Hinterland der Küste starke Regenfälle, die in einem großen Gebiete 30 mm überschreiten und stellenweise weit darüber hinausgehen. Da diese Gebiete von der großen Böe nicht berührt wurden, sind die Niederschläge, die vornehmlich in der Nacht vom 3. auf den 4. Juli gefallen sind, auf die langsam vorrückende Front der ozeanischen Luft zurückzuführen. In diesem Gebiet sind auch fast keine Gewitter niedergegangen. An diese niederschlagsreiche Zone schließt sich dann landeinwärts ein niederschlagsärmerer Strich, der dann in die wieder sehr niederschlagsreiche Zone übergeht, in deren westlichem Gebiete bereits am 3. Juli sehr zahlreiche Gewitter niedergingen und die dann von der großen Böe und ihren Vorläufern bestrichen wurde. Diese Zone erstreckt sich vom Rhein nordöstlich bis Ostpreußen. In dieser mittleren Zone lassen sich, wenn man von den lokalen Gewittern im Westen am 3. Juli absieht, drei Starkregenzüge nachweisen, die an die zwei ausführlich geschilderten Vorläufer der großen Böe und an letztere selbst gebunden waren, wobei die Niederschlagsproduktion durch die Vorläufer an sehr vielen Orten wesentlich größer war als jene der großen Böe. Sehr auffällig ist es nun, daß gerade der durch die Entwicklung der tiefen Zyklone ausgezeichnete Strich von der Elbe über Berlin und östlich über die Oder hinaus durch sehr geringe Niederschläge ausgezeichnet ist, trotz heftigster Stürme, intensivster Abkühlung und stärkster Druckstörung. Wenn das Gegenteil der Fall wäre, so wäre eine Erklärung naheliegend. Für den tatsächlichen Befund weiß ich keine einigermaßen plausible Erklärung. Im westlichen Schlesien fand ja die einbrechende Kaltluft sehr trockene Luft vor, deren Kondensationshöhe sehr

hoch war. Aber im Gebiet von Berlin war das, ähnlich wie im ganzen mittleren Norddeutschland, nicht der Fall, weil hier die Vorläufer der großen Böe überall abgekühlte, verhältnismäßig feuchte Luft hinterlassen hatten, so daß später bei Einbruch der Hauptböe die Wolken sich in außerordentlich geringer Höhe bildeten, worüber die »Erfahrungsberichte des Deutschen Flugwetterdienstes« Mitteilungen gebracht haben.

Sieht man von den mehr lokalen Gewittern im Westen ab, so ergibt sich, daß die ergiebigsten Niederschläge durch das langsame Eindringen der ozeanischen Kaltluftmassen erzeugt worden sind; das rasche Fortschreiten dieser Massen am 4. Juli in Form der großen Böe hat bedeutend geringere Niederschläge erzeugt, während die Vorläufer niederschlagsreich waren. In Schlesien vollzog sich der Böeneinbruch überhaupt ohne Regen und die Bildung der tiefen Zyklone im mittleren Norddeutschland ist ebenfalls fast ohne Niederschlag vor sich gegangen; die in Berlin und Potsdam[1] gefallenen, an sich geringen Niederschläge sind zum größten Teil durch die Vorläufer der Böe erzeugt worden, während der Einbruch der großen Böe, an deren Front sich die tiefe Zyklone entwickelt, fast ohne Niederschlag vor sich gegangen ist.

Übersicht.

Vom Azorenmaximum, also von Südwesten her, ging eine nach Nordosten wandernde Druckwelle aus, die in den Kontinent an der Westküste Frankreichs eintrat, ohne hier zu fühlbaren Temperaturvorgängen Veranlassung zu geben. Zunächst trat das Fallgebiet der Druckwelle auf den Kontinent über und bildete hier bei sehr hohen Temperaturen eine flache Depression. Von Norden her, vielleicht unter dem Einfluß eines nördlich über Skandinavien wandernden Drucksteiggebietes, drangen kalte, ozeanische Luftmassen von beträchtlicher Höhe, aber bei fallendem Druck vor, so daß der erste Kaltlufteinbruch an den Küsten selbst und in den küstennahen Landgebieten in das Fallgebiet der Druckwelle erfolgte und den Druckfall abschwächte. In der Nacht vom 3. auf den 4. Juli überschwemmten diese Kaltluftmassen, ebenfalls bei fallendem Druck, Nordwestdeutschland, drangen südlich bis zu den Mittelgebirgen vor und wurden dann fast stationär bis zum Heranrücken des Steiggebietes der Druckwelle. Ehe aber letzteres ankam, brach von der Kaltluftmasse zweimal ein Schwall kalter Luft los, so daß zwei Gewitterzüge unter charakteristischen Druckstörungen, jedesmal mit Windwechsel von SE zu NW und unter kräftigem Temperaturrückgang an den höher gelegenen Stationen ostwärts durch das südliche Norddeutschland wanderten und bis Schlesien verfolgt werden konnten. Die Hauptmasse der kalten Luft setzte sich in Norddeutschland erst unter dem Einflusse des Steiggebietes der Druckwelle als »große Böe« in Bewegung; man hat deshalb den Eindruck, daß die Bewegung der Kaltluftmassen kaum »aktiv« war, sondern erzwungen und gesteuert durch die Druckwelle. In Mitteldeutschland erfolgt die Um-

[1] Z. B. Niederschlag in Potsdam: 3. Juli kein Niederschlag; 4. Juli 1^{30}—2^{30} 4.6 mm; 7^{h} 0.2 mm; 8^{30}—9^{30} 1.6 mm; 12^{30}—13^{30} 0.3 mm.

wandlung der flachen Depression in eine sehr tiefe Zyklone, die — an Umfang gewinnend — bis zum 5. Juli in das östliche Baltikum zieht. Die Entwicklung dieser Zyklone ist insofern begleitet von einer sehr charakteristischen Störung des Verlaufes der Kaltfront, als unmittelbar vor dem großen Böeneinbruch im südlichen Norddeutschland Kaltluft östlich vorauseilte und, nach Nordost umbiegend, das vorerst noch warmbleibende Gebiet der Zyklonenentstehung (Magdeburg, Potsdam, Berlin) im Süden und Osten umfloß. Es bildete sich also an der vorrückenden Kaltfront ein sekundärer warmer Sektor, in dem die Zyklone sich bildete bzw. überraschend vertiefte. Die Bildung dieser Zyklone könnte insofern auch auf dynamische Ursachen zurückgeführt werden, als bereits morgens, bei sehr schwachen Gradienten, die Luftströmungen gegen das Gebiet der späteren Zyklonenentstehung fast radial konvergierten und sich dann unter starker Ablenkung der Winde zu einem zyklonalen System zusammensetzten. Nach Süddeutschland trat die große Böe nicht über, aber die Druckwelle ist auch hier nachweisbar. Nach Schlesien kam die Kaltluft der großen Böe erst dann, als hier schon das Steiggebiet der Druckwelle sich merkbar gemacht hatte, worauf vielleicht der stark modifizierte, durch Mangel an Niederschlägen gekennzeichnete Verlauf des Böeneinbruchs zurückzuführen ist.

Über Regenerationsvorgänge bei Bryopsis und Codium.

Von G. Haberlandt.

Mit 5 Textfiguren.

I.

Über Wundheilung und Regenerationserscheinungen bei den *Siphonales* liegen bereits zahlreiche Beobachtungen seitens verschiedener Forscher vor. Der Umstand, daß diese Algen trotz ihrer bedeutenden Größe in ihren vegetativen Stadien einzellige bzw. nicht zelluläre Organismen sind, die einen einheitlichen, durch keine Querwände zerklüfteten Plasmakörper besitzen, mußte zu derartigen Untersuchungen besonders anregen.

Als erster hat wohl Hanstein die Heilung mechanisch verletzter, zerschnittener oder zerrissener Fäden bei der Gattung *Vaucheria* beobachtet und in sehr anschaulicher Weise beschrieben. Das hinter der Wunde gelegene »unzerstörte Protoplasma zieht sich augenblicklich zusammen und sucht die Wundränder, soweit diese gesund geblieben sind, wieder aneinanderzufügen«. Dieselben verschmelzen sodann und bilden eine nach außen gewölbte Kurve; es kommt eine scharfe Außengrenze zustande, »die seitlich in die der Zellulosehaut angeschmiegte Längsfläche des übrigen Protoplasmaschlauches übergeht. Dann beginnt an dieser Außenfläche die Ausscheidung einer neuen Zellulosehaut, die seitlich der Innenfläche der alten angefügt wird und mit ihr verschmilzt.« Hanstein hat ferner bereits gefunden, daß man einen Vaucheriafaden mehrfach zerschneiden kann, ohne daß die Wundheilung ausbleibt. »Jedes heil gebliebene Stück schließt sich gleichzeitig nach beiden Seiten durch Wandreproduktion wieder ab. Selbst ganz kurze Stücke vermögen dies auszuführen. Die verheilten Bruchstücke pflegen seitlich neben den Vernarbungswunden wieder auszuwachsen und fortzuvegetieren.«

In ähnlicher Weise erfolgt nach den Untersuchungen von Schmitz, Janse, Klemm, Noll, Küster, Prowazek u. a. die Wundheilung auch bei anderen *Siphonales*.

Aus entzweigeschnittenen Schläuchen von *Vaucheria*, *Bryopsis* u. a. werden vor dem Wundverschluß gewöhnlich größere und kleinere Plasmaballen ausgestoßen, die entweder in das umgebende Wasser austreten oder außerhalb des geheilten Plasmaleibes in der Zelluloseröhre liegenbleiben. Bei *Vaucheria* sind sie, wie ich bereits vor mehr als vier Dezennien feststellte, nur dann am Leben zu erhalten, wenn die Fäden in 5—10prozentiger Rohrzucker-

lösung zerschnitten werden und so eine zu reichliche Wasseraufnahme und Desorganisation der ausgeworfenen Plasmaballen verhindert wird. In vielen Fällen umkleideten sich diese meist kugeligen Ballen mit einer Zellulosehaut, die zuweilen ebenso dick war wie die der normalen Fäden, häufiger aber dünner blieb. Diese Einkapselung fand aber, soviel ich konstatieren konnte, immer nur dann statt, wenn das betreffende Plasmaklümpchen einen oder mehrere Zellkerne aufwies. Dies war auch die Voraussetzung für länger andauernde Lebensfähigkeit. Analoges hat vor mir bereits Schmitz bei verschiedenen Siphonocladiaceen (z. B. häufig bei *Valonia* und *Siphonocladus Wilbergi*) beobachtet. Die umhäuteten Plasmaballen von *Vaucheria* wachsen nicht selten zu dünnen Schläuchen aus; es kann keinem Zweifel unterliegen, daß sie imstande sind, sich unter günstigen Bedingungen zu neuen Pflänzchen weiterzuentwickeln. 20 Jahre später hat Prowazek das gleiche beobachtet.

Wie sich bei *Bryopsis* kurze Teilstücke der Fiederästchen und ausgestoßene Plasmaballen verhalten, ist noch nicht näher untersucht worden. Nur dürftige Angaben liegen vor. Im Hinblick auf die höhere morphologische Differenzierung dieser Algengattung gegenüber *Vaucheria* mußte es erwünscht erscheinen, die diesbezüglichen Regenerationsvorgänge genauer zu studieren. Dasselbe gilt für *Codium*; betreffs dieser Gattung liegt nur eine kurze Mitteilung Toblers vor, wonach isolierte Palisadenschläuche von *C. tomentosum* an ihrer Basis zu neuen Pflanzen auswachsen können.

So habe ich denn während eines mehrwöchigen Aufenhaltes an der zoologischen Station in Neapel im April und Mai 1929 diese Lücken in unseren Kenntnissen betreffs der Regenerationsvorgänge bei den *Siphonales* auszufüllen versucht. Der Preußischen Akademie der Wissenschaften, die mir den Aufenthalt in Neapel ermöglichte, sowie der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft, die mir ihren Arbeitsplatz überließ, bin ich hierfür sehr zu Dank verpflichtet. Ebenso danke ich Hrn. Direktor Dr. R. Dohrn und den übrigen Herren der zoologischen Station bestens für ihr freundliches Entgegenkommen.

II.

Als Versuchsobjekt diente hauptsächlich *Bryopsis muscosa,* einige Versuche mit wesentlich gleichen Ergebnissen wurden auch mit *Br. plumosa* angestellt. Die Verzweigung erfolgt bei *Bryopsis* in der Regel in einer Ebene; doch können bei der nämlichen Art bilaterale und radiäre Verzweigungen wechseln (Oltmanns, I. Bd. S. 402). Die von mir benutzten kräftigen Exemplare von *Br. muscosa* zeigten sämtlich eine reiche radiäre Verzweigung.

Die vom Substrate losgelösten Pflänzchen wurden in mit Seewasser gefüllten Petrischalen von 12 cm Durchmesser kultiviert. Die Fiederzweige zerschnitt man unter Wasser mittels einer scharfen Schere in zahlreiche längere und kürzere Teilstücke, die auf den Boden der Schale sanken und hier neben den Pflänzchen, von denen sie stammten, sich selbst überlassen blieben. Die Kulturschalen standen auf einem Tisch in meinem nach Norden gelegenen Arbeitszimmer und waren von diffusem Tageslicht mäßig stark beleuchtet. Die Temperatur betrug 17—20° C. Das Wasser wurde nicht

gewechselt, um die kleinen Fadenfragmente nicht zum Teile zu verlieren und ihre Weiterentwicklung nicht zu stören. In den ersten Tagen nach der Operation wurden täglich, später jeden zweiten oder dritten Tag einige Fiederstückchen mittels einer Glaspipette der Kulturschale behufs mikroskopischer Untersuchung entnommen. Das gelang in den ersten 8—10 Tagen ganz leicht. Später aber hefteten sich die auswachsenden Fiederstückchen auf den Boden der Schale so fest, daß sie nur mit Hilfe einer Nadel losgelöst werden

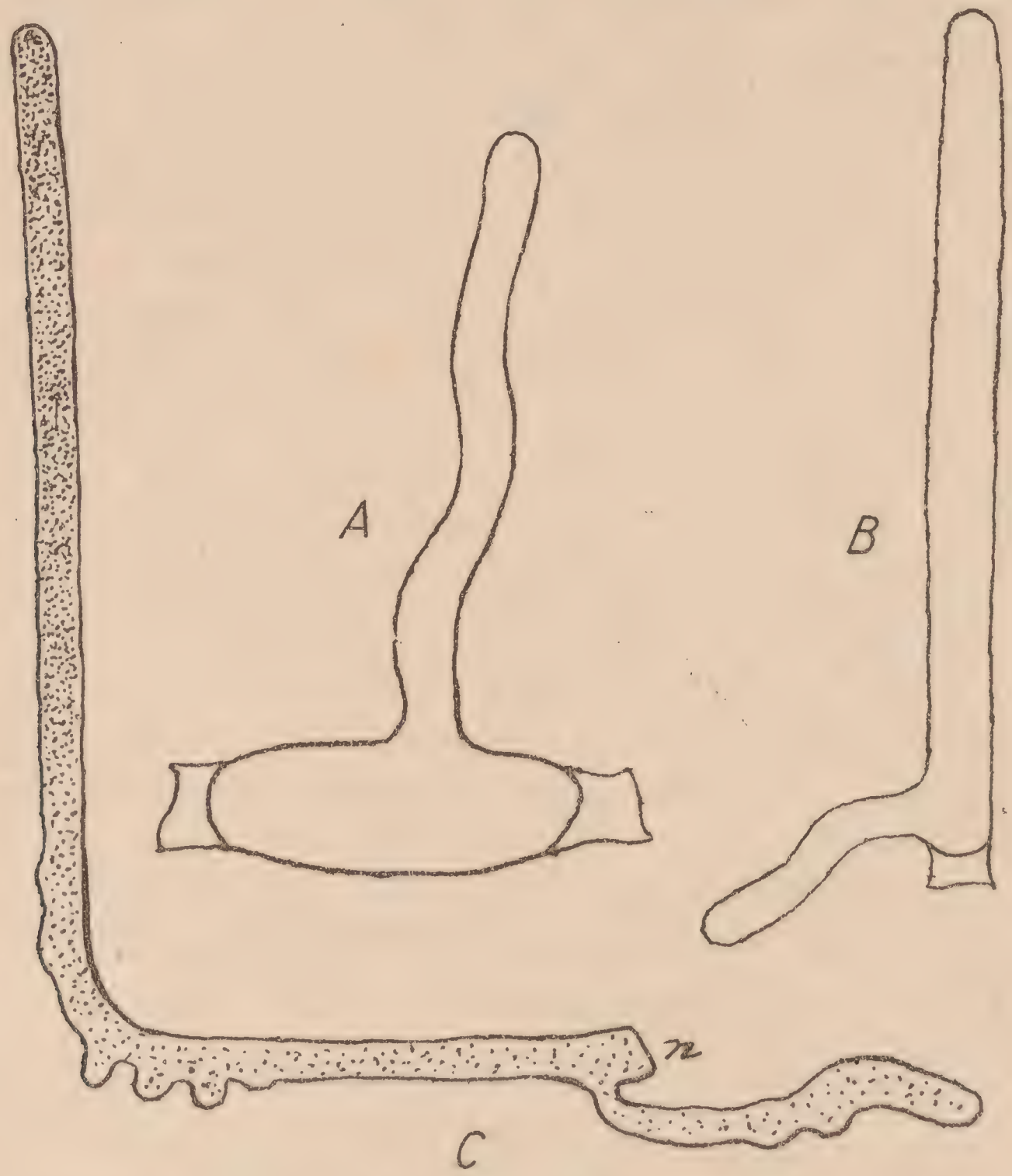


Fig. 1. Bryopsis muscosa. *A* Stück aus einem Fiederast, an beiden Enden Narbenwände, in der Mitte ein neuer Seitenzweig. *B* Endstück eines Fiederastes, neben der Narbenwand ein Seitenzweig. *C* Endstück eines Fiederastes, der nach der Wundheilung zunächst horizontal weitergewachsen ist und sich dann geotropisch aufgerichtet hat. An der Krümmungsstelle Rhizoidanlagen. Neben der Narbe *n* ist ein Seitenzweig entstanden. Die Punktierung gibt schematisch die Verteilung der Chloroplasten an. Breizusatz zur Kulturflüssigkeit.

konnten. Wendete man dabei genügende Vorsicht an, so gelang es, die in Regeneration begriffenen Fragmente unverletzt loszubekommen.

Die Wunden entzweigeschnittener Fiederästchen vernarben fast immer sehr bald durch Bildung von konvex vorgewölbten oder seltener auch fast ebenen Querwänden, die in größerer oder geringerer Entfernung von der Schnittstelle ganz ähnlich wie bei *Vaucheria* angelegt werden (Fig. 1 *A*, *B*, 2 *A*, 3 *A*, *B*[1]). Erfolgt die Vernarbung beträchtlich weit hinter der Schnittstelle,

[1] Von KÜSTER (III. S. 81) wird angegeben, daß das Plasma verletzter *Bryopsis*-Schläuche an der bloßgelegten Stelle »zuweilen« zu einer körnigen amorphen Masse gerinnt, die die Wunde verschließt. Es kann sich da höchstens um einen provisorischen Wundverschluß handeln. Ich habe derlei nicht beobachtet.

so liegen in dem vorderen Abschnitt der Zellhautröhre größere und kleinere Plasmaballen mit Chloroplasten und Zellkernen, die sich in der Regel umhäuten. Die Wunden vernarben auf diese Weise nicht nur, wenn das Fiederästchen einmal durchschnitten wurde. Auch herausgeschnittene Teilstücke, die also beiderseits offen sind, heilen meist vollständig, bleiben am Leben und zeigen die später zu besprechenden Regenerationserscheinungen. Diese Teilstücke können sehr klein sein, bis zu 0,1 mm Kürze.

Die Narbenwände, welche sich auskeilend in die Seitenwände der Fadenstücke übergehen, werden meist etwas dicker als diese letzteren. Oft ist der Dickenunterschied sogar beträchtlich. Auch ihre chemische Beschaffenheit

Fig. 2. Bryopsis muscosa. *A* Stück eines Fiederastes, *n n'* Narbenwände; neben *n* Seitenzweig, der erst schräg abwärts wächst und sich dann aufwärts krümmt; *r* junges Rhizoid. *B* Endstück eines Fiederastes, das erst horizontal weitergewachsen ist, zwei Rhizoidanlagen gebildet und sich dann schräg aufwärts gekrümmt hat. Neben der Narbenwand *n* ist ein Seitenzweig entstanden.

weicht von der der normalen Seitenwände ab. Die Bryopsiszellwände bestehen aus Kallose, Pektin und Zellulose (Oltmanns, 1. Bd. S. 403); dieselben Stoffe treten auch in den Narbenwänden auf, doch in einem anderen Mengenverhältnis. In angesäuerter Anilinblaulösung färben sie sich sowie auch die Wände eingekapselter Plasmaballen viel intensiver als die Seitenwände der Fiederästchen, was auf einen höheren Gehalt an Kallose hinweist. Auch Pektinstoffe sind reichlicher vorhanden, was aus der intensiveren Färbung mit Safranin und Methylenblau hervorgeht.

Wenige Tage nach der Vernarbung der Wunden setzen die Regenerationsvorgänge ein. Ist das Ende der Fieder abgeschnitten worden, so wird an der Basis ein neuer Ast ausgetrieben, während die Spitze weiterwächst (Fig. 1 *B*). Hat man aus der Fieder ein Stück herausgeschnitten, so werden an einem, nicht selten auch gleichzeitig an beiden Enden neue Zweige gebildet (Fig. 4 *B*). Auffallend ist dabei, daß in der großen Mehrzahl der Fälle nicht die Narbenwand sich vorstülpt, sondern daß knapp unter der

Narbe der neue Zweig seitlich angelegt wird. Er wächst so in mehr minder schräger Richtung aus (Fig. 1 *B C*, Fig. 2, Fig. 4 *B*). Die Narbenwand ist offenbar in geringerem Maße befähigt, Flächenwachstum zu zeigen als die normalen Seitenwände der Fiederstückchen, was vielleicht mit ihrer größeren Dicke und anderem chemischen Aufbau zusammenhängt. Wenn die Narbenwand sich vorstülpt und zu einem Faden auswächst, so tut sie dies entweder in ihrer ganzen Ausdehnung oder nur an einer eng umschriebenen Stelle, infolgedessen der neue Zweig viel schlanker wird als die normale Fieder. Auch sonst sind die neuen Ästchen in der Regel etwas dünner als das Fiederstück, an dem sie entstehen. Ausnahmsweise kommt es auch vor, daß der neue Seitenzweig ungefähr in der Mitte des Fiederstückes angelegt wird und dann in senkrechter oder schräger Richtung weiterwächst (Fig. 1 *A*, 4 *A*).

Bevor nun das weitere Schicksal der Fiederfragmente mit ihren Seitenästchen besprochen werden soll, möge noch auf einige auffallende Erscheinungen hingewiesen werden, die an den geheilten Fiederstückchen zu beobachten sind.

Ziemlich häufig zeigen dieselben, bevor noch das Auswachsen neuer Ästchen erfolgt, ein ausgiebiges Dickenwachstum, wobei sie mehr als doppelt so dick werden können wie die normalen Fieder (Fig. 3 *B*). Doch zeigen nur ganz kurze Fiederstückchen dieses Verhalten. Man gewinnt den Eindruck, daß, wenn das vom Wundreiz ausgelöste Wachstumsbestreben nicht alsbald durch die Bildung neuer Ästchen sich auswirken kann, ein Ausweg durch das Dickenwachstum des ganzen Fragmentes gesucht und gefunden wird.

Bisweilen zieht sich das Protoplasma von einer Narbenwand glatt zurück und bildet eine neue Wand, die gleichfalls bogig ist; dieser Vorgang kann sich mehrmals wiederholen. So entstehen mehrere Kammern (bis zu 5), in deren letzter der Protoplast sich befindet, der abzusterben beginnt (Fig. 3 *c*). Der ganze Vorgang scheint demnach von vornherein ein pathologischer zu sein.

An den intakten Bryopsispflänzchen habe ich im April d. J. noch keine Zoogametenbildung beobachtet. Da sie sonst gewöhnlich in den ersten Frühlingsmonaten eintritt, hat sie sich heuer, an dem Standorte wenigstens, von dem meine Versuchsobjekte stammten, aus irgendeinem Grunde verspätet. Vielleicht waren die abnorm niedrigen Temperaturen des vorausgegangenen Winters und teilweise auch des Frühjahrs Schuld daran. Um so auffallender war es daher, daß in den vernarbten Stümpfen der Fiederästchen sowohl wie in den abgeschnittenen Ästchenstücken häufig die Bildung männlicher Zoogameten eintrat, namentlich dann, wenn die betreffenden Fiederästchen infolge der Ausstoßung mehrerer größerer Plasmaballen arm an Protoplasma geworden waren. Der Wundreiz und wohl auch die Verringerung des Plasmagehaltes haben die Gametenbildung ausgelöst bzw. beschleunigt.

Gehen wir nun zum weiteren Verhalten der auswachsenden Fiederstückchen über, das sehr mannigfaltig ist.

Handelt es sich um das apikale Endstück einer Fieder, so wächst im einfachsten Falle neben der Narbe ein schlankerer Faden aus, der weniger

Chloroplasten besitzt, mehr minder geschlängelt ist, auf dem Boden der Glasschale stolonenartig dahinkriecht und sich an ihm festheftet (Fig. 1 *C*). Das Festhaften auf dem Substrate ist ein sehr inniges, doch läßt sich, wie schon erwähnt, das Loslösen des Fadens mit Hilfe einer Nadel ohne Verletzung der Membran bewerkstelligen. Die mikroskopische Untersuchung der festhaftenden Membranpartien ergibt in der Regel keinerlei Unterschied in bezug auf Membrandicke und sonstige Beschaffenheit gegenüber den freien Membranpartien. Eine Kittsubstanz läßt sich nicht nachweisen. In verschiedenen Fällen aber

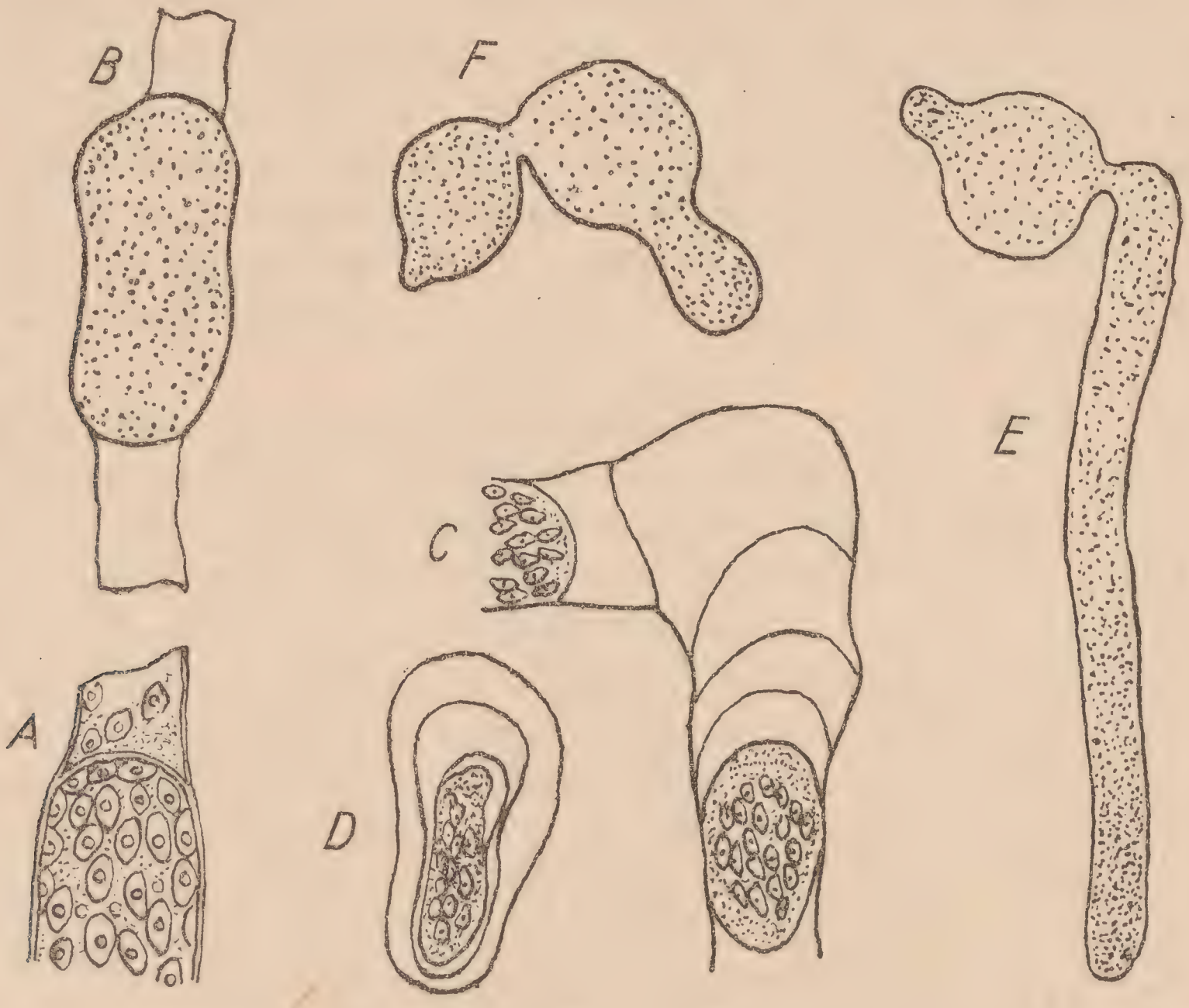


Fig. 3. Bryopsis muscosa. *A* Wundverschluß eines Fiederstückes durch Bildung einer Narbenwand. *B* Das Fiederstück ist nach beiderseitigem Wundverschluß stark in die Dicke gewachsen. *C* Wiederholte einseitige Abkapselung eines Plasmaballens im abgeschnittenen Fiederstück. *D* Wiederholte allseitige Abkapselung eines ausgetretenen Plasmaballens. *E* Ausgetretener, umhäuteter Plasmaballen, der zwei Äste getrieben hat. *F* Umhäuteter Plasmaballen, der hefeartig sproßt. — Die Punktierung in *B*, *E* und *F* gibt schematisch die Verteilung der Chloroplasten an.

konnte beobachtet werden, daß auf der Unterseite des horizontalen Ausläuferastes ganz kurze, knopfförmige Rhizoidenanlagen entstehen, oft reihenweise hintereinander, deren Wände ansehnlich dicker sind, als die der Oberseite. Auch färben sie sich mit Safranin und Methylenblau viel intensiver, enthalten also reichlich Pektinstoffe. Die äußerste Membranlamelle quillt zu einer Kittsubstanz auf, die die Verklebung mit dem Substrate bewirkt[1]. Ihre oft ebene Grenzfläche ist die Folge dieser Funktion. — Das apikale Ende des Fiederstückchens, durch Chlorophyllreichtum ausgezeichnet, wächst gleichfalls weiter und

[1] Daß diese Kittsubstanz nicht gewöhnlicher »Pektinschleim« sein kann, der ja in Wasser vollständig verquillt, ist selbstverständlich. Ihre chemische und physikalische Beschaffenheit ist ebenso unbestimmt wie die des Wurzelhaarkittes der höheren Pflanzen, die mit den Bodenteilchen »verwachsen«, wie es gewöhnlich in wenig zutreffender Weise heißt.

richtet sich im Bogen geotropisch (und wohl auch phototropisch) auf (Fig. 1 *C*, Fig. 2 *B*). Es wird zum Stämmchen des neuen Pflänzchens. — In diesem Falle ist die labile Polarität unserer Alge, deren genauere Kenntnis wir NOLL und WINKLER verdanken, auch in den Fiederästchen erhalten geblieben.

Es kommt aber auch häufig vor, daß das abgeschnittene apikale Endstück der Fieder sich beiderseits weiterentwickelt. Die Spitze wächst zunächst horizontal weiter, legt auf der Unterseite Rhizoiden an (Fig. 1 *C*, Fig. 2 *B*) und krümmt sich dann, zu einem neuen Stämmchen werdend, bogig aufwärts. Neben der basalen Narbe wächst ein zweiter Ast aus, der stolonenartig weiterkriecht oder sich sofort nach oben wendet und zweifellos die Anlage eines zweiten Stämmchen darstellt (Fig. 1 *C*, Fig. 2 *B*). Hier ist die ursprüngliche Polarität aufgehoben.

Weist das Fiederstück an beiden Enden Schnittwunden auf, die vernarben, so kann wieder zweierlei eintreten. Entweder wächst es nur an einem Ende weiter, zunächst stolonenartig in horizontaler Richtung, bildet unterseits Rhizoiden aus und krümmt sich dann als junges Stämmchen aufwärts. Oder das Auswachsen findet an beiden Enden statt, und nach horizontalem Wachstum eines oder auch beider Äste mit Rhizoidenbildung erfolgt dann wieder die Aufwärtskrümmung (Fig. 4 *B*). Über die Polaritätsverhältnisse läßt sich bei diesen Fiederstückchen nichts sagen, da nicht festzustellen ist, welches das apikale und welches das basale Ende ist. Bei bloß einseitigem Auswachsen ist es aber wahrscheinlich, daß es stets das apikale Ende ist, welches sich weiterentwickelt.

Wenn endlich der neue Ast aus der Mitte des beiderseits vernarbten Fiederstückes hervorsprießt, so zeigt er wieder zunächst einen geschlängelten stolonenartigen Verlauf mit Rhizoidenbildung, um sich dann als junges Stämmchen aufwärts zu krümmen. Dabei kann neben einer Narbe ein zweiter Ast entstehen. Zuweilen wachsen aus der Mitte oder einem der beiden Enden genähert zwei Äste einander gegenüber aus und krümmen sich in scharfem Bogen nach der einen oder anderen Seite. In diesem Falle läßt sich schließen, daß die Krümmung spitzenwärts erfolgt und die ursprüngliche Polarität auch in dem beiderseits verwundeten Fiederstück erhalten geblieben ist.

Mit den geschilderten Fällen ist die Mannigfaltigkeit der hierhergehörigen Erscheinungen noch nicht erschöpft, doch hätte es keinen Wert, darauf näher einzugehen.

Die weitere Entwicklung der jungen Bryopsispflänzchen, die den besprochenen Regenerationsvorgängen ihre Entstehung verdanken, konnte nicht verfolgt werden, da dieselben nach etwa drei Wochen langsam abstarben. Die Lebens- und Wachstumsbedingungen in den Petrischalen ohne Wasserwechsel waren offenbar zu ungünstig. Da bei langsam aufhörendem Wachstum die Assimilationstätigkeit der Chloroplasten fortdauerte, waren dieselben schließlich mit Stärke vollgepfropft. Daß die Pflänzchen unter günstigen Bedingungen zu normalen, sich typisch verzweigenden Individuen heranwachsen können, steht außer Zweifel.

Zum Schlusse ist noch das Verhalten der nach dem Zerschneiden der Fiederästchen ausgestoßenen größeren und kleineren, meist sehr chlorophyll-

reichen Plasmaballen zu schildern, die meist zu Kugeln abgerundet sich mit einer Zellhaut umgeben. Gewöhnlich wachsen auch sie zu Fäden aus, die an ihrer Insertionsstelle oft stark verengt sind (Fig. 3 *E*). Nicht selten treibt die Plasmakugel an einander entgegengesetzten Seiten zwei Schläuche aus. Ihre Entwicklung geht wesentlich langsamer vor sich als die der den Fieder-

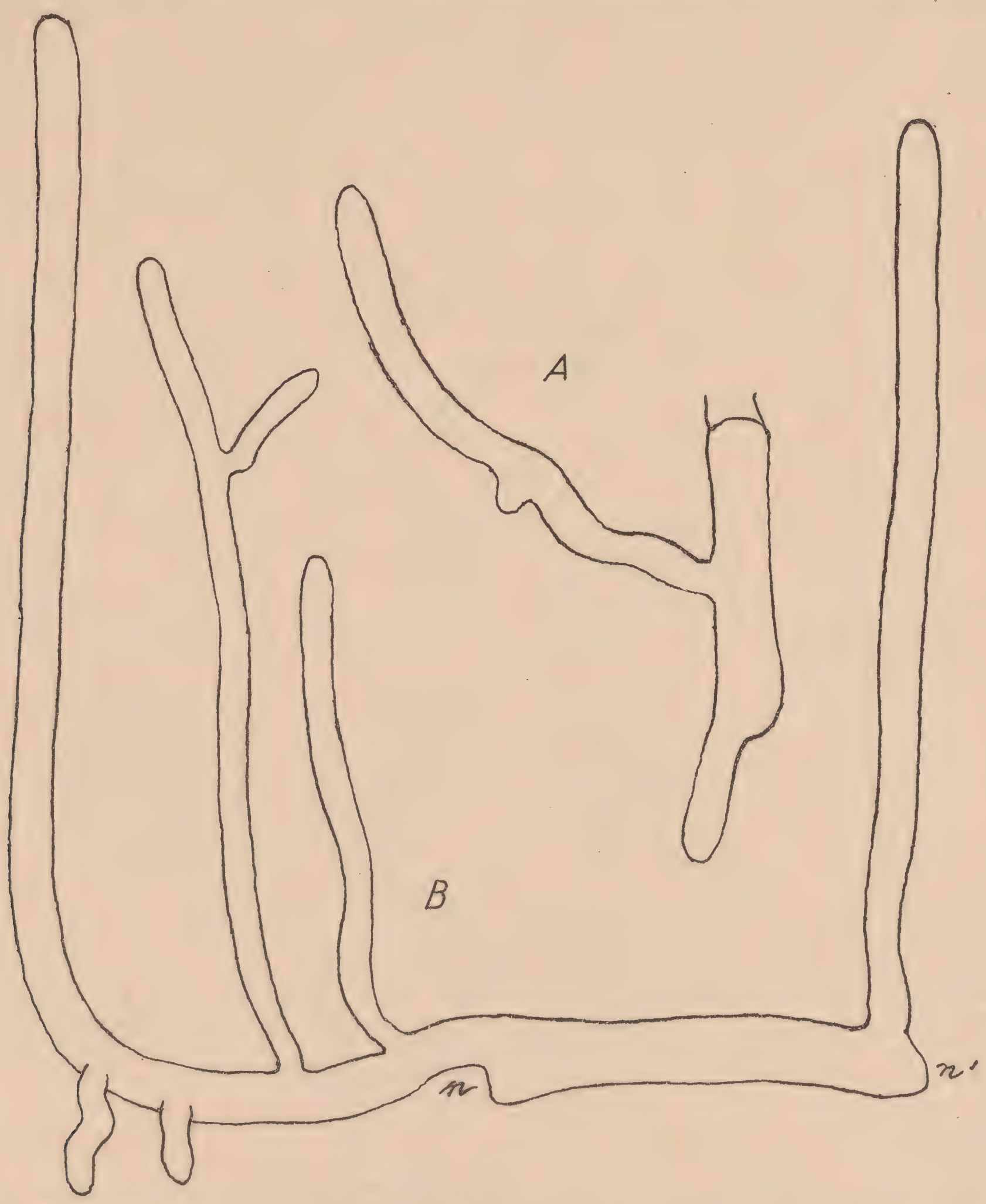


Fig. 4. Bryopsis muscosa. *A* Fiederstück, dem an einem Ende und in der Mitte neue Ästchen entsprossen sind. *B* Das Fiederstück zwischen den Narbenwänden *n n'* zeigt nach dreiwöchiger Kultur mit Breizusatz weitgehende Regeneration.

stückchen entsprießenden Fäden. Sie wachsen zunächst horizontal weiter, legen auf ihrer Unterseite Rhizoiden an und krümmen sich dann aufwärts. Die Chloroplasten wandern aus der Kugel größtenteils in den Faden hinein und sammeln sich hauptsächlich in dem aufwärts gekrümmten Teil desselben an, der zum Stämmchen wird. Ausnahmsweise schwillt der aus der primären Plasmakugel hervorgewachsene Ast alsbald zu einer sekundären Kugel an; da sich dieser Vorgang wiederholen kann, kommt eine hefeartige Sprossung

zustande (Fig. 3 *F*). — Nicht selten wurde beobachtet, daß im umhäuteten Plasmaballen das Plasma sich ringsum von der Membran zurückzieht und sich dann neuerlich umhäutet. Da sich dieser Vorgang wiederholen kann, so werden mehrere ineinandergeschachtelte Zellhautkapseln gebildet, in deren innerster sich der absterbende Protoplast befindet (Fig. 3 *D*). Es handelt sich also wie bei der oben für Fiederstückchen beschriebenen analogen Erscheinung sicherlich um einen pathologischen Prozeß.

III.

Daß Wundhormone beim Heilungsprozeß der zerschnittenen Fiederästchen von *Bryopsis* eine wesentliche Rolle spielen, ist wenig wahrscheinlich, da es sich bei diesem Vorgange ja nicht um Zellteilungen, sondern im wesentlichen nur um Bildung einer Vernarbungsmembran handelt. Möglich wäre es allerdings, daß durch Wundreizstoffe die in der Nähe der Wunde befindlichen Zellkerne zu wiederholter Teilung angeregt würden, doch habe ich solches bei *Bryopsis* ebensowenig beobachtet wie seinerzeit bei *Vaucheria*.

Trotzdem schien es nicht ohne Interesse, experimentell festzustellen, ob eine vermehrte Zufuhr von Wundreizstoffen das weitere Verhalten der zerschnittenen Fiederästchen, ihr Auswachsen usw. irgendwie zu beeinflussen imstande wäre.

Zu diesem Behufe wurde folgender Versuch angestellt. Drei Pflänzchen von *Bryopsis muscosa* von genau demselben Standorte, von dem auch die zu den früher beschriebenen Versuchen benutzten Pflänzchen stammten, wurden in einer Petrischale so wie früher mit der Schere zerschnitten, doch nur auf einer Seite. Die verletzten Pflänzchen wurden in der gleichen Schale belassen, in der die Fiederstückchen weiter kultiviert wurden. Dann zerrieb man in einem kleinen Porzellanmörser ein kräftiges Pflänzchen unter Zusatz von ganz wenig Seewasser zu einem dünnen Brei und goß diesen in die Petrischale zu den Versuchsobjekten. Nach erfolgtem Umrühren nahm das Wasser eine grünliche Farbe an.

In der ersten Zeit verhielten sich die Fiederstückchen und verletzten Pflänzchen nicht anders wie jene, die ohne Breizusatz kultiviert wurden. Die Heilung der Wunden, das Auswachsen von Seitenästen ging wie gewöhnlich vonstatten. Fäulniserscheinungen in der Kulturflüssigkeit machten sich nicht bemerkbar, die grünliche Farbe verblaßte allmählich und die zerriebenen Wand- und Plasmateile lösten sich zweifellos unter der Mitwirkung von Bakterien bis auf unscheinbare Reste auf. Nach 14 Tagen machte sich gegenüber den ohne Breizusatz kultivierten Versuchsobjekten bereits ein beträchtlicher Unterschied geltend. Die ausgewachsenen Seitenäste der Fiederstückchen waren länger, kräftiger, lebhafter grün und stellten sich, sofern sie Stämmchenanlagen waren, sehr präzise negativ geotropisch ein. Dasselbe galt für die intakten Fiedern der horizontal gelagerten Pflänzchen. Noch größer war dieser Unterschied nach dreiwöchiger Versuchsdauer (Fig. 4 *B*). Während in den Schalen ohne Breizusatz die Fiederstückchen mit ihren Ästchen schon eine lichtgelbgrüne Farbe angenommen hatten, ferner gleich

den unverletzten Fiedern mehr minder zusammengesunken waren und so ihr Absterben erkennen ließen, zeigten alle Fiederästchen und unverletzten Fiedern in der Schale mit Breizusatz eine intensiv dunkelgrüne Farbe und standen vollkommen turgeszent aufrecht. Sie waren noch vollkommen lebensfrisch und gesund.

Die mikroskopische Untersuchung ergab in den aufrechten Ästchen der Fiederstücke sowie in den intakten Fiedern der horizontal gelagerten Pflänzchen eine starke Vermehrung der intensiver gefärbten Chloroplasten, die in dichtester Anordnung die Wände bedeckten. Zum Unterschiede von den mit Stärke vollgepfropften Chloroplasten der ohne Breizusatz kultivierten Fiederstücke waren sie bis zuletzt bis auf die Stärkehülle des Pyrenoids ganz oder fast ganz stärkefrei, was dem lebhaften Wachstum entsprach, in dem sich die Stücke befanden. Die stolonenartigen Fäden und die Rhizoiden enthielten weniger Chloroplasten, doch immer noch mehr als die der Kontrollobjekte. Natürlich wurde auch versucht, festzustellen, ob auch eine Vermehrung der Zellkerne nach Breizusatz eingetreten war. Bei der Kleinheit der Kerne, die nur wenig größer sind als die von *Vaucheria*, und der ungemein dichten Lagerung der Chloroplasten kam ich zu keinem sicheren Resultate und muß daher diese Frage offenlassen.

Der am 8. April begonnene Versuch mußte meiner Abreise von Neapel halber am 6. Mai leider abgebrochen werden. Die Versuchsobjekte waren zu dieser Zeit noch am Leben und vollkommen gesund, während die Vergleichsobjekte in den Schalen ohne Breizusatz bereits fast ausnahmslos abgestorben und in Zersetzung begriffen waren. Der stimulierende, lebensverlängernde Einfluß des Breizusatzes, bzw. der darin enthaltenen Wundreizstoffe war demnach sehr auffallend; daß die Wirkung des Breizusatzes auf Nahrungszufuhr beruhen könnte, ist wohl ausgeschlossen.

IV.

Codium tomentosum, mein Versuchsobjekt, ist eine reich verzweigte, ansehnliche Büsche bildende *Siphonee* (vgl. Oltmanns, I. Bd. S. 397, Fig. 257). Das »Mark« oder der Zentralkörper der Äste besteht aus dünnen, hyphenähnlichen Fäden, die Rinde, die das Assimilationssystem darstellt, setzt sich aus senkrecht zur Oberfläche orientierten, sehr chlorophyllreichen, birnenförmigen Blasen zusammen, die Küster treffend als Palisadenschläuche bezeichnet. An ihrer Basis, beim Übergang in die Fäden des Zentralkörpers, treten dicke Querwände auf, die dadurch zustande kommen, daß die Längswände sich ringförmig verdicken, und daß diese Membranringe immer dicker werden, bis es zu einem fast vollständigen Verschlusse kommt.

Untersuchungen über Regeneration bei dieser Codiumart sind von Tobler ausgeführt worden. Die Palisadenschläuche wurden hart an der Basis abgetrennt. Nach Herstellung eines Wundverschlusses, worüber Näheres nicht mitgeteilt wird, sproßten aus dem verjüngten Ende der Schläuche dünne, chlorophyllarme Schläuche hervor, die sich verzweigten und teils rhizoidartige Lappen, teils kleine, chlorophyllreichere Bläschen bildeten. Letztere

traten fast stets nahe der Basis der Ausgangsblase auf. So kommt es am Fuße derselben zu einer »Zentrenbildung«, von der die Entstehung eines neuen Thallus ausgeht. Auf diese kurzen Angaben beschränkt sich die Mitteilung Toblers.

Ich verfuhr bei meinen Versuchen derart, daß ich mit dem Rasiermesser durch tangentiale Schnitte Partien der Rinde abtrug und die isolierten Palisadenschläuche in Petrischalen weiterkultivierte.

An ihrer Basis oberhalb einer natürlichen »Querwand« abgeschnittene Schläuche führen den Wundverschluß fast immer in der Weise aus, daß hinter einem abgestorbenen, grobkörnigen Plasmapfropf das lebende Plasma sich, eine Kuppe bildend, scharf abgrenzt. Die Chloroplasten ziehen sich von der Wunde ziemlich weit zurück, dann folgt dahinter gewöhnlich eine starke Anhäufung von Chloroplasten, die weiter oben wieder weniger dicht gelagert sind, bis sie am Scheitel der Blase wieder die übliche Anhäufung zeigen. Die ursprünglich nackte Plasmakuppe an der Wunde bekleidet sich nun bald mit einer Membran, die rasch in die Dicke wächst, geschichtet ist und schließlich eine oft sehr dicke Hautkappe bildet, die gegen die Wunde zu meist schön abgerundet ist (Fig. 5 *A*, *B*). Die Bildung dieser Narbenwände geht also ganz anders vor sich als die der normalen »Querwände«. Häufig werden sie allmählich wieder dünner, indem die äußeren Schichten Korrosionen erfahren und aufgelöst werden, was wahrscheinlich durch Bakterien bewirkt wird (Fig. 5 *C*)[1].

Wenn die Palisadenschläuche oberhalb der Basis, bis gegen die Mitte zu, durchschnitten werden, sterben sie gewöhnlich ab. Zuweilen tritt aber doch Heilung ein, indem sich das am Leben gebliebene Plasma von den abgestorbenen Teilen durch eine dünne Querwand abgrenzt, die später nur schwach oder gar nicht verdickt wird (Fig. 5 *F*, *G*). In einigen Fällen erfolgte der Wundverschluß auf sehr merkwürdige Weise, die noch einer näheren Untersuchung und Aufklärung bedarf. Die Seitenwände des im unteren Drittel querdurchschnittenen Schlauches ziehen sich in der Nähe der Wunde so stark zusammen, daß die Wundstelle zu einem ganz engen, nur 3—4 μ weiten Loche wird, in dem ein abgestorbener Plasmapfropf steckt (Fig. 5 *E*). Ob dann durch Bildung einer Querwand an der verengten Stelle ein vollständiger Verschluß hergestellt wird, konnte nicht ermittelt werden. Bemerkenswert ist, daß die kontrahierte Membran, die an der Wundstelle einen kurzen schnabelartigen Fortsatz bildet, eine größere Dicke besitzt als die übrige Schlauchwand. Ausnahmsweise erfolgt ein solcher Wunderschluß durch »Einschnürung«.

---

[1] Im Widerspruch zu Toblers und meinen Beobachtungen steht die Angabe Küsters (I. S. 185), wonach sich der Plasmainhalt eines verletzten Plasmaschlauches zu gesonderten, kugeligen Portionen zusammenballen soll, »die bei Verletzung der Schläuche alsbald das Weite suchen«. Wie die primäre Verletzung bewirkt wurde, wird nicht gesagt. Jedenfalls hat Küster die Schläuche nicht abgeschnitten, da er weiterhin mitteilt, daß die inneren Thallusteile, die er als Achsenschläuche bezeichnet, »unter starker Zugspannung stehen und die verletzte Zelle sozusagen bis auf den letzten Tropfen auspressen«. Da mir diese Angabe erst nachträglich bekannt wurde, konnte ich sie nicht nachprüfen. Ich halte es tatsächlich für möglich, daß wenn die Palisadenschläuche nicht abgeschnitten, sondern am Thallussproß verletzt werden, sie ihren Plasmainhalt ausstoßen, da sie sich wahrscheinlich unter tangentialer Druckspannung befinden. So löst sich vielleicht der obige Widerspruch.

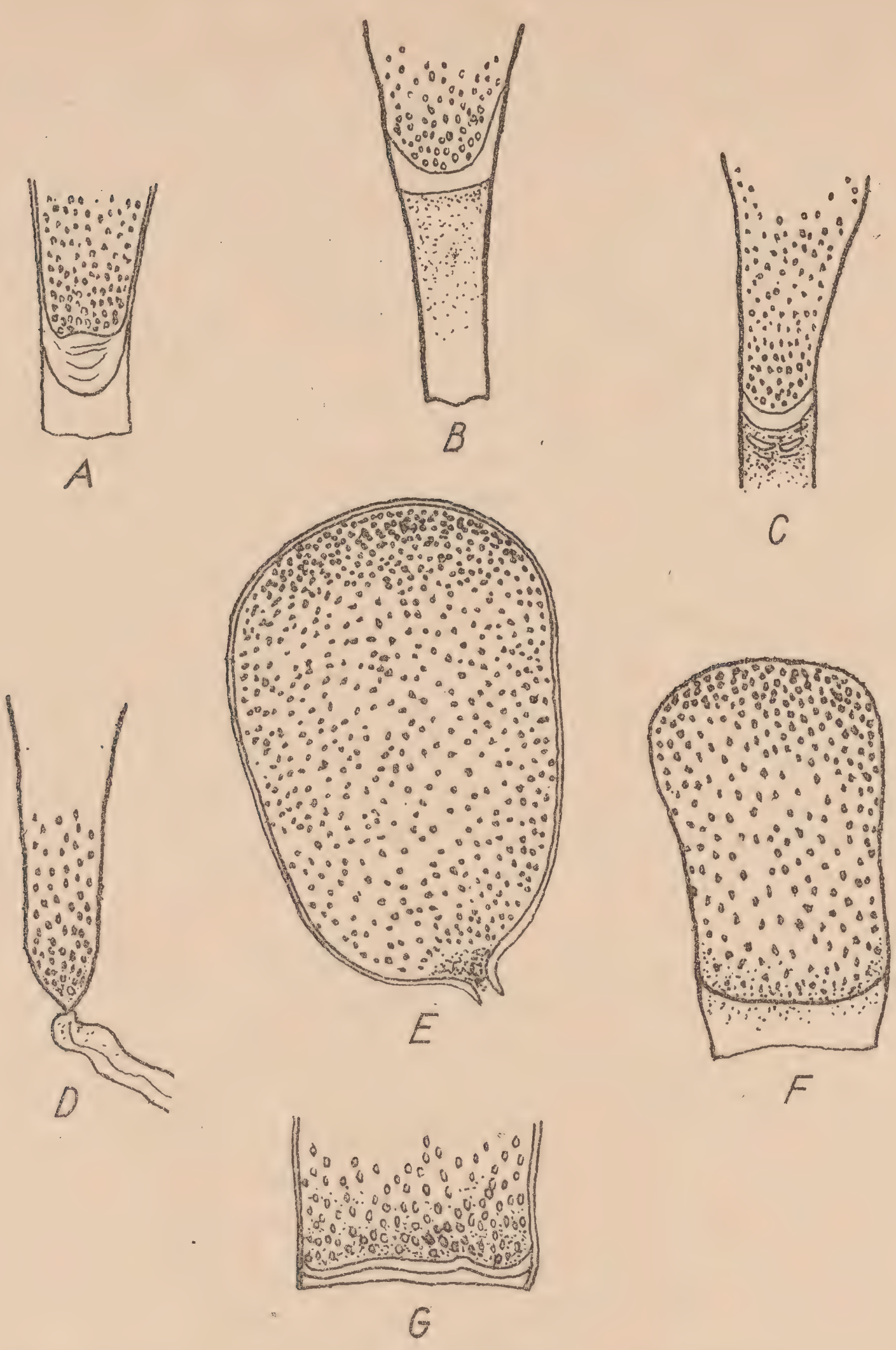


Fig. 5. Codium tomentosum. *A* und *B* Untere Partien von an ihrer Basis abgeschnittenen Palisadenschläuchen mit den dicken Narbenwänden unweit der Wundstelle. *C* Desgleichen, die Narbenwand ist auf ihrer Außenseite korrodiert und bröckelt ab. *D* Basales Ende eines abgeschnittenen Schlauches; Heilung durch Einschnürung. *E* Obere Hälfte eines in der Mitte durchschnittenen Schlauches; an der Wundstelle hat sich die Membran stark kontrahiert, das Wundloch ist verengt. *F* Obere Hälfte eines in der Mitte durchschnittenen Schlauches; Wundverschluß durch eine dünne Narbenwand. *B* Desgleichen, die Narbenwand hat sich etwas verdickt.

wie man den Vorgang bezeichnen könnte, auch an der Basis der Schläuche (Fig. 5 *D*). Wie die auffällige Kontraktion der Membran in der Nachbarschaft der Wunde zustande kommt, wäre näher zu untersuchen. Um eine elastische Kontraktion der gedehnten Membran nach Aufhebung des Turgordruckes kann es sich nicht handeln. Es muß irgendwie die Mitwirkung des lebenden Protoplasmas und seiner Kerne dabei im Spiele sein.

Die Angaben Toblers betreffs des Auswachsens von sich verzweigenden Fäden an der Basis des isolierten Palisadenschlauches kann ich bestätigen,

ebenso das Auftreten von chlorophyllreichen Bläschen an diesen Fäden. Erstere entspringen übrigens nicht selten auch direkt der Basis des isolierten Schlauches nach Heilung der Wunde.

V.

Die besprochenen Regenerationserscheinungen bei *Bryopsis* und *Codium* fordern schließlich zu einigen entwicklungsphysiologischen Bemerkungen heraus.

Die erste und wichtigste Frage, die sich einem aufdrängt, ist die: Warum verbleibt es nicht bei bloßer Heilung der Wunden entzweigeschnittener Fieder- und Stämmchenfragmente? Dem »Selbsterhaltungstriebe« von Teilen des Protoplasten müßte dies genügen. Wie kommt es, daß die geheilten Fragmente zu neuen Pflänzchen sich regenerieren?

Da die Assimilation in den Chloroplasten der isolierten Fragmente fortdauert, könnte die Anhäufung von Assimilaten den Anreiz zu neuen Wachstumsprozessen bilden. Die in den Chloroplasten sich anhäufende Stärke könnte freilich nur indirekt wirksam sein, indem sie die Chloroplasten deformiert und schädigt und so zur Bildung von Wundreizstoffen veranlaßt, die dann das Wachstum auslösen. Sollte es auch zur Erhöhung des Zuckergehaltes der Fragmente kommen, so würde vielleicht dieser den Wachstumsreiz abgeben. Dem sei nun wie ihm wolle; wenn die fortgesetzte Assimilationstätigkeit das erneute Wachstum auslösen sollte, so müßte es genügen, wenn die Fiederfragmente von *Bryopsis* weiter in die Länge oder auch in die Dicke wachsen, ohne irgendeine Organdifferenzierung einzugehen. Analoges würde auch für die isolierten Palisadenschläuche von *Codium* gelten.

Daß sich eine solche Organdifferenzierung fast immer einstellt, daß die aus den Fiederfragmenten von *Bryopsis* hervorsprießenden Ästchen zu kriechenden Ausläufern mit Rhizoiden werden und sich später geotropisch als Stämmchen aufrichten, daß die der Basis isolierter Palisadenschläuche von *Codium* entsprießenden Fäden neue Schläuche bilden, und daß so in beiden Fällen die Regeneration bis zur Bildung neuer Individuen fortschreitet, bedarf einer besonderen Erklärung. Ich glaube, daß sie folgendermaßen zu formulieren ist.

Jedes Organ, ja jeder Organteil hat ein Empfindungsvermögen dafür, daß er Teil einer Ganzheit, einer ganzen Pflanze ist. Daß zwischen den einzelnen Teilen des Gesamtorganismus die mannigfachsten Korrelationen bestehen, ist ja eine längst anerkannte Tatsache. Wird nun ein Organ oder Organstück isoliert, so empfindet es den Ausfall seiner früheren Beziehungen zum Gesamtorganismus und ist nun bestrebt, diese Beziehungen wieder herzustellen. Das ist nur dadurch möglich, daß es sich zu einer neuen Pflanze regeneriert.

Die Mittel, die dem isolierten Organ oder Organstück hierzu zu Gebote stehen, sind freilich gänzlich unbekannt. Es liegt nahe, an hormonale Reizwirkungen zu denken und solche auch bei den Regenerationsvorgängen der Stecklinge höherer Pflanzen anzunehmen. Diese Vorstellung würde sich mit

den vor kurzem ausgesprochenen Ansichten des Chirurgen A. Bier[1] decken oder sie wenigstens nahe berühren, der beim Menschen von Organhormonen und Regenerationshormonen spricht. Dementsprechend wäre wahrscheinlich auch der stimulierende Einfluß, den der Zusatz zerriebener Bryopsispflänzchen auf die Regeneration und das Wachstum der Fiederstückchen und der verletzten Pflänzchen ausübt, kein unmittelbarer; die Wundreizstoffe würden nur indirekt wirken, indem sie eine erhöhte Produktion von »Regenerationshormonen« auslösen oder das Protoplasma für diese Hormone empfindlicher machen. Da diese Annahmen rein hypothetischer Natur sind, verzichte ich darauf, sie weiter auszuspinnen.

Literatur.

Haberlandt, G., Über die Beziehungen zwischen Funktion und Lage des Zellkernes bei den Pflanzen, Jena 1887.

v. Hanstein, J., Einige Züge aus der Biologie des Protoplasmas, Bot. Abhandlungen, 4. Bd., 1880, S. 48.

Klemm, Über die Regenerationsvorgänge bei den Siphoneen, Flora, 78. Bd., 1894.

Küster, E., I. Zur Anatomie und Biologie der adriatischen Codiaceen, Flora, 85. Bd., 1898.

Derselbe, II. Über Vernarbungs- und Prolifikationserscheinungen bei Meeresalgen, Flora, 86. Bd. 1899.

Derselbe, III. Unter Derbesia und Bryopsis, Berichte der Deutsch. bot. Gesellschaft, 17. B., 1899.

Oltmanns, Fr., Morphologie und Biologie der Algen, 1. u. 3. Bd., 2. Aufl., Jena 1922 u. 1923.

Prowazek, S., Transplantations- und Protoplasmastudien an *Bryopsis plumosa*, Biolog. Zentralblatt, 21. Bd., 1901.

Derselbe, Zur Regeneration der Algen, Biolog. Zentralbl., 27. Bd., 1907.

Tobler, Fr., Zur Organisation des Thallus von *Codium tomentosum*, Flora, N. F., 3. Bd., 1911.

Winkler, H., Über Polarität, Regeneration und Heteromorphose bei *Bryopsis*, Jahrb. f. wissensch. Botanik, 35. Bd., 1900.

[1] Vgl. A. Bier, Über Organhormone und Organtherapie, Münchener Mediz. Wochenschrift. 1929, Nr. 25.

Adresse an Hrn. Max Planck zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. Juni 1929.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Zum fünfzigsten Male jährt sich der Tag, an welchem Sie als junger Student den Doktorhut erwarben und ins akademische Leben eintraten. Zu diesem Jubelfest entbietet Ihnen die Akademie, der Sie seit 35 Jahren als ordentliches Mitglied angehören, seit 17 Jahren als Beständiger Sekretar vorstehen, ihren von freudigem Stolz und aufrichtiger Dankbarkeit getragenen Festgruß.

Wenn wir heute mit Ihnen Ihre Tätigkeit während des verflossenen halben Jahrhunderts überschauen, so erfüllt uns Bewunderung und beinahe Verwirrung vor der überreichen, mannigfaltigen Fülle Ihres Schaffens. Aber bald verschwimmen dem schweifenden Blick die Einzelheiten. Wie ein strahlendes Kronjuwel von unermeßlichem Wert das Auge von allen übrigen Perlen und Edelsteinen abzieht und auf sich gebannt hält, so fesselt uns die Tat, durch welche Sie am Vorabend des neuen Jahrhunderts eine neue Physik, die Physik des Planckschen Wirkungsquantums, eingeleitet haben.

Vor einem Menschenalter sprachen Sie in Ihrer akademischen Antrittsrede aus, daß nur durch ganz neue allgemeine Ideen, durch Einführung neuer Postulate das unbestimmte Raten nach zutreffenden mechanischen Bildern in eine feste Richtung gewiesen werden könne. Die fundamentale Rolle, welche neben der Mechanik aller Wahrscheinlichkeit nach die Elektrodynamik dabei spielen würde, hoben Sie klar hervor. Ihre früheren Arbeiten hatten den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik auf dem Gebiete der Thermochemie und Elektrochemie zum Siege verholfen und wunderbare Klarheit über diese Gebiete verbreitet. In geradliniger Fortsetzung dieses Weges wandten Sie sich nun der Wärmestrahlung zu. Sie begannen mit einer tiefeindringenden theoretischen Untersuchung der irreversiblen Strahlungsvorgänge. Durch einfühlenden Vergleich des empirisch Bekannten mit den Forderungen der Theorie rangen Sie sich zu der unerhört kühnen Hypothese durch, daß die Energie zwischen Materie und Strahlung nur quantenhaft ausgetauscht werden könne. Der Vergleich mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz ergab die weitere Forderung, daß die Strahlungsquanten mit der Frequenz der Strahlung proportional sein müssen. Durch diese Erkenntnis war eine völlig neue Ära in der Physik eröffnet.

Weder Sie selbst noch irgend jemand anderer hat Ihre ungeheure Entdeckung in der Geburtsstunde mit Jubel begrüßt. Mit zäher Energie waren Sie bemüht, die Kluft zwischen Ihrer neuen Hypothese und altgewohnten Vorstellungen auszufüllen oder zu überbrücken, obwohl die Tragweite Ihrer Entdeckung dadurch vermindert worden wäre. Die Wahrheit stand Ihnen hier

wie stets hoch über persönlichem Ruhm. Ein so gewaltiger Schritt durfte nur für endgültig erklärt werden, wenn alle Versuche, ihn zu vermeiden, fehlschlugen. Sie schlugen fehl. Nur auf solche Weise konnte der Grundstein der neuen Physik, der das ganze Gebäude zu tragen bestimmt war, die Festigkeit und Unverrückbarkeit bekommen, die er heute besitzt.

Während von fremder Hand große und wichtige Bauten auf dem neuen Fundament errichtet wurden, die Theorie des lichtelektrischen Effekts, der spezifischen Wärmen, die moderne Atomtheorie, haftete Ihr Interesse an den grundlegenden allgemeinen Folgerungen für die Thermodynamik, die Ihnen ja bei allen Ihren Arbeiten Leitstern war. Sie erkannten den Zusammenhang des Nernstschen Wärmetheorems mit Ihrer Hypothese und schufen den Begriff der absoluten Entropie, der Ihnen unter anderem die Möglichkeit gab, das Theorem über die Erfahrung hinaus auf Gase auszudehnen und die Theorie der chemischen Konstante rationell zu begründen. Die Zelleneinteilung des Phasenraums, die Sie für statistische Zwecke einführten, enthielt die fundamentale Unbestimmtheitsrelation bereits in sich, die erst viel später auf Grund der neuesten Entwicklung expressis verbis statuiert wurde.

So reich und überreich die Früchte Ihrer unermüdlichen Tätigkeit während dieses halben Jahrhunderts auch ausgefallen sind, so gibt es doch kaum einen anderen Physiker, dessen mannigfach ausgebreitete und tiefeindringende Forschungsarbeit so klar und einheitlich von einer großen Idee getragen ist, nämlich: den Hauptsätzen der Thermodynamik zu völlig klarer und einwandfreier Deutung und auf allen Gebieten der Physik restlos zum Durchbruch zu verhelfen. So revolutionär sich heute der Enderfolg Ihres Schaffens darstellt, so war doch der Weg, der Sie dahin geführt hat, ein langsames, stetiges, folgerichtiges Fortschreiten unter Respektierung aller wirklich sichergestellten Wahrheiten, sorgfältigster Prüfung jeder neu hinzugefügten These.

Wenn die Akademie der dankbaren Anerkennung für das Große, das der ganzen Menschheit zugeteilt ist, den persönlichen Dank hinzufügt für die rastlose, aufopfernde Tätigkeit, welche Sie als Beständiger Sekretar in den Dienst der Akademie zu stellen nie müde wurden, so ist sie sich bewußt, daß dieser Dank nicht nur und nicht hauptsächlich an den genialen Forscher und Gelehrten, sondern an den guten, edlen Menschen gerichtet ist, der in schwieriger Zeit manche Woge zu glätten, manche Klippe zu umfahren verstanden hat durch seinen feinfühligen Takt, durch die makellose Reinheit seiner Gesinnung, vor welcher selbst gegnerische Meinung ehrfurchtsvoll das Haupt beugen muß.

Mögen Ihnen, hochgeehrter Herr Kollege, noch viele Jahre in der vollen Frische und Schaffenskraft vergönnt sein, in der wir Sie heute vor uns sehen als das seltene Beispiel eines Mannes, dessen Ruhm, unangetastet von kleinlicher Mißgunst, für alle Zeiten in die Sterne geschrieben ist.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Alte und neue Irrwege auf dem Gebiete der Volksernährung.

Von Max Rubner.

(Vorgetragen am 20. Juni 1929 [s. oben S. 254].)

I.

Die nationalen Ernährungsformen haben sich auf dem Boden des Eigenbaues oder der Tierpflege unter der Leitung instinktiver Regulation durch den Geschmack, die Empfindungen der Leistungsfähigkeit und gesundheitlichen Bekömmlichkeit im Laufe von Jahrhunderten und Jahrtausenden entwickelt. Jede Nation zeigt an sich Varianten der Ernährung, die sich wie ein Mosaikbild zu einem großen Ganzen zusammenfügen. Die Varianten sind bedingt vor allem durch die Unterschiede der Nahrungsquellen zwischen Produzenten und Konsumenten, durch die Gliederung zwischen Stadt und Land.

Die Ernährungsweise einzelner sozial wichtiger Gruppen unserer Bevölkerung, namentlich der sozial am ungünstigsten stehenden Teile unserer Bevölkerung, habe ich 1908 eingehend behandelt und ihren Zusammenhang mit Alkoholismus und unzweckmäßigen Lebensgewohnheiten geschildert und das öffentliche Interesse hierauf gelenkt. Auf die Frage der Preisverhältnisse, Volksküchen, der Landflucht und deren Folgen für die in die Städte Abwandernden wurde besonders Rücksicht genommen. Schon vor dem Kriege spielte die Frage der Eiweiß- und Fleischversorgung der niederen Volksschichten eine große Rolle, wie auch der Rückgang eines geordneten Küchenwesens (Rubner, Volksernährungsfragen, Leipzig 1908 und Wandlungen der Volksernährung, Leipzig 1913). Diese natürlichen Varianten haben sich seit einem Jahrhundert, seit der Einführung der Industrie, seit der Freizügigkeit und den reicheren Verkehrsmitteln, zum Teil auch in dem Sinne geltend gemacht, daß, wie in den Volkstrachten es deutlich sichtbar wird, mehr und mehr nivellierende Tendenzen gegenüber älteren Ernährungsformen zum Schaden des Ganzen sich geltend machen. Alle die eben angedeuteten Umwandlungsformen treffen hauptsächlich bestimmte Volksschichten und können als natürliche Varianten angesehen werden.

Seit Mitte des vorigen Jahrhunderts begegnen wir aber Bestrebungen, welche das ausgesprochene Ziel haben, in den natürlichen Verlauf der traditionellen Ernährungsformen einzugreifen und neue Formen an Stelle eines Teiles oder der ganzen Individualernährung zu setzen.

Es sind durchaus keine volkstümlichen Bewegungen, sondern Vorschläge, meist auf mißverstandenem Boden fußend oder als Ausfluß bestimmter ethischer Grundsätze zu betrachten. Viele dieser Vertreter sehen in unserer heutigen Ernährung eine Entartung, eine Gefahr, die Ursache zum Niedergang unserer Rasse und wollen, getrieben von einer unverständlichen Mystik, zurück »zur Natur« und preisen das goldene Zeitalter einer viele Jahrtausende hinter uns gelegenen Periode des Menschengeschlechts als das Lebensideal.

Solche Gedanken erinnern zum Teil an die nicht so ferne Zeit, als man noch enge Beziehungen zwischen Krankheit und Nahrung annahm und eine sehr komplizierte Diätetik ausgebildet hatte. Davon soll aber im nachstehenden nicht die Rede sein, sondern nur von den eigentlichen Änderungsvorschlägen, die sich auf die Volksernährung beziehen.

Die Physiologie und die Hygiene haben sich stets sehr zurückhaltend gegenüber speziellen Ernährungsformen gestellt, weil solche Probleme nur schwer einer exakten Behandlung zugängig schienen. Nur in allgemeinen Zügen sucht man Unterernährung oder Überernährung zu umgrenzen, hat gegen Einseitigkeit der Ernährung Stellung genommen, Richtlinien für die Ernährung beim Wachstum oder für besondere Formen der Massenernährung, z. B. für die Soldaten, für Gefängnisse, Waisenhäuser usw. gegeben, mehr quantitativer als qualitativer Natur.

Die Vorschläge zielten auf die Erhaltung der allgemein üblichen Formen der Nahrungsversorgung im Rahmen der national bedingten Nahrungsmöglichkeiten.

Dieser vorsichtig konservativen Richtung gegenüber stellen sich eine Reihe von Ernährungssekten auf den Standpunkt der Bekämpfung des Hergebrachten, mit der Behauptung, die üblichen Kostformen seien die Ursache von Gicht, Arteriosklerose, Neurasthenie, Magen- und Darmerkrankungen, Diabetes u. dgl. Manche der neuen Vorschläge verlangen geradezu eine völlige kulturelle Umstellung.

Merkwürdigerweise findet sich das Sektierertum in ausgeprägter Form nur bei jenem Teil der Menschheit, welche zu den Brotessern gehören, während die Breiesser auch heute noch konservativ geblieben sind, außerdem sind es auch nicht die romanischen Stämme, welche revolutionär vorgehen. Träger der Propaganda sind hauptsächlich die Nordamerikaner, die Engländer und die Deutschen. Die letzteren haben zum großen Teil das Sektierertum von Amerika bezogen. Meist sind es Laien, welche solche Bewegungen einleiten und fördern, aber in den letzten Jahrzehnten finden sich doch auch Ärzte als Führer solcher Sekten. Als Lehren, durchsetzt von widersinnigen, weil mißverstandenen physikalischen, chemischen und physiologischen Voraussetzungen, erschienen sie in breiter Aufmachung in der Literatur.

Es ist nicht gut möglich, alle diese Verschrobenheiten restlos zu erfassen, zumal die Lehren der Sekten auch nicht alle festumschriebenen Formen angenommen haben, vielmehr zahllose Spielarten aufweisen. Ein reiches Schrifttum an populären Publikationen in medizinischen Zeitschriften, Tagesblättern, im Radio sorgt häufig für die Verbreitung der Lehren in weite

Massen des Volkes, wobei auch mitunter rein materielle Interessen und spekulative Unternehmungen einen Deckmantel finden.

Da die Lebenshaltung auf der Basis mancher dieser Ernährungssekten tatsächlich Schaden stiftet, wirtschaftliche Nachteile bringt und durch die Behauptung, daß andere Ernährungsweisen den Menschen schwerwiegende gesundheitliche Nachteile und Verkürzung des Lebens bringen, weite Kreise beunruhigt und aufregt, liegt nicht nur ein wissenschaftliches, sondern auch ein öffentliches Interesse vor, zu den Fragen Stellung zu nehmen.

II. Das Vollkornbrot.

Die ältesten Reformversuche gelten dem Brote; also einem einzelnen Nahrungsmittel, und da dieses nur etwa 30% von der ganzen erforderlichen Nahrungsmenge ausmacht, hat der über das Brot entstandene Streit keine so große Bedeutung wie andere radikalere Ernährungsformen, immerhin aber doch volkswirtschaftliche Bedeutung. Im großen und ganzen dreht es sich um die wichtigste aller Streitfragen: soll die Kleie im Brote bleiben oder abgetrennt werden? Liebig befürwortete das Mitvermahlen der Kleie, weil sonst das Brot durch Verlust der Salze der Kleie unverdaulich würde. Meine experimentellen Untersuchungen haben schon vor Jahrzehnten diese Annahme als irrig erwiesen. Je weniger Kleie im Brot ist, um so besser wird es verdaut; die Salze der Kleie werden zum größten Teil unbenutzt wieder ausgeschieden. Die Kleiebewegung kam weiter durch Graham von England aus erneut in Fluß; das Brot wurde dann aus enthülstem Getreide (dekorticiertem) hergestellt. Zweifellos hatte die von England stammende Bewegung ihren Grund in dem gesuchten Ausgleich gegenüber einer sehr fleischreichen und auch sonst gut resorbierbaren Kost. Die nur schlecht verdaute Kleie schafft daher vielen Personen eine gewisse Erleichterung.

Von anderer Seite hat man das Verzehren von grobem Schwarzbrot bei uns empfohlen, weil es für die Erhaltung der Zähne nötig sei, ohne zu bedenken, daß $^3/_5$ der Menschheit gar kein Brot genießen, ohne Schaden an ihren Zähnen zu erleiden.

Dutzende von Erfindungen bemühten sich, weil man doch die erheblichen Verluste an Nährstoffen bei Mitverbacken von Kleie allmählich gelten ließ, durch Feinvermahlen u. dgl. die Nachteile abzuwehren.

Auch dabei erzielt man keine günstigeren Resultate, weil nach meinen Untersuchungen der neueren Zeit die reichlichen Verluste bei kleiehaltigen Brotsorten in der chemischen Beschaffenheit der Kleie und zum größten Teil in dem Anreiz zu stärkerer Sekretion im Darme liegen. Der Weizen steht, was Verdaulichkeit und Nährwert anlangt, über dem Roggen, der ja auch in praktischer Verwendbarkeit vom Weizen übertroffen wird. Die physiologisch-landwirtschaftlichen Untersuchungen haben ergeben, daß an Nährwerten nichts verlorengeht, wenn man den größeren Teil der Kleie abtrennt und zur Verfütterung benutzt. Man erhält an wertvollen tierischen Produkten (Fleisch, Fett, Milch) ebensoviel für den Menschen zurück, wie dieser unter teilweise unbequemen Ernährungsvorgängen selbst an der Kleie hätte ge-

winnen können. Vom Standpunkt der Welternährung treten die Roggen bauenden Länder immer mehr in den Hintergrund. Die medizinische Verwendung kleiehaltiger Brote zur Bekämpfung von Darmträgheit wurde schon oben berührt.

III. Die Proteinphobisten.

Die Eiweißstoffe sind zum Aufbau und Wachstum unerläßlich, aber auch beim Erwachsenen muß stets ein bestimmter Bruchteil der Nahrung aus Eiweiß bestehen.

a) Die älteren theoretischen Anschauungen über die Ernährung rühren von Liebig her. Anknüpfend an Hallers Vorstellungen von der Notwendigkeit der Ernährung mit Rücksicht auf die »Abreibung« der Körperbestandteile, gruppiert Liebig die Nährstoffe in plastische und in respiratorische. Die ersteren — Eiweiß — sollten zum fortwährenden Ersatz der durch Arbeit verbrauchten Muskelsubstanz dienen, die respiratorischen zur Wärmehaltung des Körpers. Populär gesprochen, gab also Eiweiß, d. h. Fleisch und ähnliches, auch »Kraft«.

Die experimentelle Nachprüfung dieser Theorie ergab die überraschende Tatsache, daß der Eiweißverbrauch von der Arbeitsleistung völlig unabhängig ist, daß aber der Verbrauch von N-freien Stoffen (Fetten und Kohlehydraten) bei jeder Bewegung mehr oder minder gesteigert wird. An dieser Tatsache ist nicht zu zweifeln. Es hat sich aber doch herausgestellt, daß der Eiweißkonsum auch zur Hebung der körperlichen guten Beschaffenheit beitrage, also indirekt der Leistungsfähigkeit zugute kommt, wie auch bei Schwerarbeitern nach praktischer Erfahrung der Eiweißverbrauch in der Nahrung anderen Arbeiterkategorien gegenüber durchschnittlich erhöht gefunden wird.

b) Eine ganze Reihe von Sekten fußen auf der Idee, daß die Menschen zuviel Eiweiß verzehrten, bewegen sich also in entgegengesetzter Richtung zu Liebig. Als Folgen eines nach ihrer Meinung zu großen Eiweißverbrauchs treten dann Gicht auf oder Arteriosklerose, Neurasthenie, Migräne usw. Ich fasse diese Gruppe als Proteinphobisten zusammen. Einer der ersten Vorkämpfer für die »Eiweißminderung« war Chittenden in New Haven.

Ich habe mich schon vor Jahren in ganz ausführlicher Weise mit dieser Sekte, zu der auch Hindhede gehört, auseinandergesetzt und gezeigt, welche Irrtümer bei diesen Proteinphobisten, deren Gemeinde aber selbst im Ausland sehr gering ist, vom ernährungsphysiologischen Standpunkt vorliegen (Rubner, Über moderne Ernährungsformen, Berlin 1914). Ich habe also hier nur einige wichtigere Momente, die meine früheren Darlegungen ergänzen, noch anzuführen.

Um das Mißverständliche in der Theorie der Proteinphobisten zu verstehen, muß man sich die feststehenden Tatsachen über den Eiweißkonsum beim Menschen überhaupt vor Augen führen.

Zunächst gibt es auch heute noch kleine Völkchen wie die Festlandseskimos, die ausschließlich sich von den fleischigen Teilen der Renntiere ernähren, mit spärlichen gelegentlichen Zugaben von Süßwasserfischen. Ernährungsphysiologisch besteht ihre Nahrung überwiegend aus Eiweiß und einem wechselnden Anteil von Fett, alles roh genossen, da diesen Eskimos Feuerungs-

material fehlt. Sie leben unter den klimatisch härtesten Bedingungen, sind kräftig, leistungsfähig, erreichen ein hohes Alter, Kinder bleiben bis zum 3. oder 4. Jahre an der Mutterbrust. Von den gefürchteten Erkrankungen nach Fleischgenuß läßt sich bei ihnen nichts nachweisen.

Der Stoffwechsel, d. h. der Nahrungsverbrauch, ist durch das ganze Tierreich und auch beim Menschen um so größer, je kleiner ein Organismus ist; so verbraucht der Neugeborene pro Kilo fast dreimal soviel Nahrung wie der Erwachsene. Im kleinen Körper wird also auch unter vergleichbaren Verhältnissen entsprechend mehr Eiweiß verbraucht, also müßte das Kind (des Eskimos) durch das Fleisch, d. h. Eiweißgenuß, ganz besonders gefährdet sein, wofür keine Beweise vorliegen.

Wer weiter biologisch denken will, müßte sich sagen, daß in der Säugetierreihe vom größten zum kleinsten der Nahrungsverbrauch und auch der Eiweißverbrauch um viel hundertmal verschieden ist, ohne daß sich an Stoffwechsel und Leben irgendwelche prinzipiellen Unterschiede zeigen. Die Reinheit des Blutes von Stoffwechselprodukten zu erhalten, dazu dienen die Nieren und sie leisten bei groß und klein vollkommen ihre Aufgabe.

Das entgegengesetzte Extrem der Ernährung wäre das N-Minimum, das ich zuerst bei experimentellen Versuchen aufgefunden habe, wobei nur 4—5 % der Nahrung aus Eiweiß bestehen, der Rest durch Fett und Kohlehydrate zu decken ist. Aus mannigfachen ernährungsphysiologischen Gründen ist eine Dauerernährung auf der niedersten Stufe der Eiweißverbraucher, wie von mir a. O. begründet wurde, unmöglich.

Auf welcher Basis zwischen Minimum und Maximum der Mensch sich im Durchschnit einstellt, dafür könnten an sich sehr verschiedene Grenzwerte gegeben sein. Darüber entscheiden die Ernährungsverhältnisse großer Volksmassen.

Aus den Erfahrungen über die Ernährung ganzer Nationen, über die ich früher berichtet habe, ergibt sich (bei 2876 Kal. Gesamtverbrauch und 86 g Protein) ein Gehalt von 12.2 % Protein, also das $2^1/_2$—3 fache der untersten Grenze des für kurze Zeit erhaltbaren Minimums.

Dabei ist es gleichgültig, welcher Grad der Mischung zwischen Animalien oder Vegetabilien als Nahrung gewählt wird. Der Umstand, daß obige Zahlen der Ernährungsweise von etwa 450 Millionen Menschen der wichtigsten Kulturländer, deren sanitäre Verhältnisse vortrefflich sind, entsprechen, gibt der empirischen Nahrungswahl ein besonderes Gewicht.

Gicht, Arteriosklerose, die angeblich häufigsten Krankheiten bei Eiweißüberfluß, kommen auch bei vorwiegend vegetabilischer Kost vor und sind vielleicht die ältesten Krankheiten des Menschengeschlechts. Die Gicht ist nicht verursacht durch Fleisch- und Eiweißgenuß (animal. oder vegetabil.), sondern eine vererbbare Krankheit, bei deren Bestehen auf eine angemessene Diät geachtet werden muß.

Während Chittenden eine mäßige Reduktion des Eiweißgenusses vorschreiben wollte, ist Hindhede auf das Extrem des N-Minimums heruntergegangen, wozu keine Veranlassung vorliegt und in manchen Fällen bei Anhängern eines solchen Regimes schwere Schädigungen der Leistungsfähigkeit

hervorgerufen werden. Die Hauptwirkung der Blockade Deutschlands bestand in der Enteiweißung der Kost, mit welchen Folgen, ist bekannt. Die Hindhedesche Kost wird überreich an Fett, und niemals könnte man in Deutschland die Fettmassen aufbringen, um diese Kost zu realisieren, und man müßte schon zu einer gewaltigen Einfuhr an Butter aus Hindhedes Heimat, Dänemark, greifen.

Worin nun der Schaden des Eiweißes gesucht werden soll, sagt die sogenannte Schlackentheorie. — Unter Schlacken will man hauptsächlich N-haltige Spaltprodukte aller Eiweißstoffe — also Harnstoff und Harnsäure usw. — verstehen. Diese sollen sich im Körper anhäufen und Krankheiten erzeugen. Die ganze Schlackentheorie ist schon durch das oben Gesagte über die Größe des Eiweißumsatzes vom Standpunkt der vergleichenden Physiologie widerlegt.

Die Schlackentheorie drängt in ihren äußersten Konsequenzen auf eine möglichst N-arme Kost, die schon oben behandelt worden ist.

Die Vorstellung einer engen Bindung von Eiweiß mit »Schlackenbildung« ist an sich falsch, weil die Art der Spaltung des Eiweißes in Harnstoff und einige andere Nebenprodukte ganz von der absoluten Größe der Eiweißzersetzung abhängig ist. Je mehr man mit der N-Zufuhr heruntergeht, um so mehr entstehen fremdartige Produkte, und je höher der Eiweißverbrauch steigt, um so mehr Harnstoff überwiegt; bei minderwertigem Eiweiß muß man mehr »Schlacken« in den Kauf nehmen. Die Harnsäuremengen können bei gleicher N-Zufuhr bei animaler wie bei vegetativer Kost dieselben sein, die Harnsäure stimmt nicht mit dem Gehalt an Purinen in der Nahrung überein. Einen großen Teil dessen, was man mit zu den Schlacken rechnen will, sind Extraktivstoffe (N-haltige), die besonders bei pflanzlicher Kost, z. B. Gemüsen, viel reichlicher sind wie bei Animalien. Halbverbrauchte Stoffe kommen besonders bei pflanzlicher Kost in großen Mengen in den Kreislauf, herrührend von den Verdauungssäften. Durch die Erfahrungen mit reiner Fleischkost weiß man, daß es eine besondere Aufspeicherung von »Schlacken« nicht gibt, auch jahrelange Eigenversuche mit Fleischextrakt haben solche Anhäufungen von Schlacken nicht nachweisen lassen. Die Ausspülung von Zersetzungsprodukten aus dem Körper ist unter normalen Verhältnissen eine vorzügliche, solange es an Flüssigkeit nicht mangelt. Nur bei starker Wasserentziehung bleiben sowohl organische Stoffe wie auch Salze reichlicher im Organismus zurück. Die künstliche Durchspülung des Körpers durch reichliche Wasserzufuhr bringt nur eine geringfügige Ausspülung von N-haltigen Zersetzungsprodukten zur Ausscheidung.

Viele Ärzte scheinen heutzutage infolge der Angst vor Schlacken, die für den normalen Menschen ganz unberechtigt ist, zu vergessen, daß unter den drei organischen Nährstoffen das Eiweiß der interessanteste und in seinen biologischen Werten der wichtigste ist. Nur ganz nebenbei sei bemerkt, daß die Hauptträger des tierischen Eiweißes außerordentlich gut resorbierbaren Nahrungsmitteln entstammen und eine ungemein geringe Belastung des Darmes bringen, was für viele Berufe von besonderer Wichtigkeit ist.

Unter den Eiweißstoffen haben wir solche, welche in einfachster Weise belebtes Material unseres Körpers bilden, also zur Fortpflanzung, Ergänzung

unseres Körpers dienen, und die ganze Reihe alles Belebten auf der Welt geschaffen haben. Eiweißstoffe sind außerdem die einzigen Nährstoffe, die, wie ich zuerst gezeigt habe, eine gewaltige spezifisch-dynamische Wirkung entfalten können, nach unserm Behagen wärmeerzeugend bei absoluter Muskelruhe wirken, wärmeregulatorische Aufgaben lösen, demnach auch jene Stoffe sind, die uns befähigen, besonderen Härten kalter Klimate entgegenzutreten. Auch manche andere physiologische Wirkung könnte noch angeführt werden.

IV. Der Vegetarianismus.

Bevölkerungsgruppen, welche nur von Vegetabilien leben, gibt es unter den Ostasiaten mehrere in Indien, China, Japan, ja die Ernährung der Japaner insgesamt ist überwiegend auf Pflanzenkost aufgebaut. Unverkennbare Mängel einer solchen Kost haben bereits in den letzten Jahrzehnten in weiten Kreisen Ostasiens eine Abwendung zur gemischten Kost zur Folge gehabt. Die Vegetabilien machen aber auch bei den Völkern mit gemischter Kost einen erheblichen Teil der letzteren aus, bei uns liefern die Vegetabilien etwa $^2/_3$ des gesamten Energiebedarfs. Im allgemeinen ist die vegetabilische Kost der Ostasiaten ungemein fettarm. Die vegetarische Sekte ist streng genommen auf ethischen Grundsätzen aufgebaut, und der Name Vegetarier leitet sich von vegetus »gesund« ab. Die Vegetarier enthalten sich aller tierischen Nahrung, sind Antialkoholiker, verwerfen Tabak, Kaffee, Tee als schädliche Nahrungsmittel, sind Anhänger der medizinlosen Heilkunde, Impfgegner und Anhänger bestimmter Bekleidungsreformen, welch letztere mehrfach gewechselt haben (Wollenregime, Baumwollregime, Leinenregime). Man schätzte früher die Zahl der strengen Vegetarier in Deutschland auf 10—15000. Von den Vorstellungen über die Schädlichkeit der animalen Nahrung, welche in vegetarischen Kreisen herrschen, sei abgesehen. Die Behauptung einer besonderen Leistungsfähigkeit der Vegetarier im Sport ist zweifellos unbegründet. Die Lehre ist völlig unschädlich, aber vom volkswirtschaftlichen Standpunkt zu allgemeinerer Anwendung unfähig, weil unsere Bodenerträgnisse zu einer rein vegetarischen Ernährung des Volkes nicht ausreichen können; die Viehzucht gestattet, sonst unbrauchbare Strecken des Landes zur Fleisch-, Milch- usw. Gewinnung auszunutzen und liefert $^1/_3$ unserer ganzen Nahrungsmenge. Die vegetarische Kost ist bei dem reichlichen Gebrauch von Gemüsen und Obst viel teurer als die gemischte Kost, in ihrem Volumen sehr groß, belastet Magen und Darm und regt die Verdauungsdrüsen zu ungemein reichlichen Sekretionen an. Mit den Bedürfnissen des regen Kulturlebens in der Neuzeit ist der Vegetarismus, vom Ernährungsstandpunkt betrachtet, nicht gut zu vereinen.

Der Nährwert der Vegetabilien wird vielfach zu hoch veranschlagt, auch wenn man die Ausnutzung derselben nach neueren Versuchen richtig berechnet (Rubner, Die Verdaulichkeit der Vegetabilien, Arch. f. Anat. u. Phys. 1918 p. 53). Gemüse und Obst können 20—30% ihrer Trockensubstanz an Zellmembranen erhalten (l. c. p. 66), bei deren Zerlegung im Organismus kaum nennenswerte Mengen von Energie gewonnen werden können (l. c. p. 130).

V. Die Nährsalzsekten.

Mensch und Tiere wie auch die Pflanzen gebrauchen zum Wachsen und Leben überhaupt der Zufuhr von Salzen, welche besonders bei den Pflanzen große Variationsbreite zeigen, während bei den Tieren verschiedener Arten und Spezies die qualitativen und quantitativen Variationen geringer sind. Jedes Organ hat seine Besonderheiten im Salzgehalt. Wenn auch nur eine einzige wichtige Substanz in der Salzzufuhr fehlt, läßt sich eine Ernährung nicht durchführen. Die Frage der Möglichkeit gegenseitiger Vertretung unter den Bestandteilen der Salze ist noch ungelöst. In den 50er Jahren des vorigen Jahrhunderts haben die Physiologen die Folgen der vollkommenen Ascheentziehung oder der Entziehung von Kalk oder Eisen experimentell festgestellt, aber bis heute ist man zu einer Grenzwertbestimmung aller Aschenbestandteile nicht gekommen. Schon bei den ersten Versuchen der Salzentziehung zeigte sich, daß der Körper einige Salze leicht abgibt, andere mit Zähigkeit festhält. Aus den Versuchen meines Laboratoriums hat sich diese Wandelbarkeit des Salzreichtums des Körpers noch klarer ergeben. Nach Kalkgaben oder Kochsalzgaben in der Kost bleiben oft gewaltige Mengen von diesen Salzen zurück, ohne daß der Ort der Speicherung im einzelnen uns bekannt wäre. Sie werden beim Wechsel der Kost dann ausgeschieden, und der Körper stellt sich auf eine neue Variante ein. Untersucht man einen Organismus oder ein Organ, so kann man die Salze in wasserlösliche und in gebundene trennen. Der Salzgehalt an wasserlöslichen Salzen variiert mit dem Ernährungszustand. Macht man den Organismus durch Verweigerung von Flüssigkeitszufuhr trockner — die Grenzen der Eintrocknung sind übrigens sehr enge gesteckt —, so werden sehr bescheidene Mengen von Kochsalz und Phosphaten aufgespeichert; bei Abnahme des Ernährungszustandes, wie Hunger, nimmt der Kochsalzgehalt zu, während die Phosphate abnehmen.

Verzehrt man überhaupt keine Salze, so bleiben Harn und Kot doch reich an Salzen (Kot etwa 1.7 g Salze je Tag); bei aschearmen Nahrungsmitteln, wie z. B. Feinbrot, finden sich in den festen Ausscheidungen etwa $^1/_4$ der Salze, bei kalkreicher Kost (Milch) etwa die Hälfte der Zufuhr.

Von den Salzen, die man in Nahrungsmitteln einführt, geht ein Teil ohne weiteres verloren als unverdaulich, ein anderer wird resorbiert, kreist mit dem Blut und kann unter Umständen gleich zurückgehalten werden, weil etwa ein Mangel vorhanden war oder Gewebe aufgebaut wird, von dem Überschuß über den Bedarf werden vor allem Eisen- oder Kalksalze wieder im Darm ausgeschieden. Wenn der Eiweißbedarf des Körpers nicht gedeckt ist, wird mehr oder minder viel von Organsalzen im Harn oder Kot ausgeschieden.

Wenn ein Salzgleichgewicht besteht und ebenso viele Gramm ausgeschieden wie aufgenommen werden, beweist das noch nicht ein Gleichgewicht im Sinne der einzelnen Komponenten.

Ändert man die Nahrungsmittel unter Beibehaltung des vorangehenden Salzgehaltes der Kost, so kann sofort eine Änderung des Salzbedarfes eintreten, weil die Ansprüche an die Verdauung ganz ungleiche sind. Bei der

Resorption von 100 Kal. Brot aus feinstem Weizenmehl z. B. bleiben nur 3.8 Kal. in der Form von Resten der Verdauungssäfte im Darm mit reichlichem Salzgehalt liegen, bei der Resorption von Gemüse wie Wirsingkohl aber 42.6 Kal., also 11.2 mal soviel wie bei Brot.

Aus den Analysen der Ausscheidung von Salzen im Harn und Kot kann man nicht entnehmen, welche Salze zu irgendeiner Zeit im Blut und den Säften zirkulieren, weil die zeitliche Verteilung der Ausscheidung der Salze je nach den Nahrungsmittelgemischen, welche man aufnimmt, und je nach den Getränken (Kaffee, Tee) durchaus wechselt.

Die Aufnahme und Verteilung der Salze ist also in hohem Maße kompliziert und von den verschiedensten Bedingungen der Ernährung abhängig.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß die europäischen Völker relativ reichlich Aschebestandteile in ihrer Kost aufnehmen und daß andere Völker, die viel weniger von ihnen einführen, trotzdem keine Erkrankungen zeigen, die auf Aschemangel zurückzuführen wären. In unserer europäischen Kost liefert der animalische Teil, obschon er nur $^1/_3$ aller Kalorien uns bietet, mehr Salze als der vegetabile Teil der Kost. Eine wesentliche Quelle der Kalkzufuhr bringt uns die Milch. Ein Fleischfresser kann sich mit den Weichteilen eines Tieres allein nicht dauernd nähren, wohl aber dadurch, daß er einen Teil der Knochen mitverzehrt, erhält er genügend Kalk, doch tragen kalkhaltige Trinkwässer mit zur Kalkversorgung bei. Vom Standpunkt der Versorgung mit Kalk ist das Mitverzehren der Kleie im Brot ohne Bedeutung.

Von mancher Seite wurde die Notwendigkeit der Zufuhr von künstlichen Nährsalzgemischen für notwendig erachtet, die meist der Milchasche nachgebildet waren. Bei einer nicht einseitigen, sondern bei Durchhaltung der gemischten Kost sind solche Salze vollkommen entbehrlich, denn die übliche Kost enthält zweifellos mehr Salze, als wir unbedingt notwendig haben. Bei Mangel an Animalien und Milch können vor allen die Gemüse uns reichlich, ja überreichlich Salze bieten, zum Teil fast zehnmal soviel — von der Milch abgesehen — als die übrigen Animalien. Ein paar Beispiele werden das Gesagte erläutern.

Auf 1000 Kalorien Nährwert treffen:

	CaO	MgO	F_2O_3	P_2O_5
bei Weizen	0.146	0.149	0.015	0.974
» magerem Fleisch	0.151	0.383	0.055	7.248
» Muttermilch . . .	0.600	0.096	0.003	0.475
» Kuhmilch	2.405	0.286	0.031	2.813
» Weißkraut	2.800	1.028	—	4.885
» Spinat	6.771	3.348	0.188	5.800
» Kopfsalat	7.822	3.314	0.197	4.885

Die angeführten Gemüse weichen in der Zusammensetzung stark von der Milch ab. Die Kuhmilch enthält relativ mehr P_2O_5 als die Muttermilch.

Die Kuhmilchsalze als Vorbild der Salzversorgung zu nehmen, ist unzulässig, da die Zusammensetzung der Asche ja für das wachsende Kalb sich eignet. Vielfach wird Propaganda für eine besondere Vermehrung der

Kalksalze in der Kost gemacht; eine solche Propaganda hätte vielleicht in der Nachblockadezeit für die Ernährung der Jugendlichen eine gewisse Berechtigung gehabt, weil damals das wertvollste Nahrungsmittel für die Jugend, die Milch, fehlte.

Wenn man annimmt, daß eine tägliche Zufuhr von Kalk (CaO) von 0.5 g für einen Erwachsenen notwendig sei, so läßt sich diese Menge durch 310 g Milch oder durch 300 g Handelsware Spinat oder 663 g Salat decken, wodurch also der Charakter der üblichen Ernährungsweise erheblich geändert wird (Rubner, Vierteljahresschr. f. gerichtl. Medizin etc., 3. Folge, 60. Bd., p. 19). Bei solch theoretischen Vorschlägen, die Gemüse in hohem Maße zur Ernährung heranzuziehen, bedenkt man nicht, daß die Gesamtproduktion eines Landes nicht beliebig gesteigert werden kann und daß ferner die Gemüse, was den Nährwert anlangt, ungeheuerlich hoch im Preise stehen. Statt Spinat kann man sich für das gleiche Geld dreimal soviel an Nährwerten in Fleisch kaufen oder viermal soviel in Milch usw.

Vor relativ kurzer Zeit sind die Nährsalzsekten noch um eine vermehrt worden. Gesundes Leben soll wesentlich von einer besonderen Mischung der Salze abhängig sein. Auf Grund von den üblichen Aschenanalysen werden Säuren und Basen einander gegenübergestellt, die Basen sollen dann überwiegen, da diese den Zweck hätten, im Körper eine alkalische Reaktion hervorzurufen. Eine solche Nahrung würde auch den Verbrauch von Eiweiß herabsetzen.

Keine der hier gemachten Voraussetzungen für die Theorie ist richtig. Auf Grund der üblichen mineralischen Analysen kann man die wirklichen Basenverhältnisse der Salze im Körper nicht berechnen, was dann die Reaktion der Säfte anlangt, so ist diese nicht alkalisch, sondern neutral, und endlich haben alle Experimente gezeigt, daß von einer Verminderung der Eiweißzersetzung keine Rede sein kann. Trotz alledem findet man jetzt noch weite Kreise unter den Ärzten, welche nach solchen unhaltbaren Normen die Basizität der Nahrung zusammenstellen.

Die Aschenverhältnisse der Säfte lassen sich durch ein so einfaches Verfahren nicht beeinflussen und regulieren. Schon bei dem natürlichen Abbau der Nahrungsmittel im Organismus entstehen in vielen Fällen andere Gruppierungen der anorganischen Substanzen wie bei der Veraschung durch Glühen.

Die Kompliziertheit der Fragen ist eine viel weitergehende, als wir vielfach annehmen; es mag in dieser Hinsicht nur auf die Beziehungen des Eisens zum Organismus, auf die man in neuerer Zeit aufmerksam geworden ist, hingewiesen werden.

Bei dem Abbau des Schwefels der Eiweißkörper im Organismus entsteht nicht ausschließlich Schwefelsäure, sondern es bilden sich auch noch andere Verbindungen, die ursprünglichen Phosphatide werden zu freier Phosphorsäure verbrannt, während Phosphatide aus der Nahrung unverändert übernommen werden, ähnlich steht es mit der Phosphorsäure, die in den Nukleinen gebunden ist. Die organisch-sauren Salze erscheinen nach dem Glühen als kohlensaure Salze, aber es gibt auch organische saure Salze, die nicht weiter

im Organismus zerlegt werden. Benzoesäure geht in Hippursäure über, im Stoffwechsel entstehen Säuren, wie Harnsäure, Glukuronsäure, und säurebindende Körper, wie Ammoniak, Indoxyl, Phenol, Kresol. Den Nahrungssalzen werden bei ungenügender Zufuhr von N die Salze des zugrunde gehenden Eiweißes beigefügt, in anderen Fällen werden Salze beim Aufbau von Geweben benutzt. Die Aufspeicherung von Salzen, der Verlust der festen Ausscheidungen, die zeitlich verschiedene Ausscheidung wurde schon oben berührt. Die Nieren sind jederzeit bereit, überflüssige Salze auszuscheiden. Der Organismus reguliert seinen Salzbedarf nach der Richtung Säurenbedarf oder Basenbedarf von selbst auch ohne unser Zutun. Der Körper läßt sich weder eine saure noch basische Reaktion der Zellen aufzwingen, und ganz und gar nicht sagen die üblichen Ascheanalysen etwas über das wirkliche Säurebasengemisch einer Kost aus, wie schon erwähnt. Anscheinend bieten die Nahrungsgemische der verschiedenen Nationen reichlich Überschuß über den wirklichen Bedarf an Salzen.

VI. Das Fletschern.

Die Sekte des Fletscherns hat keine besondere Bedeutung erlangt. Eine alte Gesundheitsregel sagt: »Gut gekaut ist halb verdaut«, worunter man die Förderung der Schnelligkeit der Verdauung und deren Verlauf ohne unangenehme Nebenempfindungen versteht.

Während der Kriegszeit hat ein Amerikaner M. Horace Fletcher das Kauen systematisiert, d. h. vorgeschrieben, wie oft man jeden Bissen vor dem Schlucken zu kauen hat. Wenn Fletcher sich auf eine bloße Empfehlung des langsamen Essens bei seinen Landsleuten beschränkt hätte, wäre ihm kein Erfolg beschieden gewesen. Für viele hastende Amerikaner sind Fletchers Bemühungen jedenfalls ganz angezeigt gewesen. Was aber Fletcher behauptete, hatte eine ganz andere Tragweite, man glaubte, daß durch das Kauen die Menge der notwendigen Nahrung ganz erheblich verringert werden könne. Man sprach von der Verringerung des Bedarfs an Nahrung um die Hälfte oder ein Drittel usw. In diesem Sinne wurde sie bei uns in dem Notjahre 1917 aufgenommen, manche Behörde glaubte das Problem des drohenden Hungers durch die Blockade durch Fletschern zu lösen. Sehr bald überzeugte man sich, daß die kleinen Kriegsportionen auch durch das Fletschern nicht fühlbar größer wurden. Ich habe schon früher darauf hingewiesen (Archiv für Physiol. Nr. 19 p. 140), daß beim Vergleich von Eigenversuchen Fletchers mit meiner Versuchsperson, die nur in üblicher Weise die Nahrung verzehrte, eine bessere Verdauung bei Fletcher nicht zu erweisen war. Die Notwendigkeit, auf das Essen genügende Zeit zu verwenden, ist lange vor Fletcher bekannt und längst auch eine soziale Forderung gewesen. In der Kindererziehung spielt die Ermunterung zum langsamen Essen immer schon eine Rolle, die Speisen sollen durch den Speichel, wie er beim Kauen fließt, zum verschluckbaren Bissen geformt werden, woraus auch die weitere Regel folgt, das Trinken von Flüssigkeit während der Mahlzeit tunlichst einzuschränken.

VII. Die Vitamine.

Es gibt noch keine Sekte, welche eine besondere Ernährungsform mit besonderem Namen auf die Vitamine gründete. Nach der Anschauung selbst mancher Autoren bedeutet die Auffindung der Vitamine aber eine völlige Umwälzung der Ernährung. Das trifft zwar ganz und gar nicht zu, aber die Popularisierung und voreilige Ausbeutung der wissenschaftlichen Tatsachen hat in weiten Kreisen Beunruhigung verbreitet.

Unsere Kenntnisse von den Vitaminen sind dabei auch heute noch nichts weniger als abgeschlossen, fast muß man befürchten, es möchte das heute angeblich Feststehende schon in kurzer Zeit wieder eine Umwertung erfahren. Die Einfachheit der beim Studium angewandten Methodik hat das leider wenig gesichtete Material ungeheuer anschwellen lassen.

Die Popularisierung (in Buchform, Tageszeitungen) der Lehre von den Vitaminen zwingt den Arzt, oft gegen seinen Willen, der nach Gesundheit dürstenden Masse mit Ratschlägen aus dem Vitamingebiet zu Willen zu sein. Im Volksglauben weiter Kreise sind die Vitamine zu Substanzen geworden, die allein über Leben und Gesundheit entscheiden. Die Skeptiker dagegen meinen, daß seit Entdeckung der Vitaminlehre im engeren und heutigen Sinne noch kein Mensch weniger gestorben sei. Zwischen den beiden Gegensätzen liegt wohl die Wahrheit.

Ehe man sich in diese neue Materie vertieft, denke man an die uns längst bekannten Hormone, zum Teil völlig gut bekannte, zum Teil sogar nach ihrer chemischen Konstitution aufgeklärte und synthetisch herstellbare Substanzen von wunderbarer Wirkung. Sie sind Produkte der Drüsen mit sogenannter innerer Sekretion. Das Jodothyrin der Schilddrüse ist lebenswichtig, der Mensch verblödet bei ungenügender Sekretion (Kropf) dieses Stoffes, die Übersekretion hebt andererseits die geistige Regsamkeit; Hypophyse und Thymusdrüse ordnen das Wachstum, die Geschlechtshormone erzeugen beim Weibe die Umbildung ihres Körpers, die mütterlichen Instinkte; das Adrenalin der Nebennieren hängt mit der Funktion des Gefäßsystems zusammen usw., die Hormone sind also im eigenen Organismus entstehende Stoffe, deren Einfluß sich zum Teil hauptsächlich in der Jugend, zum Teil durch das ganze Leben geltend macht.

Die Vitamine dagegen hält man für körperfremde Substanzen, die also uns von außen zugeführt werden müssen, um z. B. die allgemeinen Funktionen des Wachstums auszulösen usw., beim Fehlen entstehen bestimmte Krankheitsformen — Avitaminosen genannt —. Auch diese einfache Definition bedürfte wohl der Abänderung, da das Entstehen gewisser Vitaminmengen durch die Bakterienflora des Darms nicht von der Hand zu weisen ist und einige Krankheiten, die man für Avitaminosen hielt, auf vererbbarer Basis entstehen können, aber gleichwohl durch Vitamine geheilt werden.

Die Anregung zur Vitaminforschung hat schon vor dem Kriege Hofmeister gegeben durch Versuche, die Stepp ausgeführt hatte. Die Experimente sind dann weiter während des Krieges im großen Stil von Engländern und Amerikanern mit großem Erfolg weitergeführt worden. Die Wiederaufnahme

der deutschen Untersuchungen, an die ich mich in folgendem zu halten habe, verdanken wir hauptsächlich Scheunert in Leipzig.

Brauchbare Versuchstiere sind junge Ratten und Meerschweinchen. Versuche an Tauben hat man fast ganz verlassen.

Ausgeführt werden sie so, daß man eine künstlich zusammengesetzte Kost an die Tiere verfüttert; durch Veränderungen der Zusammensetzung hat man gefunden, daß eine bestimmte Kombination der Nahrung z. B. das Wachstum hemmt, meist unter Auftreten auch anderer bestimmter pathologischer Erscheinungen. In anderen Fällen setzt man der Versuchskost dann kleine Quantitäten von Nahrungsmitteln (oder deren Extrakte) zu und beobachtet, ob dann das Wachstum fortschreitet und Heilung der Nebenerscheinungen eintritt.

So ist man bisher auf 5 Vitamine gestoßen, die einfach als A bis E bezeichnet werden. Die Untersuchungen über E sind noch in der Entwicklung und scheiden hier aus.

A ist notwendig zu normalem Wachstum, wasserunlöslich, hitzebeständig, Nebenerscheinung — Augenerkrankungen.

B ist gleichfalls neben A zum Wachstum notwendig, heißt auch neuritisches oder Beri-Beri-Vitamin, sein Mangel löst bei Vögeln Krämpfe aus — wasserlöslich, weniger gut hitzebeständig. C ist das Vitamin, welches den Skorbut heilt — wird leicht durch Wärme zerstört. D ist ähnlich A, nicht wasserlöslich, hitzebeständig, aber der Oxydation leicht zugänglich. Es ist vielfach in unwirksamer Form (als Ergosterin) neben A vorhanden und wird dann wirksam durch Bestrahlung mit kurzwelligem Licht (Ultraviolett); heilt die Erkrankung an Rachitis. Es scheint so ziemlich auf grüne Pflanzen beschränkt, findet sich aber auch da sehr unregelmäßig, verbreiteter scheint in fast allen Pflanzen das eben genannte Provitamin (Ergosterin) vorzukommen.

Vitamin A, B, C brauchen keine Bestrahlung, um wirksam zu sein. Die Reindarstellung aller Vitamine ist noch nicht gelöst. Doch ist die Herstellung starker Konzentrationen einiger Vitamine gelungen, deren Anwendung aber gefährlich sein soll, Nierenerkrankungen, Verkalkung der Gefäße wurden beobachtet.

Anscheinend läßt sich das Bedürfnis an Vitaminen von den Ratten nicht auf andere Tiere restlos übertragen. Ratten brauchen kein C, auch nicht die Tauben. Bei Versuchen bleibt sehr oft ein Teil der Tiere gegen das Entstehen einer Avitaminose refraktär.

Vitamin B soll im Körper nicht aufgespeichert werden, wohl aber A (und D). In weiten Kreisen hat sich die Meinung festgesetzt, die Vitamine seien stets in grünen Pflanzen vorhanden, aber es gibt grüne Pflanzen, die praktisch keine Vitamine enthalten, und nicht grüne Teile und Pflanzen, die vitaminhaltig sind (Keimlinge, Hefen, Bakterien, Schimmelpilze).

Im Fleischfresser sollen sich keine Vitamine bilden, dem widerspricht die Möglichkeit, daß man wilde Ratten über ein Jahr mit reinem Fleisch, Speck und Salzen erhalten kann, und die Existenz der nur fleischverzehrenden Festlandseskimos. Auf die Möglichkeit der Bildung von Vitaminen durch Mikroorganismen ist stets Bedacht zu nehmen. Die bisherige Methodik

wählt zum Studium nur junge wachsende Tiere (meist weiße Ratten). Eingehende Versuche über den Vitaminbedarf ausgewachsener Tiere fehlen noch. Wahrscheinlich ist der Vitaminbedarf der wachsenden Tiere viel größer als jener der ausgewachsenen und vielleicht auch qualitativ verschieden. Immerhin mag versucht werden, inwiefern die Bestandteile unserer Kost nach den heutigen Versuchen Vitaminträger sind.

In folgendem gebe ich unter Zugrundelegung der Untersuchungen von Scheunert für den Vitamingehalt eine Übersicht, wie sich die Verteilung der Vitamine in unserer deutschen Kost (Nationalwerte) etwa darstellt. Von unserer Kost bestehen 40% aus Zerealien, hauptsächlich also aus Brot.

Darin ist enthalten kaum A oder D und auch kaum B und C, sonach scheiden 40% unserer Kost für die Vitaminversorgung aus. Etwas Eigenartiges unserer Ernährung liegt darin, daß wir ein Volk mit stärkstem Kartoffelkonsum sind. 12.02% unseres ganzen Stoffverbrauchs rechnet man auf die Kartoffel. Die letztere enthält kein Vitamin A und D. Das weitverbreitete Vitamin B findet sich, aber nicht sehr reichlich, viel aber von dem sonst seltenen C, wodurch sich die Kartoffel von den Zerealien scharf trennt (s. u.).

Über die Animalien, wie sie zumeist in der Hauptmahlzeit auftreten, läßt sich folgendes sagen. Von Fleisch und Fleischwaren essen wir im Durchschnitt 16% aller Nährwerte;

a) im reinen Muskelfleisch finden sich wenig A, B, C, D,
b) aber reichlich A in Herz, Leber, Niere, in fetten Fischen, Hering, Lebertran, Leberwurst, Blutwurst;
D auch reichlich in Fischwaren.

Von Eiern treffen nur 0.91% auf unsere Kost, reichlich A, B, D findet sich im Dotter.

Ungemein wichtig erscheinen die Milch und Milchprodukte, welche rund 13.8% der Gesamtkost betragen (Milch, Butter, Käse); sie enthalten viel A und D und weniger B. Daraus folgt, daß die Animalien nicht nur nicht nebensächlich vom Standpunkt der Vitaminzufuhr sind, sie tragen vielmehr wesentlich zur Deckung des Vitaminbedürfnisses bei, wenn sie nur richtig angewandt werden.

In grellem Gegensatz zu der Häufigkeit, mit der die Gemüse als »besonders gesund« empfohlen werden, steht ihr wirklicher Verbrauch, denn sie machen rund nur 4.8% unserer Nahrung aus und lassen sich auch kaum wesentlich in der Produktion steigern, etwa so, daß sie der Menge nach ein wesentliches Glied der Ernährung bilden würden. Bei den Gemüsen findet sich viel A im Blattgemüse, grünen Erbsen, Tomaten, gelben Rüben, aber schließlich nicht mehr wie in den drüsigen Teilen eines Schlachttieres. Es gibt aber auch Gemüse ohne A (oder D), wie die Sellerie, Kohlrabi, Rettich, Weißkraut, Wirsingkohl und Kohlrüben.

B findet sich reichlich, aber nicht sehr reichlich in allen grünen Gemüsen. C, das sonst wenig verbreitet ist, findet sich sehr reichlich in Grünkohl, Wirsing, Weißkraut, Salat, Rotkraut, Rosenkohl, Blumenkohl, grünen Erbsen, Kohlrüben, wenig in Möhren, Kohlrabi, Rhabarber. Quantitativ die geringste Bedeutung hat das Obst, das nur zu 2.5% in unserer Kost vorhanden ist.

A ist sehr reichlich in Brombeeren, Heidelbeeren, Himbeeren, alle anderen haben wenig von A oder sogar einen sehr geringen Gehalt. B ist fast in allen Obstsorten, aber wenig. C findet sich nicht viel in Obstsorten. Wenig z. B. in Äpfeln, Birnen, Kirschen, Pfirsichen, nicht in Aprikosen, Pflaumen, wohl aber viel in Apfelsinen und Zitronen.

Beim Erhitzen tritt eine Minderung namentlich von Vitamin C ein, bei Früchten verliert man bei üblichem Kochverfahren etwa 20%, mehr bei den Gemüsen, etwa 50%.

Vitamin A hängt bei Obstsorten mit den Farben zusammen, alle stark gefärbten enthalten mehr A als die blassen Früchte; B sitzt bei Stachel- und Johannisbeeren in der Schale; C findet man in gekochten Speisen, am meisten in Beerensorten, Kirschen und guten Speiseäpfeln. Fruchtsäfte des Handels sind fast allgemein ohne Vitamingehalt.

A, B und D kann man also schon weitgehendst oder ganz aus Animalien decken, C am besten aus Gemüsen, Obstarten und Kartoffeln.

Das Gemüse spielt in der englischen Kost eine viel geringere Rolle als in der deutschen, in England verzehrt man nur $^1/_3$ der Menge von Gemüsen wie in Deutschland und nur $^1/_2$ von unserer Kartoffelmenge.

Hält man sich an eine gemischte Kost, so ist eine ungenügende Menge von Vitaminen kaum je zu fürchten. Steudel hat die ganze Kost einer ärmlichen Familie auf ihren Vitamingehalt untersucht und keinen Mangel nachweisen können.

Alles, was hier über die Vitamine gesagt wurde, hängt in seiner Tragweite davon ab, ob man die an den Ratten usw. gefundenen Resultate wirklich auf den Menschen übertragen darf. Im ganzen wohl, aber ganz gewiß nicht in dem Sinne, daß man das zeitliche Auftreten von Avitaminosen zwischen Mensch und Ratte als identisch hält. Es wird überhaupt nötig sein, noch kurz die wirklich als Avitaminosen aufgefaßten Krankheiten des Menschen zu erörtern. Dahin gehören folgende: Die Beriberikrankheit, sie ist eine Volkskrankheit der Reisländer (Indien, Japan, China, Niederländisch Indien) und kommt in manchen Gegenden vor, wenn der polierte Reis hauptsächlich als Nahrung dient, und kann durch Ernährung mit ungeschältem Reis beseitigt werden. Das Vitamin B soll dabei in der Reiskleie vorhanden sein. Unaufgeklärt ist, warum in manchen Gegenden trotz Schälung des Reises diese Krankheit nicht auftritt. Ob die Maiskrankheit (Pellagra) eine Avitaminose ist, steht noch nicht fest.

Als man gelernt hatte, langdauernde Auslandsreisen mit Segelschiffen zu machen, wobei die Mannschaft viele Monate lang von eingepökeltem Fleisch, Speck und altem Zwieback lebte, war der Skorbut eine der gefährlichsten Krankheiten. Wir werden ihn heute auf das Fehlen vom Vitamine C zurückführen können. Schon der Weltumsegler Cook wußte das Universalmittel gegen den Skorbut — frisches Fleisch, frisches Gemüse und Obst. Merkwürdigerweise erkrankten meist nicht alle Matrosen an Skorbut, sondern stets nur ein Teil. Auch während der Blockadezeit wurde aus allen Gegenden von Deutschland über das Auftreten von Skorbut berichtet, was bei der mangelhaften Ernährung kaum wundernehmen kann. Näheres über diese Skorbutvorkommen ist leider nicht berichtet worden.

Weitaus die wichtigste Avitaminose ist die Möller-Barlowsche Krankheit der Kinder, welche schnell zum Tode führt, aber auch ebenso schnell geheilt werden kann. Meist beruht sie auf langer Ernährung mit zu nachhaltig erhitzter Milch. Die Therapie dagegen beruht auf Ernährung mit frischer, roher Milch, eventuell unter Beigabe von Gemüsen.

Seltene Fälle von Barlowkrankheit kommen auch bei Kindern vor, die mit Milch, Gemüsekost, Zitronensaft usw. aufgezogen worden sind. Diese Fälle lassen sich auch mit roher Milch behandeln.

Eine große Rolle spielt unter den Kinderkrankheiten die Rachitis; nach heutiger Auffassung ist sie keine Avitaminose, wohl aber eine Krankheit, die durch (aktiviertes) Vitamin D geheilt wird, wobei auch die Bestrahlung mit »Höhensonne«, Sonnenbehandlung, Aufenthalt im Freien und Gaben von Lebertran wirksam zu sein pflegen. Vitamin D soll nicht prophylaktisch angewandt werden (auch bestrahlte Milch nicht). Das Vitamin D wird durch A oder auch die Phosphatide vor Zerstörung geschützt.

Die eben aufgeführten Avitaminosen waren schon bekannt, ehe die Vitamine als solche nachgewiesen waren, wohl aber sind die therapeutischen Mittel jetzt prinzipiell gesichertere geworden. Dieser kurze Umriß über die Vitamine kann keinen Anspruch auf eine umfassende Darlegung machen, um so weniger, als die wissenschaftliche Bearbeitung des ganzen Gebietes noch in Fluß ist.

Aber was wir wissen, beweist die richtige Anlage unserer Hauptzüge der Ernährung, gemischte Kost, wobei teils die animalischen Nahrungsmittel uns gegen Avitaminosen schützen, teils die vegetarischen, so daß Verschiebungen zwischen den beiden Hauptquellen der Ernährung völlig belanglos erscheinen. Am ehesten gefährdet sind in der Ernährung die Kinder, weil sie auf die Pflege der Erwachsenen angewiesen sind und Objekte verschiedener Ernährungstheorien zu sein pflegen.

Zur Ernährung von groß und klein gehen wir am besten von den Nahrungsmitteln aus, wie sie uns die Natur bietet. Die küchenmäßige Zubereitung bringt so gut wie keinen Schaden. Die propagandistische Verbreitung einiger Ergebnisse der Vitaminforschung hat eine enorme Erregung in weiten Kreisen des Volkes hervorgerufen, Sorgen und Aufregungen, die in der Sache nicht begründet waren. Die Ergebnisse der Vitaminforschung sind schon jetzt von großem wissenschaftlichen Werte, sie machen weder die übrigen Teile der Ernährungslehre überflüssig, noch auch bedingen sie umwälzende Reformen irgendwelcher Art für die großen Massen des Volkes.

VIII. Die Rohkostbewegung.

Die letzte zu erwähnende und jüngste der Ernährungssekten ist die Rohkostbewegung. Hört man schon bei den Vegetariern so oft den Ruf »Zurück zur Natur«, so kann man die Abwendung von der Kultur nicht weitertreiben, wie die Rohkostbewegung sie kennt, die ja als Grundsatz den Verzicht auf das Feuer zur Speisebereitung ausspricht. Und doch hat einst der Gebrauch des Feuers zuerst den Menschen vom Tier dauernd geschieden.

Auf die Begründung dieser Sekte kann hier nicht näher eingegangen werden, weil in den meist populären Darstellungen eine so maßlose Unkenntnis physikalischer, chemischer und physiologischer Kenntnisse zum Ausdruck kommt, als daß es möglich wäre, hier näheres zu sagen. Im allgemeinen, so behaupten die Anhänger, soll durch das Kochen und Braten die »Natur« der Nahrungsmittel so verändert werden, daß sie der Gesundheit schaden.

Unter Rohkost kann man allerlei verstehen, so ist der wichtigste Vertreter der Rohkost der Säugling an der Mutterbrust. Aber es gibt ja auch kleine Völkchen (Eskimo), welche ausschließlich von rohem Fleisch leben — weil sie kein Heizmateriel haben; auch mit roher Milch und Eiern könnte man eine Rohkostgemeinde gründen.

Die Rohkostler sind aber eine Abart der Vegetarianer. Der Hauptvorteil der mit Feuer zubereiteten Kost liegt in sanitärer Richtung. Die Hitze vernichtet den größten Teil, ja richtig angewandt, alle als Krankheitserreger in Betracht kommenden Mikroorganismen. Der kulinarische Vorteil liegt im Weichermachen von Nahrungsmitteln, in der Hebung aller Geschmackswerte, in der Ermöglichung der Verdauung der Hauptnährstoffe der Pflanzen, des Stärkemehls —. Rohe Stärke ist zu 97.3 % unverdaulich[1], vorher mit Wasser erhitzte und gequollene gibt meist nur 1 % Verlust und weniger. Es fallen sozusagen von unserer gemischten Kost über 50 % des Nährwertes für den Rohkostler weg. die er also dann aus der Gruppe Zucker, Obst, Gemüse, Fett ersetzen müßte, was sich meist gar nicht durchführen läßt.

Die Empfehlungen angeblich sogar reiner Obstkost hat man namentlich in den letzten zwei Jahren öfter gehört, als eine weitere Einschränkung der Ernährung. Tatsächlich wird eine wirkliche Obstkost nur selten längere Zeit durchgeführt werden, meist sind es wohl Kombinationen mit einigen anderen Nahrungsmitteln gewesen, und vor allem hat der Zucker in der Ernährung solcher Leute eine Rolle gespielt. Es handelt sich nicht darum, daß es Menschen gibt, die einige Zeit nur Obst essen, man kann ja auch schließlich hungern und 50—60 Tage vielleicht ohne Nahrung auskommen. Aber eine volle Ernährung, das heißt Erhaltung des Körpergewichts und einer entsprechenden Leistungsfähigkeit, erzielt man bei reiner Obstkost nicht.

Die einzigen, mit ausschließlicher Obstkost einwandfrei durchgeführten Versuche rühren von mir her. Über diese Erfahrungen habe ich gesagt: »Das Gemeinsame (die Ergebnisse der Versuche) mit Obst besteht darin, daß nach meinen Ergebnissen der N-Verbrauch bei ausschließlicher Obstkost in wenigen Tagen enorm absinken kann und bei der fast nicht in Betracht kommenden N-Zufuhr sozusagen die reine Abnutzungsquote erreichen läßt. Das war mir sogar in Fällen möglich, bei denen die Kalorienzufuhr auch nur ganz ungenügend den Bedarf gedeckt hat.« (Arch. f. Physiol. 1919 p. 135.)

Daher, wie noch angefügt sein mag, kommen die Versuchspersonen, auch wenn sie sich zunächst ganz gesättigt fühlen, meist auf kaum die Hälfte der täglich notwendigen Kalorien. Von stärkerer Arbeitsleistung ist dabei keine Rede. Der Eiweißverlust und Zellenzusammenbruch geht langsam weiter, und

[1] Siehe Thomas, Archiv f. Physiol. 1916, S. 9.

ebenso wird die Abmagerung fortschreiten. Meist wird also solch ein extrem angelegtes Regime nicht allzulange durchgeführt, Zucker in großer Masse verzehrt, oder auch andere Speisen zugelegt, worunter das mit Butter belegte Brot eine große Rolle spielt. Eine meiner Obst verzehrenden Persönlichkeiten hatte die Gewohnheit, ungeheure Mengen Zucker zu essen, so daß ebensoviel Nährwerte in Zucker wie in Obst vorhanden waren. Höher als auf 1500 bis 1800 Kalorien kamen meine Versuchspersonen nicht, was für einen kräftigen Erwachsenen ja viel zu wenig an Nahrung war. Im allgemeinen hat man bei einer solch strengen Obstkost, wenn nicht etwa dabei reichlich Nüsse gegessen werden, kein gerade sehr wertvolles Nährmaterial, und eine Kost, welche eine starke Abnahme des Körpergewichts herbeiführt.

Der Rohkostvertreter braucht keine Küche, kein Feuer, keine Arbeit zur Vorbereitung der Kost, die Hausfrau würde vollkommen entlastet.

Merkwürdigerweise hat man durch Versuche belegen wollen, daß die Erhitzung der Speisen — auch des Fleisches — die Verdauungsmöglichkeit herabsetzt, diese Angaben sind aber alle als fehlerhafte Versuche festgestellt worden. Vor allen diesen Experimenten war schon längst durch meine eigenen Versuche bekannt, daß ein Unterschied in der Verdaulichkeit zwischen rohem und gebratenem Fleisch nicht besteht, daß rohe und gekochte Milch gleich verdaulich sind, so daß selbst Trockenmilch keine Unterschiede zeigt, daß gekochte Eier vollkommener verdaut werden wie rohe, daß zwischen Backwaren und Speisen, die nur gekocht werden, sich keine Differenz in der Verdaulichkeit zeigt u. dgl.

Die Argumente, die aus der Vitaminlehre zur Stütze der Rohkost herangezogen worden sind, haben keine Berechtigung. Vitamine A, B, D werden nach Scheunert durch die übliche Küchenbehandlung nicht zerstört. Vitamin C verliert selbst in Kompotten nur $^1/_5$ des Wertes, bei Gemüsen gehen allerdings 50% verloren, was man aber durch Erhöhung der Zufuhr wieder ausgleichen kann. Die Kartoffel verliert an C durch das Kochen nicht das geringste. C ist übrigens nicht so wichtig wie A, B und D.

Auch alle Angaben über besonders gebesserten Ablauf der Verdauung bei Genuß roher Speisen haben sich nicht bestätigt.

Die strikte und streng durchgeführte Rohkost war eine Dienerin der Mode und wird mit deren Wechsel auch wieder als Sekte verschwinden. Vertreterinnen dieser Sekte rekrutierten sich fast ausschließlich aus der Damenwelt.

IX.

Damit sind die wesentlichsten Ernährungssekten, wie sie sich etwa seit Mitte des vorigen Jahrhunderts geltend gemacht haben, unter Beiseitelassung zahlloser Spielarten besprochen.

Alles in allem genommen hat keine dieser Sekten eine Bedeutung für die Volksernährung gehabt, noch stellen sie Reformen für die Zukunft dar. Irgendeine Notwendigkeit, die Entwicklung der Volksernährung im Sinne dieser Sekten zu leiten, liegt nicht vor. Das Weltbild der nationalen Ernährungsmöglichkeiten zeigt eine Ernährungsnorm, die stets auf den Genuß,

d. h. die Mischung zahlreicher Nahrungsmittel aufgebaut war, und innerhalb des nationalen Rahmens die Möglichkeit zahlloser individueller Varianten gestattet. Die Sekten engen fast alle den Kreis der Lebensmöglichkeiten ein, der Vegetarier verliert alle rein aus Animalien bereiteten Gerichte, der Rohkostler greift die Lebensmöglichkeit noch enger, ähnlich den Proteinphobisten, die gleichfalls der Hauptsache nach auf Animalien verzichten, ähnlich auch den Nährsalzbewegungen, bei denen praktisch den Gemüsen u. dgl. ein großer Spielraum eingeräumt wird.

Die Sekten verzichten zum großen Teil auf die richtige Auswahl nach Geschmackswerten und verlieren damit den so wichtigen nervösen und psychischen Einfluß auf den Menschen.

Durchweg besteht eine Abneigung der Anhänger der Sekten auf eine zahlenmäßige und exakte Durchprüfung ihrer Systeme.

Zumeist fußen die Sekten auf der Beanspruchung von Nahrungsmitteln, welche nach Lage der Dinge z. B. die Landwirtschaft, der Obstbau, Gemüsebau gar nicht produzieren könnten.

Der Umstand, daß jede neu auftauchende Sekte Anhänger findet, ist nicht unverständlich. Es gibt viele Tausende labiler, leicht beeinflußbarer Persönlichkeiten, Personen mit Neigung zu mystischen Dingen, hysterische Hypochonder, die sich nur mit dem Wohlergehen des eigenen Ich beschäftigen, überschwänglich über alle Funktionen wachen. Aus diesen Kreisen werden sich zumeist die ersten Anhänger finden. Die Autosuggestion erzeugt dann meist auch Wohlbefinden und Befriedigung.

Da die Natur für die Ernährung ein so weites Spielfeld läßt, ist es auch begreiflich, daß sich offenkundige Schäden bei den Experimenten der verschiedenen Sekten seltener herausstellen, wie man denken sollte. Auch die seelische Akkommodation findet durch die vielfach unterschätzte Autosuggestion und durch den festen Glauben an ein neues gesünderes Leben ihre Erklärung. Zur Entschuldigung der Propaganda für viele Sekten muß man sich erinnern, daß die meisten Träger solcher Ideen Laien sind, denen die Möglichkeit einer kritischen Betrachtung völlig abgeht. Das eine Gute haben die genannten Sekten, daß sie zu Übermaß des Essens oder zu kulinarischen Exzessen gerade nicht verleiten, weshalb dann auch eine solche Umstellung auf das Ungewöhnliche und Ungewohnte immerhin erzieherischen Wert haben kann.

Unsere Hauptaufgabe liegt nicht in Erfindung neuer Systeme; nach den bisherigen Erfahrungen haben solche keinen Nutzen gestiftet. Wichtiger ist, die durch die soziale Umstellung, durch Wohnungsnot, Mangel an Kochkunst bedingten Schäden allmählich wieder abzugleichen.

Die Proteinphobisten fußen auf völlig falscher Stoffwechselanschauung, die Anhänger der Salzsekten und der Vitaminlehren glauben vielfach, daß sie mit ihren Anschauungen allein die Ernährung leiten könnten. Die Sekten beschäftigen sich meist nur mit einem Teil der Ernährung, zum Gesundleben gehört zweckmäßige Ordnung des Ganzen. Dahin gehören die richtige Verteilung zwischen N-haltigen und N-freien Stoffen, die quantitative Frage der Ernährungszufuhr, die Versorgung mit Salzen und Vitaminen. Davon fallen

für gewöhnlich und für den Erwachsenen die beiden letzteren weg, da gemischte Kost weder einen Mangel an Salzen noch Vitaminen geben wird.

Es ist auffallend, daß die wissenschaftliche Ernährungslehre viel schwieriger auf den Menschen eine Anwendung gefunden hat als in der Tierernährung, die sich jederzeit willig der besseren Erkenntnis fügt und ihren Nutzen daraus zieht. Ein Hindernis liegt für den Menschen in der Betonung der Individualität, die einer allgemeinen Änderung widerstrebt. Dort, wo man den Menschen als Masse betrachten kann, treten die zweckentsprechenden, allerdings nur empirischen Lösungen klar zutage. Die einzige große Massenernährung des Menschen war im Kriege die Blockade, und diese hat, abgesehen davon, daß eben Nahrungsmangel herrschte, ergeben, daß man solche großen Aufgaben technisch nicht lösen kann. Gerade in freier Auswirkung der Individualität, d. h. der unbehindert instinktiven Regulation, liegt die Sicherheit für die Richtigkeit des Verhaltens der großen Masse an sich.

In jüngster Zeit machen sich gegen das Überhandnehmen der Sekten schon Gegenbewegungen unter den Ärzten, besonders in England, geltend. Man verlangt die Rückkehr zur vernünftigen Anwendung der allgemeinen traditionellen Kost. Die sogenannte Rückkehr zur Natur der Sektierer führt nur zu einer Abkehr von den empirischen Regeln der Volksernährung.

Und wenn immer wieder der Ruf erschallt: »Zurück zum goldenen Zeitalter der Urzeit«, so wissen wohl die wenigsten, daß dieses goldene Zeitalter offenbar mehr an Krankheiten zu leiden hatte als unsere Zeit.

Soweit man durch patholog-anatomische Durchforschung von Knochenfunden, die von den Zeiten vor 5000 Jahren oder mehr herrühren, sagen kann, litten die damaligen Leute im höchsten Maße an Knochengicht. Daneben findet man Zeichen von Knochengeschwülsten und Verletzungen, die auf Krebsgeschwülste zurückzuführen sind, rachitische Veränderungen der Knochen in der Thüringer Prähistorik, auch tuberkulöse Läsionen, Luesanzeichen bei alten Knochenresten in Zentralfrankreich und in alten japanischen Funden. Eine detailliertere Ausbeute geben die ägyptischen Mumien; im zweiten Jahrtausend vor Christus hat man die atheromatösen Veränderungen und Verkalkungen der Gefäße, das Vorkommen der Pneumonien, der Pest, von Bilharzia-Krankheit, Reste der Malaria, Tuberkulose; sie geben Zeugnis von dem Vorhandensein der Krankheiten, die auch heute noch die Todesstatistik bringt.

Das goldene Zeitalter sah also offenbar wenig glänzend aus. Mikroben und Krankheiten warteten nur auf das Erscheinen des Menschen auf der Erde, und die harten Lebensbedingungen der ersten Jahrtausende sind nicht spurlos an der Gesundheit der ersten Generationen vorübergegangen.

Unsere Zeit neigt auch in der Medizin in ausgedehntem Maße zur Spekulation, zu halbphilosophischem Denken, zur Kombination von Behauptungen, denen der experimentelle Boden noch fehlt. Die Sucht nach Neuem, Überraschendem löst sich von der gesunden Entwicklung, der logischen Folge experimenteller Begründung. Voreiliges Anwenden von ungereiften Befunden bildet die Brücke zu den verschiedenen phantastischen Problemen. Hierher gehören auch die Übertreibungen, die man hinsichtlich der Möglichkeit der

synthetischen Herstellung unserer Nahrungsmittel gelegentlich hat hören können. Zunächst sind solche Dinge Utopien, und ob spätere Generationen die Frage lösen werden, müssen wir der Zukunft überlassen.

Vorläufig müssen wir uns mit prosaischeren Dingen bescheiden, wie die Hebung der Produktion der Naturprodukte. In eigner Kultur die Nährwerte zu schaffen, die unser Leben in gewohnter Weise braucht, ist nötig. Die Eigenproduktion unseres Bedarfs macht uns in gewissem Sinne frei. Die Natur deckt uns den Tisch und ihrer Gaben dürfen wir uns freuen.

Ausgegeben am 20. August.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XXIII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Library of Congress
MAY 8
Smithsonian Deposit

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 25. Juli. (S. 365)

Bodenstein: Der durch Chlor katalysierte Zerfall des Ozons. (S. 367)

Schur: Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. II. (S. 370)

H. Liebmann: Elementarer Beweis des Fenchelschen Satzes über die Krümmung geschlossener Raumkurven. (S. 392)

Th. Vahlen: Zur Partition der Zahlen. (S. 394)

E. Hopf: Über die geschlossenen Bahnen in der Mondtheorie. (S. 401)

Koebe: Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Vierte Mitteilung: Verlauf geodätischer Linien.) (S. 414)

Fick: Über die Arbeitsleistung der Schultergelenkmuskeln. (Mitteilung vom 25. April.) (S. 458)

MIT TAFEL I—X

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 25. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Bodenstein sprach über die durch Chlor katalysierte Zersetzung des Ozons.

Die Umsetzung ist eine Kettenreaktion, bei der es infolge besonderer Umstände möglich ist, die Geschwindigkeitskonstanten der einzelnen Teilvorgänge zahlenmäßig anzugeben, wodurch sie für die Theorie der Kettenreaktionen und ihrer Berechnung eine besondere Bedeutung gewinnt.

2. Hr. Schur legte eine Arbeit vor: »Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. II.«

Es wird bewiesen, daß jedes System von k aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen oberhalb $2k+1$ mindestens eine Zahl enthalten muß, die einen oberhalb $2k+1$ liegenden Primteiler aufweist. Auf Grund dieses Satzes ergibt sich eine genaue Übersicht über die irreduziblen Faktoren, die bei den Hermiteschen Polynomen und allgemeineren Ausdrücken ähnlicher Art auftreten können.

3. Hr. Schmidt legte eine Note von Prof. Dr. Heinrich Liebmann in Heidelberg vor unter dem Titel »Elementarer Beweis des Fenchelschen Satzes über die Krümmung geschlossener Raumkurven«.

Das Fenchelsche Theorem, daß die Krümmung einer nicht ebenen geschlossenen Raumkurve größer als 2π ist, wird auf äußerst einfachem Wege elementargeometrisch bewiesen.

4. Hr. Schmidt legte eine Note von Prof. Dr. Theodor Vahlen in Greifswald »Zur Partition der Zahlen« vor.

Die Bestimmung der Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$\sum_{1}^{n} a_\nu x_\nu = z$$

als Funktion von z, eine schon von Sylvester behandelte Aufgabe, wird mit elementaren Methoden hergeleitet.

5. Hr. Schmidt legte eine Untersuchung von Dr. Eberhard Hopf in Berlin »Über die geschlossenen Bahnen der Mondtheorie« vor.

Die Hillsche Schaar geschlossener Mondbahnen wird mathematisch streng und sehr durchsichtig hergeleitet, indem das Problem durch eine einfache Transformation auf die Poincarésche Theorie der periodischen Lösungen gestörter Keplerbewegungen zurückgeführt wird.

6. Das korrespondierende Mitglied Hr. Koebe in Leipzig übersandte eine Arbeit »Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen«, 4. Mitteilung.

Die geschlossenen geodätischen Linien innerhalb einer hyperbolischen Raumform sind durch ihren topologischen Verlauf wesentlich bestimmt und können entsprechend charakterisiert werden. Sie besitzen Häufungseigenschaften, durch die die Existenz quasiergodisch, eventuell semiergodisch verlaufender offener Geodätischen gewährleistet wird.

Der durch Chlor katalysierte Zerfall des Ozons.

Von Max Bodenstein.

Chlor katalysiert den thermischen Zerfall von Ozon so, daß die Reaktion bei Atmosphärendruck bei etwa 50° bequem meßbar ist. Sie wurde in Versuchen, die Hr. Padelt vor einigen Jahren in meinem Laboratorium ausführte, sorgfältig gemessen, und zwar durch Verfolgung der Druckzunahme mittels eines Schwefelsäure-Manometers. Sie erwies sich, nach Überwindung einiger Anfangsschwierigkeiten, als reproduzierbar, und zwar zeigte sie ein Induktionsstadium, in welchem die Reaktionsgeschwindigkeit anstieg, und verlief nach Überwindung desselben sehr exakt nach der Gleichung

$$-\frac{d[O_3]}{dt} = k \cdot [Cl_2]^{1/2} [O_3]^{3/2}.$$

Die Tabelle 1 gibt ein Beispiel der bei 50° durchgeführten Versuche, Tabelle 2 einen Überblick über die bei den verschiedenen Versuchen erhaltenen Mittelwerte der Konstante k der obigen Gleichung.

Alle Drucke sind dabei gegeben in mm H_2SO_4, welche die Gase bei 0°C gehabt haben würden, wobei 1 mm $H_2SO_4 = 0.133$ mm Hg $= 7.8 \cdot 10^{-6}$ Mole/Liter ist. Die k sind von »Punkt zu Punkt« berechnet.

Tabelle 1.

Versuch 1, $T = 50°C$.

Anfangsdrucke $O_3 = 2465.2$, $Cl_2 = 933.2$, $O_2 = 1049.0$.

t	O_3	$k \cdot 10^6$	t	O_3	$k \cdot 10^6$
0	2465.2	—	74	925.7	4.41
5	2414.2	(0.88)	86	824.3	4.26
10	2328.6	(1.52)	100	719.2	4.20
13	2251.2	(2.75)	120	598.8	4.26
16	2157.9	(3.10)	140	507.9	4.20
19	2060.2	(3.48)	160	436.6	4.16
25	1864.3	4.49	190	354.4	4.23
31	1687.6	4.66	230	276.0	4.20
37	1532.5	4.81	270	221.9	4.16
45	1358.3	4.70	310	176.9	4.81
55	1183.5	4.63	360	136.3	5.00
65	1039.5	4.63			Mittel 4.45

Tabelle 2.

O_3	Cl_2	O_2	T	k
2465.2	933.2	1049.0	50	$4.46 \cdot 10^{-6}$
734.9	1021.0	293.6	50	$4.24 \cdot 10^{-6}$
648.1	1021.9	361.8	50	$4.16 \cdot 10^{-6}$
2656.8	368.1	1118.2	50	$4.56 \cdot 10^{-6}$
2276.3	986.3	1120.0	50	$4.78 \cdot 10^{-6}$
1315.4	1285.4	2029.1	50	$4.45 \cdot 10^{-6}$
1276.4	480.2	2456.0	50	$4.20 \cdot 10^{-6}$
1146.7	142.0	2582.8	50	$4.20 \cdot 10^{-6}$
2007.3	379.1	1708.7	50	$3.98 \cdot 10^{-6}$
2267	303.9	1199.2	50	$4.85 \cdot 10^{-6}$
1102.3	106.9	2579.6	50	$4.09 \cdot 10^{-6}$
1569.1	350.4	1887.3	50	$4.67 \cdot 10^{-6}$
				Mittel $4.41 \cdot 10^{-6}$
2440.7	226.5	1219.2	35	$9.28 \cdot 10^{-7}$
2427.2	283.9	1389.1	35	$1.07 \cdot 10^{-6}$
2639.8	96.3	1109.1	35	$8.91 \cdot 10^{-7}$
				Mittel $9.65 \cdot 10^{-7}$

$$k \text{ Mittel für } 50° = 4.41 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{mm } H_2SO_4 \cdot \text{Min.}} = 9.50 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Liter}}{\text{Mole} \cdot \text{Sekunde}}$$

$$k \text{ Mittel für } 35° = 9.65 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{mm } H_2SO_4 \cdot \text{Min}} = 2.07 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Liter}}{\text{Mole} \cdot \text{Sekunde}}.$$

Eine Deutung für diese Beobachtungen haben wir damals nicht gefunden. Jetzt ist das Hrn. Schumacher gelungen, nachdem Erfahrungen gesammelt waren an einer Reihe von Umsetzungen, an denen teils als Ausgangsstoffe der Reaktion teils als Zwischenprodukte Chloroxyde beteiligt waren.

Danach liegt eine Reaktionsfolge vor, die aus folgenden Einzelvorgängen besteht:

1. $Cl_2 + O_3 = ClO + ClO_2$
2. $ClO_2 + O_3 = ClO_3 + O_2$
3. $ClO_3 + O_3 = ClO_2 + 2\,O_2$
4. $ClO_3 + ClO_3 = Cl_2 + 3\,O_2$
5. $ClO + ClO = Cl_2 + O_2$.

Die Reaktionen 1—4 bilden die Kette, welche Ozon zersetzt; 5 hat nur die Wirkung, das nach 1 entstandene, im übrigen unbeteiligte ClO fortzuschaffen. Diese Folge führt, in üblicher Weise berechnet, dazu, daß im quasistationären Zustand, d. h. nach Überwindung des Induktionsstadiums, die Reaktionsgeschwindigkeit proportional $[Cl_2]^{1/2} \cdot [O_3]^{3/2}$ ist. Ein Versuch, bei dem einige Zeit nach Erreichung dieses Zustandes die Umsetzung für 2 Std. durch Abkühlung auf 15° fast vollkommen sistiert war, erlaubte die Geschwindigkeitskonstante der Reaktion 3 zu ermitteln. Von da aus konnten die von 4 und von 1 zahlenmäßig bestimmt werden, und zwar $k_1 = 1.83 \cdot 10^{-7}$, $k_3 = 9.2 \cdot 10^{2}$, $k_4 = 1.70 \cdot 10^{3} \frac{\text{Liter}}{\text{Mole} \cdot \text{Sekunden}}$ bei 50° C, während von der von 2 festgestellt wurde, daß sie sehr viel größer ist als alle übrigen.

Eine Bestätigung der letzteren Folgerung ergab sich beim Versuch, ClO_2 mit O_3 reagieren zu lassen — die Umsetzung ist sehr geschwind — und eine Bestätigung der Werte von k_1, k_3 und k_4 ergab sich aus der Dauer des Induktionsstadiums in Abhängigkeit von den Konzentrationen des Chlors und des Ozons.

Die Kenntnis der Absolutgröße der einzelnen Geschwindigkeitskonstanten erlaubt in diesem Falle festzustellen, daß die hier wie in früheren Fällen der Berechnungen von Kettenreaktionen gemachten Vernachlässigungen hier berechtigt waren, was im allgemeinen nur aus dem Enderfolg der Übereinstimmung zwischen berechnetem und beobachtetem Gesetz der Gesamtreaktion geschlossen werden kann.

Eine weitere Verfolgung der Reaktion ist geplant. Sie soll insbesondere lehren, wie weit sich die Konstanten der Reaktionen 1, 3 und 4 in der üblichen Weise aus Stoßzahl und Aktivierungswärme berechnen lassen, wobei das besondere Interesse an dieser Frage darin liegt, daß die Reaktion 1 an sich eine extrem langsame Reaktion ist (die nur durch die ihr folgende Reaktionskette der Beobachtung zugänglich wird), während 3 und 4 sehr geschwinde sind, bei denen die kleinen Konzentrationen der reagierenden Stoffe die Beobachtung ermöglichen.

Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. II.

Von I. Schur.

Die vorliegende Arbeit bringt eine Fortsetzung der Untersuchungen, die ich unter dem gleichen Titel in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1929, S. 125—136, veröffentlicht habe. Im folgenden wird diese Arbeit kurz mit P. I zitiert werden.

Der in P. I bewiesene Satz II über die Primteiler einer Sequenz ganzer Zahlen findet sich schon bei J. J. Sylvester (On arithmetical Series, Messenger of Mathematics XXI (1892), S. 1—19, 87—120 und Collected mathematical papers, Bd. IV, S. 687—731). Den Hinweis auf diese Stelle bei Sylvester verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Hrn. E. Landau. Der Sylvestersche Beweis beruht auf ähnlichen Überlegungen wie der von mir angegebene, erfordert aber etwas längere Rechnungen.

Um die Irreduzibilität der Hermiteschen Polynome und ähnlich gebildeter Ausdrücke untersuchen zu können, muß man von folgendem weitergehenden Satz über Primzahlen Gebrauch machen:

I. *Für jedes* $k > 2$ *gibt es unter je* k *aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen*

$$2h+1,\quad 2h+3,\cdots,\quad 2h+2k-1 \qquad (h>k) \tag{1}$$

oberhalb $2k+1$ *mindestens eine Zahl, die durch eine oberhalb* $2k+1$ *liegende Primzahl teilbar ist. Für* $k=2$ *bildet nur das Paar* $25, 27$ *eine Ausnahme. Im Falle* $k=1$ *erhält man unendlich viele Ausnahmen in den Potenzen* $3^2, 3^3, 3^4, \cdots$[1].

Hieraus folgt leicht eine direkte Erweiterung des Sylvesterschen Satzes:

II. *Für* $k > 2$ *gibt es unter je* k *aufeinanderfolgenden Zahlen*

$$h+1,\quad h+2,\cdots,\quad h+k \qquad (h>k)$$

oberhalb $k+1$ *mindestens eine Zahl, die durch eine oberhalb* $k+1$ *liegende Primzahl teilbar ist. Für* $k=2$ *bildet nur das Paar* $8, 9$ *eine Ausnahme. Für* $k=1$ *erhält man unendlich viele Ausnahmen in den Potenzen* $2^2, 2^3, 2^4, \cdots$.

[1] Auch Sylvester beschäftigt sich a. a. O. mit Sequenzen (1) von k ungeraden Zahlen. Er beweist aber nur, daß für $2h+1 > k+1$ in wenigstens einer der Zahlen ein Primteiler $p > k$ enthalten sein muß.

Aus dem Satz I werden sich die folgenden zwei Irreduzibilitätssätze ergeben:

III. *Setzt man*

$$u_{2\nu} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2\nu - 1),$$

so ist für $n > 1$ *jedes Polynom der Form*

$$f(x) = 1 + g_1 \frac{x^2}{u_2} + g_2 \frac{x^4}{u_4} + \cdots + g_{n-1} \frac{x^{2n-2}}{u_{2n-2}} \pm \frac{x^{2n}}{u_{2n}}$$

mit beliebigen ganzen rationalen Koeffizienten g_ν *im Gebiete* P *der rationalen Zahlen irreduzibel.*

III*. *Ebenso ist im allgemeinen auch jedes Polynom der Form*

$$g(x) = 1 + g_1 \frac{x^2}{u_4} + g_2 \frac{x^4}{u_6} + \cdots + g_{n-1} \frac{x^{2n-2}}{u_{2n}} \pm \frac{x^{2n}}{u_{2n+2}}$$

mit ganzen rationalen g_ν *in* P *irreduzibel. Eine Ausnahme kann nur eintreten, wenn* $2n$ *von der Form* $3^r - 1$ $(r \geqq 2)$ *ist. Auch in diesem Ausnahmefall kann sich von* $g(x)$ *nur ein einziger Faktor* $x^2 \pm 3$ *abspalten.*

Diese beiden Sätze haben insbesondere zur Folge, daß das m-te HERMITEsche Polynom

$$H_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}$$

für ein gerades $m > 2$ in P irreduzibel ist und für ein ungerades m nach Forthebung des Faktors x irreduzibel wird.

Auch der Satz II zieht einen Irreduzibilitätssatz nach sich:

IV. *Im allgemeinen ist jedes Polynom der Form*

$$h(x) = 1 + g_1 \frac{x}{2!} + g_2 \frac{x^2}{3!} + \cdots + g_{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} \pm \frac{x^n}{(n+1)!}$$

mit ganzen rationalen g_ν *in* P *irreduzibel. Hier sind folgende Ausnahmen möglich: 1. Ist* n *von der Form* $2^r - 1$ $(r \geqq 2)$, *so kann* $h(x)$ *erst nach Forthebung des Faktors* $x + 2$ *oder* $x - 2$ *irreduzibel werden. 2. Für* $n = 8$ *kann* $h(x)$ *das Produkt zweier irreduzibler Funktionen der Grade 2 und 6 sein.*

Insbesondere läßt sich hieraus schließen, daß die Potenzreihen

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots, \qquad \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

dieselbe Eigenschaft haben wie (nach P. I) die Reihen für e^x und $\cos x$: Alle Abschnitte dieser Reihe sind in P irreduzibel.

Der Beweis des Satzes I wird wieder mit Hilfe der TSCHEBYSCHEFFschen Methoden geführt. Die Erledigung der kleineren Werte von k erfordert recht mühsame Rechnungen. Gute Dienste leistet auch hier die in P. I bewiesene Ungleichung

$$\pi(x) < \frac{3}{2} \frac{x}{\log x}. \qquad (x \geqq 2)$$

Hr. E. Landau hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß der dort entwickelte Beweis viel zu umständlich ist. Den wesentlich kürzeren Beweis, den er mir mitgeteilt hat, gebe ich im Schlußparagraphen der vorliegenden Arbeit an.

§ 1.

Beweis des Satzes I für große Werte von k.

1. Aus

$$u_{2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

folgt, daß, wenn q^{λ_n} die höchste Potenz der (ungeraden) Primzahl q ist, die in u_{2n} aufgeht,

$$\lambda_n = \sum_{\mu} \left\{ \left[\frac{2n}{q^\mu} \right] - \left[\frac{n}{q^\mu} \right] \right\} \qquad \left(1 \leqq \mu \leqq \frac{\log 2n}{\log q} \right) \tag{2}$$

gesetzt werden darf. Da aber für jedes reelle x

$$[x] + [x + \tfrac{1}{2}] = [2x]$$

ist, so kann (2) in der Form

$$\lambda_n = \sum_{\mu} \left[\frac{2n + q^\mu}{2q^\mu} \right] \qquad \left(1 \leqq \mu \leqq \frac{\log 2n}{\log q} \right) \tag{2'}$$

geschrieben werden.

2. Der Satz I braucht offenbar nur für den Fall bewiesen zu werden, daß $p = 2k+1$ eine Primzahl ist. Liegt eine Folge (1) vor, deren Zahlen nur Primteiler $q \leqq p$ aufweisen, so spreche ich von einer *Ausnahmefolge* $\mathfrak{A}_{h,p}$. Für eine solche Ausnahmefolge würde

$$A = \frac{(2h+1)(2h+3) \cdots (2h+2k-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2k-1)} = \frac{u_{2h+2k}}{u_{2h} u_{2k}} = \prod_{3 \leqq q \leqq p} q^{\nu_q} \tag{3}$$

werden mit

$$\nu_q = \sum_{\mu} \left\{ \left[\frac{2h+2k+q^\mu}{2q^\mu} \right] - \left[\frac{2h+q^\mu}{2q^\mu} \right] - \left[\frac{2k+q^\mu}{2q^\mu} \right] \right\}, \tag{4}$$

wobei μ nur die Werte

$$\mu = 1, 2, \cdots \left[\frac{\log (2h+2k)}{\log q} \right]$$

zu durchlaufen braucht[1].

Nun ist aber, wie man sich leicht überlegt, für je zwei reelle Zahlen x und y

$$[x+y+\tfrac{1}{2}] - [x+\tfrac{1}{2}] - [y+\tfrac{1}{2}] = -1, 0 \text{ oder } 1.$$

---

[1] Es ist hierbei zu beachten, daß A keine ganze Zahl zu sein braucht.

Daher ist in ν_q jeder Summand höchstens gleich 1 und also

$$\nu_q \leqq \frac{\log (2h+2k)}{\log q}. \tag{5}$$

Das liefert, wenn $m = \pi(p)$ die Anzahl aller Primzahlen $q \leqq p$ (mit Einschluß von $q = 2$) bedeutet,

$$\log A \leqq (m-1) \log (2h+2k).$$

Andererseits wird aber wegen

$$A = \frac{(2h+2k)!\ h!\,k!}{(h+k)!\ (2h)!\,(2k)!}$$

und

$$\log n! = (n+\tfrac{1}{2}) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} + R_n, \qquad \left(0 < R_n < \tfrac{1}{12}\right)$$

wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$\log A = (h+k) \log (h+k) - h \log h - k \log k - \tfrac{1}{2} \log 2 + S$$

mit $|S| < \frac{1}{4}$. Setzt man

$$h = Qk,$$

so wird $Q > 1$ und

$$\log A = k \log (Q+1) + kQ \log \left(1 + \frac{1}{Q}\right) - \frac{1}{2} \log 2 + S$$

$$> k \log (Q+1) + k - \frac{k}{2Q} - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{4},$$

ferner ist

$$(m-1) \log (2h+2k) = (m-1) \log (Q+1) + (m-1) \log 2k$$

$$< (m-1) \log (Q+1) + m \log p - \log \frac{p-1}{2}.$$

Das liefert

$$(k-m+1) \log (Q+1)$$

$$< -\frac{p}{2} + \frac{p}{4Q} + m \log p + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \log \frac{p-1}{2}.$$

Da für $p > 7$

$$\frac{p-1}{2} \geqq 5 > e^{\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$$

ist, erhalten wir für $p \geqq 11$

$$\left(\frac{p+1}{2} - m\right) \log (Q+1) < -\frac{p}{2} + \frac{p}{4Q} + m \log p. \tag{6}$$

3. Ist $Q \leqq 4$, so wird

$$\frac{2h+2k}{2h} = \frac{Q+1}{Q} \geqq \frac{5}{4}.$$

Die ungeraden Zahlen des Intervalls

$$2h < x \leqq \frac{5}{4} \cdot 2h \tag{7}$$

gehören also unserer Folge (1) an. Für $p \geqq 29$ wird $2h \geqq 2k+2 > 29$ und das Intervall (7) enthält mindestens eine Primzahl $P > 2h > p$ (vgl. P. I, § 2). Bei einer Ausnahmefolge kann das nicht eintreten.

Für $p \geqq 29$ dürfen wir also

$$Q \geqq 4$$

annehmen.

4. Ist bei einer Ausnahmefolge

$$Q+1 \geqq K \geqq 5, \quad \log(Q+1) \geqq \log K \geqq a > 0,$$

so folgt aus (6) in Verbindung mit

$$m = \pi(p) < \frac{3}{2} \frac{p}{\log p}$$

die Ungleichung

$$\left(\frac{p}{2} - \frac{3}{2} \frac{p}{\log p}\right) a < -\frac{p}{2} + \frac{p}{4(K-1)} + \frac{3}{2} p,$$

also

$$\left(a - 2 - \frac{1}{2K-2}\right) \log p < 3a.$$

Ist insbesondere $a \geqq 3$, so wird der Koeffizient von $\log p$ positiv und wir erhalten, wenn

$$\frac{3a}{a - 2 - \frac{1}{2K-2}} = b$$

gesetzt wird, $p < e^b$.

Wählt man insbesondere $K = 21$, so wird $\log K > 3$. Für $a = 3$ wird

$$b = \frac{9}{1 - \frac{1}{40}} = 9 + \frac{3}{13} < 9 + \frac{1}{4},$$

also

$$p < e^{9+\frac{1}{4}} = 10404, \cdots$$

5. Nehmen wir an, es sei

$$p \geqq \left[\frac{300000}{21}\right] = 14285,$$

so müßte $Q+1 \leqq 21$ sein. Dann wird

$$2h + 2k = (Q+1) \cdot 2k < 21p.$$

Für eine Primzahl $q > \sqrt{21p}$ wird also $q^2 > 2h + 2k$. In der Summe (4) für ν_q kommt dann nur $\mu = 1$ in Betracht, also wird $\nu_q \leqq 1$. Daher kann der Logarithmus des Produktes $A = \Pi q^{\nu_q}$ so abgeschätzt werden:

$$\log A \leqq \sum_{3 \leqq q \leqq \sqrt{21p}} \nu_q \log q + \sum_{\sqrt{21p} < q \leqq p} \log q .$$

Das liefert, wenn $\vartheta(x)$ wie üblich die Summe der Logarithmen aller Primzahlen $\leqq x$ bedeutet und $m' = \pi(\sqrt{21p})$ ist,

$$\log A \leqq (m' - 1) \log (2h + 2k) + \vartheta(p) - \vartheta(\sqrt{21p}) .$$

Die frühere Rechnung liefert nun an Stelle der Ungleichung (6)

$$\left(\frac{p+1}{2} - m'\right) \log (Q+1) < -\frac{p}{2} + \frac{p}{4Q} + m' \log p + \vartheta(p) - \vartheta(\sqrt{21p}) .$$

Wegen

$$Q \geqq 4 , \qquad \log 5 > \frac{8}{5} , \qquad m' < \frac{3}{2} \frac{\sqrt{21p}}{\log \sqrt{21p}} < \frac{3\sqrt{21p}}{\log p}$$

folgt hieraus

$$\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right) p < \frac{24}{5} \frac{\sqrt{21p}}{\log p} + 3\sqrt{21p} + \vartheta(p) - \vartheta(\sqrt{21p}) . \tag{8}$$

Setzt man in üblicher Weise

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \cdots ,$$

so wird, weil $\psi(x) - \vartheta(x)$ eine nicht abnehmende Funktion ist und bei uns $p > \sqrt{21p}$ wird,

$$\vartheta(p) - \vartheta(\sqrt{21p}) \leqq \psi(p) - \psi(\sqrt{21p}) .$$

Nun ist aber (vgl. E. LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, S. 90) für $a = 0.92129\cdots$

$$\psi(p) < \frac{6}{5} ap + 3 \log^2 p + 8 \log p + 5 ,$$

$$\psi(\sqrt{21p}) \geqq a\sqrt{21p} - 5 \log \sqrt{21p} - 5 .$$

Das liefert

$$\vartheta(p) - \vartheta(\sqrt{21p}) < 1.106\, p - 0.92 \cdot \sqrt{21p} + 3 \log^2 p + 13 \log p + 10 .$$

Aus (8) folgt nun nach Division durch p

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} - 1.106 = 0.1315$$

$$< \frac{24}{5} \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{p} \cdot \log p} + \frac{2.08 \cdot \sqrt{21}}{\sqrt{p}} + \frac{3 \log^2 p + 13 \log p + 10}{p} .$$

Diese Ungleichung müßte, da die rechts stehende Funktion für $p > e$ monoton abnimmt, auch für $p = 14285$ ein richtiges Resultat ergeben. Das ist aber, wie eine einfache Rechnung zeigt, nicht der Fall[1].

Damit haben wir den Satz I für alle Primzahlen

$$p = 2k + 1 > 14285$$

bewiesen.

§ 2.

Beweis des Satzes I für $p < 14285$.

1. Kennt man für eine gegebene Primzahl $p = 2k + 1$ eine Ausnahmefolge

$$2h+1,\quad 2h+3,\cdots,\quad 2h+2k-1, \tag{9}$$

so sind die p aufeinanderfolgenden Zahlen

$$2h,\quad 2h+1,\quad 2h+2,\cdots,\quad 2h+2k$$

keine Primzahlen. Ist wieder $h = Qk$ und

$$Q+1 < K,\quad Kp \leqq n,$$

so muß also, wenn $L(n)$ die größte Anzahl aufeinanderfolgender zusammengesetzter Zahlen in der Reihe $1, 2, \cdots, n$ bedeutet, $L(n) \geqq p$ sein.

Ich benutze im folgenden nur, daß

$$L(300000) < 2000,\quad L(100000) < 1000,\quad L(50000) < 100,\quad L(5000) < 47$$

ist. Dies ist mit Hilfe einer Tafel für die Primzahlen unterhalb 300000 ohne große Mühe nachzuprüfen.

Wie in § 1, Nr. 4 schließe ich: Ist für eine Ausnahmefolge

$$Q+1 \geqq K,\quad \log K > a \geqq 3,\quad b = \frac{3a}{a-2-\frac{1}{2K-2}} < \beta,\quad e^{\beta} < M,$$

so muß $p < M$ sein. Die von mir benutzten Werte von K, a, β, M enthält folgende Tabelle:

K	a	β	M
21	3	9.25	10405
28	3.3	7.8	2450
40	3.6	6.9	1000
50	3.9	6.2	500
100	4.6	5.35	215
230	5.43	4.76	117
400	5.9	4.6	100

[1] Man hat hierbei nur zu benutzen, daß

$$9.5 < \log 14285 < 9.6,\quad \sqrt{14285} > 119,\quad \sqrt{21} < 4.6$$

ist.

Daß nun für

$$100 < p < 14285$$

keine Ausnahmefolge existiert, ergibt sich folgendermaßen. Ist zunächst $10405 < p < 14285$, so muß $Q+1 < 21$ sein. Es ist aber $21 . 14285 < 300000$ und $L(300000) < 10405$, was diese Primzahlen ausschließt. Ist ferner $2450 < p < 10405$, so muß nach der Tabelle $Q+1 < 28$ sein. Es ist aber $28 . 10405 < 300000$ und $L(300000) < 2450$, was auch diese Primzahlen als nicht zulässig erscheinen läßt. Dies zeigt schon, wie sich mit Hilfe der Tabelle hintereinander auch die Intervalle

$$1000 < p < 2450, \quad 500 < p < 1000, \cdots, \quad 100 < p < 117$$

erledigen lassen.

2. Wir dürfen also schon annehmen, daß $p < 100$ ist. Liegt eine der Primzahlen

$$47, 53, 59, \cdots, 89, 97 \tag{10}$$

vor, so genügt es, zu zeigen, daß in einer Ausnahmefolge (9) $Q+1 < 50$ sein müßte. Denn dann wird $2h+2k-1 < 50 \cdot 97 < 5000$, und es ist $L(5000) < 47$.

Wäre nun $Q+1 \geqq 50$, so darf $\log(Q+1) > 3,9$ gesetzt werden. Die Ungleichung (6) würde liefern

$$3,9\left(\frac{p+1}{2}-m\right) < -\frac{p-1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{p}{4 \cdot 49}+m \log p, \qquad (m=\pi(p))$$

also (wegen $97 < 2 \cdot 49$)

$$4,9\,p+2,9 < 2\,m(3,9+\log p).$$

Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß diese Ungleichung für keine der Primzahlen (10) gilt.

3. Um die noch übrigbleibenden Fälle $p < 47$ zu erledigen, mache ich von einem elementaren Hilfssatz Gebrauch:

Unter den Zahlen der Form $3^\alpha 5^\beta$ *gibt es nur folgende Paare* $a < b$ *mit einer Differenz* $b-a \leqq 20$

$$1,3;\ 1,5;\ 3,5;\ 5,9;\ 25,27;\ 1,9;\ 1,15;\ 3,9;\ 3,15;\ 5,15;\ 5,25;$$
$$9,15;\ 9,25;\ 9,27;\ 15,25;\ 15,27;\ 25,45;\ 27,45;\ 75,81;\ 125,135;$$
$$225,243.$$

Der Beweis kann wohl nur mit Hilfe der von C. STÖRMER[1] herrührenden Methode, die von der PELLschen Gleichung Gebrauch macht, erbracht werden.

Sei zunächst $b-a = 2$ oder 4. Ist D' der größte quadratfreie Teiler von ab und $ab = D'u^2$, so wird für $b-a = 2$

$$t^2 - 4\,D'u^2 = 4 \text{ mit } t = 2a+2$$

---

[1] *Quelques théorèmes sur l'équation de* PELL $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ *et leurs applications*, Christiania Videnskabsselskabs Skrifter 1897. — Nach der STÖRMERschen Methode läßt sich für jede gegebene Primzahl $p > 5$ der Nachweis führen, daß Ausnahmefolgen $\mathfrak{A}_{h,p}$ nicht existieren. Für etwas größere Werte von p würden sich aber die Rechnungen außerordentlich mühsam gestalten.

und für $b-a=4$

$$t^2-D'u^2=4 \text{ mit } t=a+2\,.$$

Hierbei hat man nur die Fälle $D'=3,5,15$ zu berücksichtigen[1]. Es sind also diejenigen Lösungen der Pellschen Gleichungen

$$t^2-Du^2=4 \text{ für } D=3,5,15,12,20,60$$

zu untersuchen, bei denen u von der Form $3^\alpha 5^\beta$ ist. In den Fällen $D=3, 15, 20$ ist in jeder Lösung u gerade, es bleiben also nur die drei Möglichkeiten $D=5, 12, 60$ übrig.

Ist nun für ein gegebenes $D>0$, das kein Quadrat ist, T, U die Fundamentallösung der Gleichung $t^2-Du^2=4$ und setzt man

$$\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^\nu=\frac{T_\nu+U_\nu\sqrt{D}}{2}, \qquad (\nu=1,2,\cdots)$$

so hat man nur folgende leicht zu beweisende Eigenschaft der Zahlen U_ν zu benutzen: Ist U_n die erste unter den Zahlen U_ν, die durch einen gegebenen Modul m teilbar ist, so sind nur die Zahlen $U_n, U_{2n}, U_{3n}, \ldots$ durch m teilbar. Diese Zahlen enthalten aber sogar U_n als Faktor.

Die Paare a, b mit $a=1$ können wir ohne weiteres angeben. Ist aber $a>1$, so muß (bei $b-a=2$ oder 4) eine der Zahlen eine Potenz 3^α, die andere eine Potenz 5^β sein.

Für $D=5$ (also $b-a=4$) ist nun die erste der Zahlen U_ν, die durch 5 teilbar ist, gleich 55, also durch 11 teilbar. Daher darf u nicht durch 5 teilbar sein. Die Potenz 5^β muß danach gleich 5 sein, was nur (neben 1, 5) das Paar 5, 9 liefert.

Ist $D=12$, also $b-a=2$, so wird die erste durch 9 teilbare Zahl U_ν auch durch 17 teilbar. Daher darf hier u nicht durch 9 teilbar sein. Für 3^α kommen also nur die Werte 3 und 27 in Betracht. Das führt (neben 1, 3) nur auf das Paar 25, 27.

Ist endlich $D=60$, also wieder $b-a=2$, so wird das kleinste U_ν, das durch 3 teilbar ist, auch durch 7 teilbar. Man schließt hieraus, wie vorhin, daß $3^\alpha=3$ sein muß, und erhält nur das Paar 3, 5.

Damit ist gezeigt, daß nur die fünf ersten unter den auf S. 377 angegebenen Paaren der Bedingung $b-a\leqq 4$ genügen.

Um nun die Paare $a<b$ mit $4<b-a\leqq 20$ aufzustellen, kann man sich auf den Fall beschränken, daß a und b teilerfremd sind. Aus ihnen gehen die übrigen durch Multiplikation mit 3, 5 oder 9 hervor. Sind aber a und b teilerfremd, und sieht man von dem Fall $a=1$ ab, der ja direkt zu erledigen ist, so muß

$$a=3^\alpha,\quad b=5^\beta \text{ oder } a=5^\beta,\quad b=3^\alpha \qquad (\alpha\geqq 1,\ \beta\geqq 1)$$

sein. Als Differenz $b-a$ kommt nur eine der Zahlen 8, 14, 16 in Betracht. Der Fall $b-a=14$ ist nicht möglich. Denn es müßte $3^\alpha\equiv\pm 1 \pmod 5$, also α gerade sein. Dann ist aber $3^\alpha-5^\beta\equiv 0 \pmod 4$. In den beiden

[1] Der Fall $D'=1$ kommt offenbar nicht in Betracht.

anderen Fällen wird $3^\alpha \equiv 5^\beta \pmod 8$. Das ist aber nur möglich, wenn α und β gerade Zahlen, also a und b Quadratzahlen sind. Das einzige Paar von Quadratzahlen mit der Differenz 8 oder 16 ist aber 9, 25.

Man überzeugt sich nun leicht, daß nur die 21 oben angegebenen Paare in Betracht kommen.

4. Der Beweis des Satzes I läßt sich jetzt ohne Mühe zu Ende führen.

Zunächst geht aus dem Hilfssatz unmittelbar hervor, daß für $p = 5$ das Paar 25, 27 die einzige Ausnahmefolge liefert.

Für die Primzahlen

$$7, 11, 13, \cdots, 41, 43 \tag{11}$$

schließe ich so. Unter k aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen sind, wie man leicht sieht, höchstens $\left[\frac{k+q-1}{q}\right]$ Zahlen durch die ungerade Primzahl q teilbar. Liegt nun für eine der Primzahlen p der Reihe (11) eine Ausnahmefolge (9) vor, so bilde ich

$$\Delta_p = k - \sum_{7 \leqq q \leqq p} \left[\frac{k+q-1}{q}\right]. \qquad \left(k = \frac{p-1}{2}\right)$$

Ist diese Zahl noch positiv, so müssen mindestens Δ_p der Zahlen (9) von der Form $3^\alpha . 5^\beta$ sein.

Die Rechnung liefert

$$\Delta_7 = 2, \quad \Delta_{11} \geqq 3, \quad \Delta_{13} \geqq 3, \cdots, \quad \Delta_{43} \geqq 3.$$

Es kommen also jedenfalls in (9) Paare $a < b$ von Zahlen der Form $3^\alpha . 5^\beta$ vor, wobei $p < a$, $b - a \leqq 2k - 2 = p - 3$ wird. Man überzeugt sich nun leicht, daß sich kein solches Paar aus dem Schema der 21 Paare auf S. 377 zu einer Ausnahmefolge für eine der Primzahlen (11) ergänzen läßt. Das erledigt schon die Fälle $p - 3 \leqq 20$, d. h. $p \leqq 23$. Für die übrigen Primzahlen 29, 31, 37, 41, 43 benutze man, daß $\Delta_p \geqq 3$ ist. Die Folge (9) würde also mindestens drei Zahlen $a < b < c$ der Form $3^\alpha . 5^\beta$ enthalten und hierbei müßten $b - a$ und $c - b$ mindestens gleich 22 sein. Das würde aber auf $2 . 22 \leqq c - a \leqq p - 3$ führen, was $p > 43$ ergäbe.

§ 3.

Beweis des Satzes II.

Auch hier darf, wie man sich leicht überlegt, $k + 1 = p$ als Primzahl angenommen werden[1]. Es handelt sich also darum, die Folgen

$$h + 1, h + 2, \cdots, h + p - 1 \tag{12}$$

von $p - 1$ Zahlen oberhalb p zu untersuchen, bei denen die Primteiler q aller Zahlen höchstens gleich p sind.

---

[1] Es ist nur zu beachten, daß es sich für $k = 3$ um drei aufeinanderfolgende Zahlen oberhalb 4 handeln würde, die alle von der Form $2^\alpha 3^\beta$ sind. Daß es ein solches Tripel nicht gibt, ist ziemlich trivial (vgl. P. I, § 3).

Ist hier $p = 2$, so kommen nur die Potenzen 2^α $(\alpha > 1)$ in Betracht. Für $p = 3$ würde ein Paar $h+1$, $h+2$ von Zahlen der Form $2^\alpha 3^3$ mit $h+1 > 4$ vorliegen. Dieser Fall erledigt sich ohne Mühe mit Hilfe der Störmerschen Methode (vgl. § 2) und führt nur auf das eine Ausnahmepaar $8, 9$[1].

Ist aber $p > 3$, so schließt man folgendermaßen: Unter den $p-1$ Zahlen (12) kämen genau $\frac{p-1}{2}$ aufeinanderfolgende ungerade Zahlen oberhalb p vor, die wieder nur Primteiler $q \leq p$ aufweisen. Für $p \geq 7$ gibt es eine solche Folge nach Satz I nicht. Für $p = 5$ müßte es sich um die beiden ungeraden Zahlen 25, 27 handeln. Die dazwischenliegende Zahl 26 besitzt aber einen Primteiler oberhalb 5.

§ 4.

Die Sätze III und III*.

1. Es soll zunächst bewiesen werden: Ist p^{λ_n} die höchste Potenz der (ungeraden) Primzahl p, die in

$$u_{2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2n-1)$$

aufgeht, so ist für $n \geq 1$

$$\lambda_n < \frac{2n}{p}. \tag{13}$$

Das ist für $2n < p$ gewiß richtig, weil $\lambda_n = 0$ wird. Ist aber $p < 2n$, so darf (vgl. § 1, Formel (2′))

$$\lambda_n = \sum_{\mu=1}^{m} \left[\frac{2n + p^\mu}{2p^\mu} \right] \tag{14}$$

gesetzt werden, wobei m den größten Exponenten angibt, für den noch $p^m < 2n$ ist. Es wird für $m = 1$

$$\lambda_n < \frac{2n+p}{2p} = \frac{n}{p} + \frac{1}{2} < \frac{2n}{p},$$

weil $p < 2n$, also $\frac{1}{2} < \frac{n}{p}$ ist. Ist $m = 2$, so folgt aus (14) wegen $p \geq 3$

$$\lambda_n \leq \frac{2n+p}{2p} + \frac{2n+p^2}{2p^2} = \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + 1 \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{3p} + 1.$$

Das ist für $p^2 < 2n$ kleiner als $\frac{2n}{p}$, weil

$$\frac{2n}{p} - \frac{n}{p} - \frac{n}{3p} - 1 = \frac{2n}{3p} - 1 \geq \frac{2n}{p^2} - 1 > 0$$

---

[1] Bei C. Störmer findet sich sogar a. a. O. eine Zusammenstellung aller Paare $h+1$. $h+2$ von Zahlen der Form $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$.

wird. Sei also $m \geqq 3$. Dann liefert (14)

$$\lambda_n \leqq \frac{m}{2} + \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \cdots + \frac{n}{p^m}$$

$$< \frac{m}{2} + \frac{n}{p} + \frac{n}{p}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{m}{2} + \frac{n}{p} + \frac{n}{2p}.$$

Das wird kleiner als $\frac{2n}{p}$, wenn $mp < n$ ist. Da bei uns $2n > p^m$ ist, hat man nur $p^m > 2mp$ oder $p^{m-1} > 2m$ zu verifizieren. Es ist aber in der Tat für $m \geqq 3$

$$p^{m-1} \geqq 3^{m-1} \geqq 1 + 2(m-1) + 4\binom{m-1}{2} > 2m.$$

2. Es sei nun $f(x)$ ein Polynom der Form

$$f(x) = 1 + g_1 \frac{x^2}{u_2} + g_2 \frac{x^4}{u_4} + \cdots + g_{n-1} \frac{x^{2n-2}}{u_{2n-2}} \pm \frac{x^{2n}}{u_{2n}}$$

mit ganzen rationalen g_ν. Setzt man $u_{2n} f(x) = F(x)$, so wird

$$F(x) = u_{2n} + g_1 u_{2n} \frac{x^2}{u_2} + \cdots + g_{n-1} u_{2n} \frac{x^{2n-2}}{u_{2n-2}} \pm x^{2n}$$

ein ganzzahliges Polynom mit dem höchsten Koeffizienten ± 1. Für $2n = 2$ wird $F(x) = 1 \pm x^2$ in P reduzibel, wenn hier das Minuszeichen steht. Es sei also $2n > 2$. Ist $F(x)$ in P reduzibel, so sei

$$F(x) = A(x)B(x), \quad A(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k.$$

Hierbei dürfen $A(x)$ und $B(x)$ als ganzzahlige Polynome angenommen werden, wobei $A(x)$ irreduzibel und $2n \geqq 2k$, d. h. $n \geqq k$ ist. Die ganze Zahl a_k ist ein Teiler von u_{2n}, also ungerade.

Ist $p \geqq 3$ eine in a_k aufgehende Primzahl und α eine Wurzel von $A(x) = 0$, so gibt es (vgl. P. I, § 1) in dem durch α erzeugten Körper $P(\alpha)$ ein Primideal $\mathfrak{p}$, das in den Hauptidealen (α) und (p) aufgeht. Die höchsten Potenzen von $\mathfrak{p}$, durch die (α) und (p) teilbar sind, seien $\mathfrak{p}^r$ und $\mathfrak{p}^s$. In

$$u_{2n} + g_1 u_{2n} \frac{\alpha^2}{u_2} + \cdots + g_{n-1} u_{2n} \frac{\alpha^{2n-2}}{u_{2n-2}} \pm u_{2n} \cdot \frac{\alpha^{2n}}{u_{2n}} = 0$$

ist das erste Glied genau durch $\mathfrak{p}^{\lambda_n s}$, das Glied $g_\nu u_{2n} \frac{\alpha^{2\nu}}{u_{2\nu}}$ mindestens durch $\mathfrak{p}^{\lambda_n s + 2\nu r - \lambda_\nu s}$ teilbar. Es muß daher für wenigstens ein $\nu \geqq 1$

$$2\nu r \leqq \lambda_\nu s$$

werden. Da $r \geqq 1$, $s \leqq k$ ist, liefert das

$$2\nu \leqq \lambda_\nu k. \tag{15}$$

Wegen (13) folgt hieraus $p < k$. Für $k \leqq 3$ müßte also a_k durch keine Primzahl teilbar, also gleich ± 1 sein.

Man schreibe nun $F(x)$ in der Form[1]

$$F(x) = \pm x^{2n} + g_{n-1}(2n-1)\,x^{2n-2} + g_{n-2}(2n-1)(2n-3)\,x^{2n-4} + \cdots.$$

Dies zeigt, daß, wenn q eine Primzahl ist, die in einer der l Zahlen

$$2n-2l+1,\quad 2n-2l+3,\cdots,\quad 2n-1 \qquad (l \geqq 1) \tag{16}$$

aufgeht, $F(x)$ mod. q mindestens durch $x^{2n-2l+2}$ teilbar ist. Das Polynom $B(x)$ ist aber mod. q höchstens durch x^{2n-k} teilbar. Ist also

$$2n-2l+2 > 2n-k,\ \text{d. h. } 2l < k+2,$$

so muß q in a_k aufgehen, folglich kleiner als k sein.

Jedenfalls muß a_k durch jeden Primteiler von $2n-1 \geqq 3$ teilbar sein, darf also nicht ± 1 sein. Das schließt schon die Fälle $k \leqq 3$ aus. Für $k > 3$ setze man

$$k = 2\varkappa + 2 + \varepsilon,\quad \varepsilon = 0 \text{ oder } 1.$$

Die größte Zahl l, die der Forderung $2l < k+2$ genügt, wird

$$l = \varkappa + 1 + \varepsilon.$$

Außerdem wird

$$2n-2l+1 \geqq 2k-2l+1 = 2\varkappa+3 > 2\varkappa+1$$

und die Forderung $q < k$ bedeutet, daß

$$q \leqq k-1-\varepsilon = 2\varkappa+1$$

sein soll.

Wir hätten also in den Zahlen (16) eine Sequenz von mindestens $\varkappa+1$ ungeraden Zahlen oberhalb $2\varkappa+1$, die nur Primteiler $q \leqq 2\varkappa+1$ aufweisen. Für $\varkappa > 2$ folgt aus Satz I unmittelbar, daß dies nicht möglich ist. Aber auch die Fälle $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$ kommen nicht in Betracht. Denn für $\varkappa = 1$ würden mindestens zwei aufeinanderfolgende Zahlen der Form 3^α oberhalb 3 und für $\varkappa = 2$ mindestens drei aufeinanderfolgende Zahlen der Form $3^\alpha\,5^\beta$ oberhalb 5 vorliegen. Beides ist nicht möglich.

Daher ist $f(x)$ für $2n > 2$ stets in P irreduzibel.

3. In ganz analoger Weise läßt sich auch ein Polynom $g(x)$ der Form

$$g(x) = 1 + g_1\frac{x^2}{u_4} + g_2\frac{x^4}{u_6} + \cdots + g_{n-1}\frac{x^{2n-2}}{u_{2n}} \pm \frac{x^{2n}}{u_{2n+2}}$$

mit ganzzahligen g_ν behandeln. Hier hat man

$$G(x) = u_{2n+2} + g_1\,u_{2n+2}\frac{x^2}{u_4} + \cdots \pm x^{2n}$$

zu betrachten. Nimmt man $g(x)$ als in P reduzibel an, so sei wieder

$$G(x) = A(x)\,B(x),\quad A(x) = x^k + a_1\,x^{k-1} + \cdots + a_k,$$

---

[1] Die entsprechende Formel P. I, § 1, Nr. 2 enthält einen Druckfehler. Es ist dort g_1 durch g_{n-1} und g_2 durch g_{n-2} zu ersetzen.

wobei $A(x)$ irreduzibel und $k \leqq n$ ist. Für jede in a_k aufgehende (ungerade) Primzahl p ergibt sich hier für mindestens ein $\nu \geqq 1$ an Stelle von (15)

$$2\nu \leqq \lambda_{\nu+1} k, \tag{17}$$

also wegen (13)

$$2\nu < \frac{2\nu+2}{p} k. \tag{18}$$

Hieraus folgt, wie ich behaupte,

$$p \leqq k+1.$$

Denn zunächst kann (17) nur gelten, wenn $\lambda_{\nu+1} > 0$, also $2\nu+2 > p$ ist. Wäre nun $p > k+1$, so müßte $k \leqq p-2$ sein. Aus (18) würde folgen

$$2\nu p < (2\nu+2)(p-2) = 2\nu p + 2p - 4\nu - 4,$$

d. h. $p > 2\nu+2$, was nicht zutrifft.

Der zweite Teil der vorhin durchgeführten Betrachtung führt an Stelle der Zahlen (16) auf die l Zahlen

$$2n-2l+3, \quad 2n-2l+5, \cdots, \quad 2n+1 \tag{19}$$

und lehrt uns, daß, sobald wieder $2l < k+2$ wird, jede Primzahl q, die in einer der Zahlen (19) aufgeht, ein Teiler von a_k, also der Bedingung $q \leqq k+1$ genügen müßte. Dies zeigt insbesondere, daß a_k durch jede in $2n+1$ aufgehende Primzahl teilbar sein muß, also nicht gleich ± 1 sein kann. Das schließt schon den Fall $k = 1$ aus.

Ist $k \geqq 2$, so setze man hier

$$k = 2\varkappa + \varepsilon, \quad \varepsilon = 0 \text{ oder } 1.$$

Die größte Zahl l, für die $2l < k+2$ wird, ist hier $l = \varkappa + \varepsilon$. Außerdem wird auch hier für die erste unter den Zahlen (19)

$$2n-2l+3 \geqq 2k-2l+3 = 2\varkappa+3 > 2\varkappa+1,$$

und $q \leqq k+1 = 2\varkappa+1+\varepsilon$ liefert wieder $q \leqq 2\varkappa+1$.

Wir würden also in (19) eine Sequenz von $\varkappa+\varepsilon$ ungeraden Zahlen oberhalb $2\varkappa+1$ erhalten, die nur Primteiler $q \leqq 2\varkappa+1$ aufweisen. Für $\varkappa > 2$ ist dies nach Satz I nicht möglich. Ist $\varkappa = 1$ und $\varepsilon = 1$, so würden 2 aufeinanderfolgende Potenzen von 3 oberhalb 3 vorliegen, was auszuschließen ist. Dagegen ist der Fall $\varkappa = 1$, $\varepsilon = 0$ möglich, wenn $2n+1 = 3^r > 3$ ist. Für ein solches n könnte also noch ein irreduzibler quadratischer Teiler $A(x)$ auftreten.

Ist endlich $\varkappa = 2$, so hätten wir in (19) eine Sequenz von $2+\varepsilon$ Zahlen der Form $3^\alpha \cdot 5^\beta$ oberhalb 5. Der Fall $\varepsilon = 1$ ist wieder auszuschließen und für $\varepsilon = 0$ käme nach Satz I nur noch der Fall $2n+1 = 27$ in Betracht. Hier könnte noch ein irreduzibler Teiler $A(x)$ des Grades 4 auftreten.

4. Wir haben noch zu untersuchen, ob bei den Polynomen $g(x)$ die vorhin erwähnten Ausnahmefälle wirklich auftreten können.

Sei zunächst

$$2n = 3^r - 1 \geqq 3^2 - 1 = 8$$

und $A(x) = x^2 + a_1 x + a_2$ ein irreduzibler Teiler von $G(x)$. Wir wissen schon, daß $a_2 = \pm 3^\rho$ mit $\rho \geqq 1$ sein müßte. Es ist leicht zu sehen, daß $a_1 = 0$ sein muß. Sonst müßte, da $G(x)$ eine gerade Funktion ist, auch $A(x)A(-x)$ ein Teiler von $G(x)$ sein. Es sei $G(x) = A(x)A(-x)C(x)$. Ist q ein Primteiler von $2n-1$, so müßte, da $G(x)$ mod. q mindestens durch x^{2n-2} und $C(x)$ nach diesem Modul höchstens durch x^{2n-4} teilbar ist, q ein Teiler des konstanten Gliedes $a_2^2 = 3^{2\rho}$ von $A(x)A(-x)$ sein, was wegen $2n-1 = 3^r - 2$, $q \geqq 5$ nicht möglich ist[1].

Also ist $A(x) = x^2 \pm 3^\rho$ zu setzen. Wir haben nur noch zu entscheiden, für welche Werte von ρ sich ganze rationale Zahlen $h_1, h_2, \cdots h_{n-1}$ $(h_\nu = \pm g_\nu)$ so bestimmen lassen, daß

$$u_{2n+2} + h_1 u_{2n+2}\frac{3^\rho}{u_4} + \cdots + h_{n-1} u_{2n+2}\frac{3^{(n-1)\rho}}{u_{2n}} \pm 3^{\rho n} = 0$$

wird. Das ist aber dann und nur dann möglich, wenn der größte gemeinsame Teiler d der ganzen Zahlen

$$(20) \qquad \frac{3^\rho u_{2n+2}}{u_4}, \quad \frac{3^{2\rho} u_{2n+2}}{u_6}, \cdots, \quad \frac{3^{(n-1)\rho} u_{2n+2}}{u_{2n}}$$

in $u_{2n+2} \pm 3^{\rho n}$ aufgeht. Nun ist die letzte der Zahlen (20) gleich

$$(2n+1)\cdot 3^{(n-1)\rho} = 3^{(n-1)\rho + r}.$$

Daher darf $d = 3^\delta$ gesetzt werden, und hierbei ist offenbar δ die kleinste unter den Zahlen[2]

$$\nu\rho - \lambda_{\nu+1} + \lambda_{n+1}. \qquad (\nu = 1, 2, \cdots n-1)$$

Aus (13) folgt aber für $\nu \geqq 2$

$$\nu\rho - \lambda_{\nu+1} + \lambda_{n+1} > \rho - \lambda_2 + \lambda_{n+1} = \rho - 1 + \lambda_{n+1}.$$

Denn es ist für $\nu \geqq 2$, $\rho \geqq 1$

$$\lambda_{\nu+1} < \frac{2\nu+2}{3} \leqq \nu \leqq \rho(\nu-1) + 1.$$

Folglich ist $\delta = \rho - 1 + \lambda_{n+1}$.

Andererseits ist aber wegen

$$\lambda_{n+1} < \frac{2n+2}{3} < n \leqq \rho n$$

die Zahl $u_{2n+2} \pm 3^{\rho n}$ genau durch $3^{\lambda n+1}$ teilbar. Es ist also nur noch zu verlangen, daß

$$\rho - 1 + \lambda_{n+1} \leqq \lambda_{n+1}$$

wird, was auf $\rho = 1$ führt.

Dies zeigt, daß für jedes $2n = 3^r - 1 \geqq 8$ ein Polynom der Form $g(x)$ in der Tat einen quadratischen Teiler haben kann. Dieser Teiler muß aber

---

[1] Diese Betrachtung lehrt genauer, daß $G(x)$ jedenfalls nicht zwei quadratische ganzzahlige Faktoren aufweisen kann.

[2] Hier bedeutet natürlich λ_x den Exponenten der höchsten Potenz von 3, die in u_{2x} aufgeht.

von der Gestalt $x^2 \pm 3$ sein. Mehr als einen quadratischen Faktor kann $g(x)$ nicht aufweisen. In den Ausnahmefällen wird also $g(x) = (x^2 \pm 3)\, g_1(x)$ mit in P irreduziblem $g_1(x)$.

5. In dem Falle $2n = 26$ wäre es nach der allgemeinen Überlegung noch denkbar, daß $G(x)$ einen ganzzahligen irreduziblen Teiler $A(x)$ des Grades 4 besitzt. *Es soll gezeigt werden, daß dies nicht möglich ist.*

Da $G(x)$ nach dem Modul $2n - 3 = 23$ mindestens durch x^{26-4} teilbar ist, schließt man ähnlich wie in Nr. 4, daß $A(x)$ eine gerade Funktion sein müßte. Indem man $x^2 = y$ setzt, würde man auf ein ganzzahliges Polynom

$$K(y) = u_{28} + g_1 u_{28} \frac{y}{u_4} + \cdots + g_{12} u_{28} \frac{y^{12}}{u_{26}} \pm y^{13}$$

geführt werden, das durch ein irreduzibles ganzzahliges Polynom

$$D(y) = y^2 + b_1 y + b_2$$

teilbar ist. Da

$$K(y) \equiv \pm y^{13} \pmod 3$$

ist, müßten b_1 und b_2 durch 3 teilbar sein.

Ich behaupte, daß b_2 nicht durch 9 teilbar sein darf. Denn setzt man $y = 3z$, so würde

$$D(3z) = 9\, E(z) = 9(z^2 + c_1 z + c_2)$$

mit ganzzahligen c_1 und c_2. Ferner ist für die Primzahl 3

$$(21)\quad \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1\,, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 3\,, \quad \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 4\,, \\ \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 5\,, \quad \lambda_{14} = 8\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt leicht, daß

$$K(3z) = 3^8 L(z)$$

wird, wobei $L(z)$ die Form

$$L(z) = l_0 + l_1 z + 3 l_2 z^2 + 3 l_3 z^3 + \cdots + 3 l_{13} z^{13}$$

erhält mit ganzzahligen l_ν und einem zu 3 teilerfremden l_0. Dieses Polynom $L(z)$ müßte durch $E(z)$ teilbar sein, wobei der Quotient wieder ganzzahlig wird, weil der höchste Koeffizient von $E(z)$ gleich 1 ist. Das geht aber nicht. Denn $L(z)$ ist mod. 3 höchstens vom Grade 1, ohne kongruent 0 zu sein, dagegen hat $E(z)$ auch mod. 3 den Grad 2.

Sei nun β eine Wurzel der Gleichung $D(y) = 0$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Körpers $P(\beta)$, das in (β) und (3) aufgeht. Die höchsten Potenzen von $\mathfrak{p}$, die in diesen Hauptidealen aufgehen, seien $\mathfrak{p}^r$ und $\mathfrak{p}^s$. In

$$\beta^2 + b_1 \beta + b_2 = 0$$

ist das erste Glied genau durch $\mathfrak{p}^{2r}$, das letzte genau durch $\mathfrak{p}^s$ und das mittlere mindestens durch $\mathfrak{p}^{r+s}$ teilbar. Hieraus folgt offenbar $s = 2r$, also wegen $s \leqq 2$

$$r = 1\,, \quad s = 2\,.$$

In dem Ausdruck

$$K(\beta) = u_{28} + g_1 u_{28}\frac{\beta}{u_4} + \cdots \pm \beta^{13}$$

wird nun das letzte Glied genau durch $\mathfrak{p}^{13}$ teilbar. Dagegen sind, wie man unter Berücksichtigung der Formeln (21) erkennt, alle übrigen Glieder durch höhere Potenzen von $\mathfrak{p}$ teilbar. Der Ausdruck $K(\beta)$ kann daher nicht verschwinden.

§ 5.

Die Hermiteschen Polynome.

Für die Polynome

$$H_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^m\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^m}$$

besteht die Rekursionsformel

$$H_{m+1} = xH_m - mH_{m-1},$$

aus der man in bekannter Weise schließt, daß

$$(22)\qquad H_m(x) = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^\mu\binom{m}{2\mu}1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2\mu-1)x^{m-2\mu}$$

wird. Setzt man wieder

$$u_{2\nu} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2\nu-1), \quad u_0 = 1,$$

so ergibt sich ohne Mühe

$$f_{2n} = \frac{(-1)^n H_{2n}(x)}{u_{2n}} = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{x^{2\nu}}{u_{2\nu}},$$

$$g_{2n} = \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)}{u_{2n+2}\cdot x} = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{x^{2\nu}}{u_{2\nu+2}}.$$

Das sind aber Polynome, wie wir sie im § 4 untersucht haben. Aus unserem Satz III folgt unmittelbar, daß $H_4, H_6, H_8, \cdots$ sämtlich in P irreduzibel sind[1]. Um mit Hilfe des Satzes III* zu zeigen, daß bei ungeradem m das Polynom H_m nach Forthebung des Faktors x irreduzibel wird, haben wir nur noch zu beweisen, daß sich auch in dem Ausnahmefall $m = 3^r \geqq 9$ von H_m nicht der Faktor $x^2 - 3$ abtrennen läßt[2]. Das ergibt sich folgendermaßen.

Für $m = 9$ überzeugt man sich auf direktem Wege, daß $H_9(x)$ für $x = \pm\sqrt{3}$ von Null verschieden ist. Ist aber $m = 3^\nu > 9$, so ist $m - 1$

[1] Der Fall $H_2 = x^2 - 1$ bildet eine Ausnahme.

[2] Der Faktor $x^2 + 3$ kommt nicht in Betracht, weil die Nullstellen von $H_m(x)$ bekanntlich reell sind. Es genügt auch schon zu beachten, daß $H_m(x)$ eine ungerade Funktion mit alternierenden Vorzeichen ist.

jedenfalls keine Potenz von 2 (vgl. § 3). Ist nun $p \geqq 5$ eine in $m-1$ aufgehende Primzahl, so wird

$$H_m(x) \equiv x^m \pmod{p}. \tag{23}$$

Denn in (22) ist der Koeffizient

$$\binom{m}{2\mu} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2\mu - 1)$$

für $2\mu \geqq p+1$ gewiß durch p teilbar, weil einer der Faktoren $3, 5, \cdots 2\mu-1$ gleich p wird. Ist aber $0 < 2\mu \leqq p-1$, so wird

$$\binom{m}{2\mu} = \frac{m(m-1)\cdots(m-2\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots 2\mu}$$

durch p teilbar.

Aus (23) folgt aber, daß in jeder Zerlegung von $H_m(x)$ in zwei ganzzahlige Faktoren die konstanten Glieder durch p teilbar sein müssen. Der Faktor $x^2 - 3$ kommt also nicht in Betracht.

§ 6.

Beweis des Satzes IV.

1. Bezeichnet man mit p^{μ_n} die höchste Potenz der Primzahl $p \geqq 2$, die in $n!$ aufgeht, so ist bekanntlich

$$\mu_n = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots < \frac{n}{p-1}. \tag{24}$$

Es sei nun

$$h(x) = 1 + g_1 \frac{x}{2!} + g_2 \frac{x^2}{3!} + \cdots + g_{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} \pm \frac{x^n}{(n+1)!},$$

wobei die g_ν ganze rationale Zahlen sind. Der Ausdruck

$$H(x) = (n+1)! + g_1(n+1)! \frac{x}{2!} + \cdots + g_{n-1}(n+1)! \frac{x^{n-1}}{n!} \pm x^n$$

hat dann ganzzahlige Koeffizienten.

Ist $h(x)$ in P reduzibel, so sei

$$H(x) = \mathrm{A}(x)\mathrm{B}(x), \quad \mathrm{A}(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k.$$

Hierbei sollen $A(x)$ und $B(x)$ ganzzahlige Polynome sein, außerdem nehmen wir $A(x)$ als in P irreduzibel und $n \geqq 2k$ an. Die in § 4, Nr. 2 durchgeführte Betrachtung lehrt hier, daß für jede in a_k aufgehende Primzahl $p \geqq 2$ ein Index $\nu \geqq 1$ existieren muß, so daß

$$\nu \leqq \mu_{\nu+1} k \tag{25}$$

wird. Hieraus folgt aber $p \leqq k+1$. Denn sonst wäre $k \leqq p-2$, also wegen (24) und (25)

$$\nu(p-1) < (\nu+1)(p-2) = \nu p + p - 2\nu - 2,$$

d. h. $p > \nu + 2$. Dann wäre aber $(\nu+1)!$ nicht durch p teilbar, also $\mu_{\nu+1} = 0$, was der Formel (25) widerspricht.

Schreibt man $H(x)$ in der Form

$$H(x) = \pm x^n + (n+1)\, g_{n-1}\, x^{n-1} + (n+1)\, n\, g_{n-2} x^{n-2} + \cdots,$$

so ergibt sich: Ist q eine Primzahl, die in einer der k Zahlen

$$n+2-k, \quad n+3-k, \cdots, \quad n+1 \tag{26}$$

aufgeht, so ist $H(x)$ mod. q mindestens durch x^{n-k+1} teilbar. Da $B(x)$ mod. q höchstens durch x^{n-k} teilbar ist, muß q in a_k aufgehen, also der Bedingung $q \leqq k+1$ genügen. Hierbei ist

$$n+2-k \geqq 2k+2-k > k+1.$$

Wir hätten also in den Zahlen (26) eine Sequenz von k ganzen Zahlen oberhalb $k+1$, die keinen Primteiler oberhalb $k+1$ aufweisen.

Dies ist nach Satz II für $k > 2$ nicht möglich. Für $k = 1$ kommt nur der Fall $n+1 = 2^r > 2$ in Betracht, wobei aber der lineare Teiler $A(x)$ die Form $x \pm 2^\varrho$ mit $\varrho \geqq 1$ haben müßte. Im Falle $k = 2$ müßte (wieder nach Satz II) $n = 8$ sein. Das konstante Glied a_2 von $A(x)$ hat dann jedenfalls die Form $\pm 2^\alpha \cdot 3^\beta$.

Es ist wieder zu untersuchen, ob diese Ausnahmefälle wirklich vorkommen können.

2. Ist zunächst $n = 2^r - 1 \geqq 3$ und soll $A(x) = x \pm 2^\varrho$ ein Teiler von $g(x)$ sein, so handelt es sich ähnlich wie in § 4, Nr. 4 nur darum, zu entscheiden, für welche Werte von $\varrho \geqq 1$ der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen

$$(n+1)!\frac{2^\varrho}{2!}, \quad (n+1)!\frac{2^{2\varrho}}{3!}, \cdots, \quad (n+1)!\frac{2^{(n-1)\varrho}}{n!}$$

in $(n+1)! \pm 2^{\varrho n}$ aufgeht.

Da die letzte unter den zu untersuchenden Zahlen gleich $2^{r+(n-1)\varrho}$ ist, muß $d = 2^\delta$ sein, und hierbei wird δ, wenn $2^{\mu_\varkappa}$ die höchste in $\varkappa!$ enthaltene Potenz von 2 bedeutet, die kleinste unter den Zahlen

$$\alpha_\nu = \nu\varrho - \mu_{\nu+1} + \mu_{n+1}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Hier ist

$$\mu_{\nu+1} < \frac{\nu+1}{2-1} = \nu+1, \text{ also } \mu_{\nu+1} \leqq \nu.$$

Daher wird

$$\alpha_\nu \geqq \nu\varrho - \nu + \mu_{n+1} \geqq \varrho - 1 + \mu_{n+1} = \alpha_1.$$

Folglich ist $\delta = \varrho - 1 + \mu_{n+1}$.

Ferner ist wegen $\mu_{n+1} \leqq n < 2n$ die Zahl $(n+1)! \pm 2^{\varrho n}$ für $\varrho > 1$ genau durch 2^{μ_n+1} und für $\varrho = 1$ mindestens durch 2^{μ_n+1} teilbar. Daher ist $d = 2^\delta$ dann und nur dann ein Teiler von $(n+1)! \pm 2^{\varrho n}$, wenn $\varrho = 1$ ist.

Es hat sich also ergeben, daß für jede Gradzahl $n = 2^r - 1 \geqq 3$ reduzible Polynome $h(x)$ existieren. Es kommt aber nur ein Teiler $x \pm 2$ in Betracht und eine ähnliche Überlegung, wie wir sie in § 4, Nr. 4 durchgeführt haben, lehrt uns, daß $h(x)$ nach Forthebung dieses Faktors irreduzibel wird.

3. Es bleibt noch der Fall $n = 8$ zu diskutieren. *Daß ein Polynom achten Grades von der Form $h(x)$ sehr wohl einen in* P *irreduziblen quadratischen Teiler besitzen kann, zeigt das Beispiel*

$$1 + 2 \cdot \frac{x}{2!} + 2 \cdot \frac{x^2}{3!} + 2 \cdot \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + 12 \cdot \frac{x^5}{6!} + 24 \cdot \frac{x^6}{7!} + 61 \cdot \frac{x^7}{8!} + \frac{x^8}{9!}$$

$$= \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!}\right)\left(1 + \frac{x}{2!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \frac{13}{2} \cdot \frac{x^5}{6!} + \frac{1}{12} \cdot \frac{x^6}{7!}\right).$$

In jedem Ausnahmefall muß aber $h(x)$ das Produkt zweier irreduzibler Funktionen der Grade 2 und 6 sein. Dies ergibt sich schon daraus, daß das zugehörige ganzzahlige Polynom $H(x)$ mod. 7 durch x^6 teilbar ist (vgl. wieder § 4, Nr. 4).

§ 7.

Die Abschnitte der Potenzreihen für sin x und $e^x - 1$.

Jeder Abschnitt der Sinusreihe erhält nach Forthebung des Faktors x die Gestalt

$$h_{2m}(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m+1)!},$$

gehört also der in § 6 behandelten Klasse von Polynomen an. Daß jedes dieser Polynome in P irreduzibel ist, ergibt sich folgendermaßen. Da hier $n = 2m$ gerade ist, kommt der Ausnahmefall $n = 2^r - 1$ nicht in Betracht. Ist ferner $2m = 8$, so bilde man $H(x) = 9!\, h_8(x)$. Besäße $H(x)$ einen (ganzzahligen) quadratischen Teiler $A(x) = x^2 + a_1 x + a_2$, so müßte, weil $H(x)$ eine gerade Funktion ist, die keinen zweiten quadratischen Teiler aufweisen kann, auch $A(x)$ eine gerade Funktion, also $A(x) = x^2 + a_2$ sein. Hierbei wäre $a_2 = \pm 2^\alpha \cdot 3^\beta$. Nun ist aber

$$H(x) \equiv x^4 (x^4 - 2x^2 - 1) \pmod 5.$$

Es müßte daher, weil a_2 jedenfalls zu 5 teilerfremd ist, $-a_2$ der Kongruenz

$$y^2 - 2y - 1 = (y-1)^2 - 2 \equiv 0 \pmod 5$$

genügen. Das geht aber nicht, weil 2 quadratischer Nichtrest mod. 5 ist.

In ähnlicher Weise beweist man auch, daß die Abschnitte

$$h_n^*(x) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n+1)!}$$

der Potenzreihe für $\frac{1}{x}(e^x - 1)$ sämtlich in P irreduzibel sind. Denn auch sie sind von der in § 6 betrachteten Art. Liegt zunächst der Ausnahmefall $n = 2^r - 1$

vor, so käme nur ein linearer Teiler $x \pm 2$ in Betracht. Für $x = 2$ verschwindet $h_n^*(x)$ gewiß nicht. Es ist aber auch

$$h_n^*(-2) = \frac{2^2}{3!} - \frac{2^3}{4!} + \frac{2^4}{5!} - \cdots + \frac{2^{n-1}}{n!} - \frac{2^n}{(n+1)!}$$

von Null verschieden, weil hier eine alternierende Summe mit einer geraden Anzahl monoton abnehmender Glieder vorliegt.

Ist aber $n = 8$, so wird

$$H(x) = 9!\, h_8^*(x) \equiv x^4 (x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1) \equiv x^4 (x-1)(x^3 + 2x + 1) \pmod 5.$$

Der Ausdruck $x^3 + 2x + 1$ ist hierbei mod. 5 irreduzibel, weil er für keine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 durch 5 teilbar wird. Wäre $H(x) = A(x)\,B(x)$, wobei A und B ganzzahlige Polynome der Grade 2 und 6 sind, so wäre $A(0)$ nach dem früheren zu 5 teilerfremd. Es müßte also mod. 5 der Faktor $B(x)$ durch das Produkt $x^4(x^3 + 2x + 1)$ teilbar sein, was nicht möglich ist.

§ 8.

Abschätzungen für $\pi(x)$.

Die in den §§ 1—2 so oft benutzte Ungleichung

$$\pi(x) < \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{\log x} \qquad x \geqq 2 \tag{27}$$

beweist Hr. Landau in einem an mich gerichteten Brief vom 24. Mai 1929 folgendermaßen.

Die Ungleichung braucht nur für ganzzahlige x (sogar nur für Primzahlen) bewiesen zu werden. Sie sei für

$$2 \leqq x \leqq 6^5 = 7776$$

schon bestätigt. Man hat dann (27) nur schrittweise für

$$x = 6^5 + 1, \quad 6^5 + 2, \cdots$$

zu beweisen und darf hierbei, wenn x eine dieser Zahlen ist, die Ungleichung für ganzzahlige $\xi < x$, also insbesondere für $\xi = \left[\frac{x}{6}\right]$ als richtig ansehen[1]. Nun wird

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{6}\right) = \sum_{\frac{x}{6} < p \leqq x} \frac{\log p}{\log p} \leqq \frac{1}{\log \frac{x}{6}} \sum_{\frac{x}{6} < p \leqq x} \log p$$

$$= \frac{1}{\log \frac{x}{6}} \left(\vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{6}\right)\right) \leqq \frac{1}{\log \frac{x}{6}} \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right)\right).$$

[1] Unter Benutzung dieses Induktionsschlusses gestaltet sich auch der von mir P. I, § 2 angegebene Beweis wesentlich kürzer.

Nach TSCHEBYSCHEFF ist aber[1] für $a = 0.92129\cdots$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < ax + 5\log x + 5\,.$$

Es wird also

$$\pi(x) < \frac{1}{\log\frac{x}{6}}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{6} + 0.93x + 5\log x + 5\right)$$

$$= \frac{1}{\log x - \log 6}(1.18x + 5\log x + 5)\,.$$

Dies wird kleiner als $\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{\log x}$, wenn

$$\frac{3}{2} - 1.18 = 0.32 > \frac{3}{2}\frac{\log 6}{\log x} + \frac{5\log x}{x} + \frac{5}{x}$$

ist. Diese Ungleichung ist aber schon für $x = 6^5$ richtig. Denn wegen $\log 6 < 2$ ist sogar

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{25\log 6 + 5}{7776} < 0.3 + \frac{55}{7776} < 0.31\,.$$

Das Nachprüfen der Ungleichung (27) für $x \leqq 7776$ geschieht wieder nach der P. I, § 2 angewandten Methode, erfordert aber von den dort vorgenommenen 30 Einzelproben nur die 24 ersten.

Es sei noch bemerkt, daß man auf diesem Wege auch beweisen kann, daß für $x \geqq 2$

(28) $$\pi(x) < 1.4\cdot\frac{x}{\log x}$$

ist. Denn rechnet man mit 1.4 an Stelle von 1.5, so wird man auf die Ungleichung

$$1.4 - \frac{1.4}{6} - 0.93 > 1\cdot4\cdot\frac{\log 6}{\log x} + \frac{5\log x}{x} + \frac{5}{x}$$

geführt. Sie gilt schon für $x = 6^6 = 46656$. Für kleinere Werte verifiziert man aber (28) nach der vorhin erwähnten Methode ohne allzu große Mühe[2].

Mit Hilfe der schärferen Ungleichung (28) lassen sich die mühsamen Rechnungen des § 2 ein wenig vereinfachen. Das Durchdiskutieren der Primzahlen unterhalb 100 scheint sich aber auch auf diesem Wege nicht umgehen zu lassen, ohne daß allzu umständliche Abzählungen in der Primzahltafel erforderlich werden.

---

[1] Vgl. das auf S. 375 zitierte LANDAUsche Handbuch Bd. I, S. 90. TSCHEBYSCHEFF operiert sogar mit $\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < ax + \frac{5}{2}\log x$, was aber für unseren Zweck nichts wesentlich Besseres liefert.

[2] Es genügen bei ziemlich rohem Abschätzen 45 Einzelproben.

Elementarer Beweis des FENCHELschen Satzes über die Krümmung geschlossener Raumkurven.

Von Prof. Dr. HEINRICH LIEBMANN
in Heidelberg.

(Vorgelegt von Hrn. SCHMIDT.)

In seiner Dissertation »Über die Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven« (Berlin 1928)[1] hat Hr. W. FENCHEL den Beweis des Satzes über die Länge L des sphärischen Tangentenbildes S einer geschlossenen Raumkurve K auf neue sehr allgemeine Sätze über die kleinste konvexe Hülle zusammenhängender Punktmengen gestützt.

Es soll hier gezeigt werden, daß dieser Satz sich auch durch ganz elementare Betrachtungen ableiten läßt.

Zu beweisen ist: »Die Länge L des sphärischen Tangentenbildes S einer geschlossenen eigentlichen (d. h. nicht in einer Ebene gelegenen) Raumkurve ist größer als 2π.«

Die S-Kurve hat die Eigenschaft, von jedem Großkreis G der Bildkugel geschnitten zu werden.

Wir betrachten jetzt auf S irgendein Punktepaar AB von der Art, daß die beiden Bögen (AB) und (BA) von S einander gleich sind und verbinden A und B durch einen Großkreisbogen $AB \leqq \pi$.

Ist AB gleich π, dann ist $L \geqq 2\pi$, und das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn S aus zwei die Gegenpunkte A und B verbindenden Großkreishälften besteht, die aber einem Großkreis angehören müssen, weil sonst nicht jeder Großkreis die Kurve S schneidet. K ist dann eine ebene Kurve.

Ist $AB < \pi$, so betrachte man den Großkreis G, dessen Ebene auf dem Kugelhalbmesser senkrecht steht, der AB halbiert.

S soll jeden Großkreis, also auch G schneiden, etwa in P. Dann ist

$$\frac{L}{2} = (AP) + (PB) > AP + PB.$$

[1] Auch Math. Ann. 101 (1929), 238—252.

Wenn also noch nachgewiesen ist, daß die Summe der Großkreisbogen AP und PB gleich π ist, dann folgt

$$L > 2\pi ,$$

d. h. der Fenchelsche Satz.

Es ist also nur noch zu beweisen: Die Summe $AP + PB$ der sphärischen Abstände zweier Punkte A und B einer Kugelfläche, die symmetrisch zur Achse eines Großkreises G liegen, von den Punkten P auf G ist gleich π.

Am schnellsten gelangt man zu dieser Eigenschaft, wenn man zu A noch den Gegenpunkt A_1 auf der Kugel konstruiert. A_1 ist zugleich das Spiegelbild von B an der Ebene, die G enthält, und es ist

$$AP + PA_1 = \pi ,$$

$$PA_1 = PB ,$$

also

$$AP + PB = \pi ,$$

was zu beweisen war.

Zur Partition der Zahlen.

Von Prof. Dr. Theodor Vahlen
in Greifswald.

(Vorgelegt von Hrn. Schmidt.)

In der Gleichung

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdot + a_n x_n = z \tag{1}$$

seien $a_0, a_1, \cdots, a_n, z$ positive ganze teilerfremde Zahlen. Die Anzahl der Lösungen $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ in positiven ganzen Zahlen $x_0, x_1, \cdots, x_n$ werde mit $f_n(z)$ bezeichnet. $f_n(z)$ werden wir darstellen durch eine ganze, rationale, grade oder ungrade Funktion n-ter Ordnung von

$$z_n = z - \frac{1}{2} s_n, \tag{2}$$

wo

$$a_0 + a_1 + \cdots a_n = s_n \tag{3}$$

gesetzt ist, und einen Rest, der bei paarweis teilerfremden a_i nur eine endliche Anzahl von Werten annimmt, nämlich die Periode hat

$$p_n = a_0 a_1 \cdots a_n . \tag{4}$$

Überdies ist der Mittelwert der p_n Werte des Restes gleich Null.

I. Im Falle $n = 1$ ist die Anzahl der auf der Graden

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 = z \tag{5}$$

im positiven Quadranten $x_0 > 0$, $x_1 > 0$ gelegenen Gitterpunkte (x_0, x_1) um Eins größer als die Anzahl der zwischen diesen Gitterpunkten gelegenen Strecken. Die Strecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gitterpunkten auf (5): (x_0, x_1), $(x_0 \pm a_1, x_1 \mp a_0)$ beträgt $\sqrt{a_0^2 + a_1^2}$, die Gesamtstrecke von (5) zwischen den Koordinatenachsen beträgt $\sqrt{\left(\frac{z}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_1}\right)^2} = \frac{z}{p_1}\sqrt{a_0^2 + a_1^2}$ und jede der beiden Endstrecken zwischen einer Achse und einem äußersten Gitterpunkt ist nicht größer als $\sqrt{a_0^2 + a_1^2}$. Demnach wird

$$\frac{z}{p_1}\sqrt{a_0^2 + a_1^2} = [f_1(z) - 1]\sqrt{a_0^2 + a_1^2} + 2\delta\sqrt{a_0^2 + a_1^2}, \qquad (0 < \delta \leqq 1)$$

also

$$f_1(z) = \frac{z}{p_1} + \varepsilon . \qquad (-1 \leqq \varepsilon < +1) \quad (6)$$

Aus jeder Lösung von

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 = z + p_1 \qquad (7)$$

erhält man eine von (5), nämlich $(x_0, x_1 - a_0)$, außer aus derjenigen, in der $x_1 < a_0$ ist. Demnach ist

$$f_1(z + p_1) - f_1(z) = 1$$

oder allgemeiner

$$f_1(z + hp_1) - f_1(z) = h . \qquad (8)$$

Wir setzen jetzt

$$f_1(z) = \frac{z_1 + \rho_1(z)}{p_1}, \qquad (9)$$

so wird nach (8)

$$\rho_1(z + hp_1) - \rho_1(z) = 0, \qquad (10)$$

d. h. $\rho_1(z)$ hat die Periode p_1, also nur p_1 verschiedene Werte, z. B. die für

$$z = s_1, \; s_1 + 1, \; s_1 + 2, \cdots, s_1 + p_1 - 1 . \qquad (11)$$

Die Summe von (9) über (11) ergibt:

$$\sum_{(11)} f_1(z) = \frac{1}{p_1}\left\{ p_1 \frac{s_1}{2} + p_1 \frac{p_1 - 1}{2} \right\} + \frac{1}{p_1} \sum_{(11)} \rho_1(z) . \qquad (12)$$

Links steht die Gesamtzahl der Lösungen von (5) für die Werte (11) von z, d. h. die Anzahl der Gitterpunkte zwischen den Achsen und der Graden $a_0 x_0 + a_1 x_1 = s_1 + p_1$, diese ausgeschlossen, d. h. die Hälfte der Gitterpunkte

$$1 \leqq x_0 \leqq 1 + a_1, \quad 1 \leqq x_1 \leqq 1 + a_0$$

abzüglich der zwei auf $a_0 x_0 + a_1 x_1 = s_1 + p_1$ gelegenen $(1, 1 + a_0)$, $(1 + a_1, 1)$; also steht in (12) links:

$$\frac{1}{2}\left\{ (1 + a_0)\ (1 + a_1) - 2 \right\} = \frac{1}{2}(s_1 + p_1 - 1) .$$

Also folgt aus (12):

$$\frac{1}{p_1} \sum_{(11)} \rho_1(z) = 0, \qquad (13)$$

d. h. der Mittelwert von $\rho_1(z)$ ist Null.

II. Aus der Lösung $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ von

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = z + a_n \qquad (14)$$

ergibt sich entweder eine Lösung von (1), nämlich $(x_0, x_1, \cdots, x_n - 1)$, oder, falls nämlich $x_n = 1$ ist, eine Lösung von $a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} = z$.

Also ist

$$f_n(z + a_n) - f_n(z) = f_{n-1}(z) . \qquad (15)$$

Summiert man (15) über

$$z,\ z+a_n,\ z+2a_n,\ \cdots,\ z+(hp_{n-1}-1)\,a_n, \tag{16}$$

so bekommt man

$$f_n(z+hp_n)-f_n(z)=\sum_{(16)} f_{n-1}(z) \tag{17}$$

für jede ganze Zahl h. Für $n=1$ ist $f_0(z)=1$ oder 0 zu setzen, je nachdem z durch a_0 teilbar oder nicht. Dann geht (17) über in (8).

III. Durch die Reihe

$$\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=c_0-c_1x^2+c_2x^4-\cdots$$

werden die Koeffizienten erklärt: $c_0=1$, $c_1=\frac{1}{6}$, $c_2=\frac{7}{360}$, $\cdots$, die mit den Bernoullischen Zahlen

$$B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=\frac{1}{30},\cdots$$

durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$c_1=\frac{2^2-2}{2!}B_2,\quad c_2=\frac{2^4-2}{4!}B_4,\cdots.$$

Allgemeiner setzen wir:

$$\prod_{a=a_0}^{a_n}\frac{ax}{e^{\frac{a}{2}x}-e^{-\frac{a}{2}x}}=c_0^{(n)}-c_1^{(n)}x^2+c_2^{(n)}x^4-\cdots=F_n(x).$$

Dann ist

$$F_n(x)\frac{e^{\frac{a_n}{2}x}-e^{-\frac{a_n}{2}x}}{a_nx}=F_{n-1}(x). \tag{18}$$

Man kann die $c_i^{(n)}$ auch erklären als Summen aller Glieder $2i$-ter Ordnung der a_k aus den Monomen

$$c_1\left(\frac{a_k}{2}\right)^2,\ c_2\left(\frac{a_k}{2}\right)^4,\ c_3\left(\frac{a_k}{2}\right)^6,\cdots(k=0,\ 1,\cdots,\ n).$$

Z. B. wird: $c_0^{(n)}=1$, $c_1^{(n)}=c_1\sum\left(\frac{a_k}{2}\right)^2$,

$$c_2^{(n)}=c_2\sum\left(\frac{a_k}{2}\right)^4+c_1^2\sum_{k\neq h}\left(\frac{a_k}{2}\right)^2\left(\frac{a_h}{2}\right)^2,\ \text{usw.}$$

IV. Die ganze rationale Funktion:

$$g_n(z)=c_0^{(n)}\frac{z_n^n}{n!}-c_1^{(n)}\frac{z_n^{n-2}}{(n-2)!}+c_2^{(n)}\frac{z_n^{n-4}}{(n-4)!}-\cdots \tag{19}$$

ist der Koeffizient von x^n in der Entwicklung von $F_n(x)\,e^{z_n x}$. Also folgt aus (18) durch Multiplikation mit $e^{(z_n+1/2\,a_n)x} = e^{z_{n-1}x}$:

$$\frac{g_n(z+a_n)-g_n(z)}{a_n} = g_{n-1}(z)\,. \tag{20}$$

Summiert man (20) über (16), so kommt:

$$\frac{g_n(z+hp_n)-g_n(z)}{p_n} = \frac{1}{p_{n-1}} \sum_{(16)} g_{n-1}(z)\,. \tag{21}$$

Setzt man insbesondere $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 1$, also $p_n = 1$, $s_n = n+1$, so wird $g_1(z) = z_1 = z-1$, $g_2(z) = \frac{1}{2}\,z_2^2 - c_1^{(2)} = \frac{1}{2}\,(z-1)\,(z-2)$, $g_3(z) = \frac{1}{6}z_3^3 - \frac{1}{6}\,z_3 = \frac{1}{6}\,(z-1)\,(z-2)\,(z-3)$, usw.

Allgemein, weil nach (20) die Rekursionsformel besteht:

$$g_n(z+1) = g_n(z) + g_{n-1}(z)\,,$$

folgt:

$$g_n(z) = \binom{z-1}{n}\,,$$

bis auf eine von z unabhängige Zahl. Daß diese 0 ist, folgt für $z_n = 0$ bei ungradem n aus (19), bei gradem n aus

$$c^{(n)}_{\frac{n}{2}} = \frac{\left(1\cdot 3\cdots(n-1)\right)^2}{n!\,2^n} = \frac{n-1}{4n}\cdot c^{(n-2)}_{\frac{n-2}{2}}$$

und dies, indem man

$$2\,D\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^n} = \frac{1-n}{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^{n-1}} - \frac{4n}{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^{n+1}}$$

über einen kleinen Kreis um den Nullpunkt integriert und beachtet, daß

$$c^{(n)}_{\frac{n}{2}} = \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^{n+1}}\right]_{x-1} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2\pi i}\int \frac{dx}{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^{n+1}}$$

ist.

Für $z = n+1$ folgt

$$g_n(n+1) = 1$$

V. Wir setzen jetzt:

$$f_n(z) = \frac{g_n(z)+\rho_n(z)}{p_n}\,. \tag{22}$$

Vermittels (17) und (21) folgt:

$$\frac{\rho_n(z+hp_n)-\rho_n(z)}{p_n} = \frac{1}{p_{n-1}} \sum_{(16)} \rho_{n-1}(z)\,. \tag{23}$$

Daß $\rho_n(z)$ die Periode p_n und den Mittelwert $\rho_n^\circ = 0$ hat, soll durch den Schluß von $n-1$ auf n bewiesen werden. Und zwar für die Voraussetzung, daß die $a_0, a_1, \cdots, a_n$ paarweis teilerfremd sind. Dann bezieht sich, weil a_n teilerfremd zur Periode p_{n-1} von $\rho_{n-1}(z)$ ist, die Summe in (23) auf h vollständige Restsysteme (mod p_{n-1}), wird also gleich $h\rho_{n-1}^\circ = 0$, da dies bis zum Index $n-1$ bewiesen vorausgesetzt wird. Demnach folgt aus (23), daß $\rho_n(z)$ die Periode p_n hat. Entsprechend (23) ist auch:

$$\frac{\rho_{n+1}(z+hp_{n+1}) - \rho_{n+1}(z)}{p_{n+1}} = h\rho_n^\circ,$$

wenn a_{n+1} teilerfremd zu p_n gewählt wird. Die linke Seite hängt symmetrisch von $a_0, a_1, \cdots, a_{n+1}$ ab, also auch die rechte, die aber von a_{n+1} unabhängig ist. Also ist ρ_n° eine numerische Konstante. Wir ermitteln sie aus der Annahme $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 1$, $z = n+1$, $p_n = 1$, $\rho_n(z) = \rho_n^\circ$. Hier ist $f_n(n+1)$ die Lösungszahl von $x_0 + x_1 + \cdots x_n = n+1$, als gleich Eins. Da auch $g_n(n+1) = 1$ ist, so ergibt (22) $\rho_n^\circ = 0$, was zu beweisen war.

VI. Wir lassen die Voraussetzung, daß $a_0, a_1, \cdots, a_n$ paarweis teilerfremd sind, fallen. In Verallgemeinerung von (18) und (20) ist für jede Zahl r:

$$(re^x)^{z_n} \prod_{a_0}^{a_n} \frac{(re^x)^{\frac{a}{2}}}{(re^x)^a - 1} \cdot \left((re^x)^{a_n} - 1\right) = (re^x)^{z_{n-1}} \prod_{a_0}^{a_{n-1}} \frac{(re^x)^{\frac{a}{2}}}{(re^x)^a - 1}, \qquad (24)$$

$$G_n(z+a_n) - G_n(z) = G_{n-1}(z), \qquad (25)$$

wenn mit $G_n(z)$ die Funktion

$$(re^x)^{z_n} \prod_{a_0}^{a_n} \frac{(re^x)^{\frac{a}{2}}}{(re^x)^a - 1} = (re^x)^z \prod_{a_0}^{a_n} \frac{1}{(re^x)^a - 1}$$

oder ein Koeffizient derselben oder eine Summe solcher Koeffizienten für verschiedene Werte von r bezeichnet wird. Sei jetzt

$$G_n(z) = \sum_r \left[\frac{(re^x)^z}{\prod_a (re^x)^a - 1} \right]_{x-1} \qquad (26)$$

summiert über alle verschiedenen r, die der Gleichung genügen:

$$\prod_a (r^a - 1) = 0. \qquad (27)$$

Jetzt setzen wir

$$f_n(z) = G_n(z) + P_n(z) \qquad (28)$$

und beweisen durch den Schluß von $n-1$ auf n, daß der Rest $P_n(z) = 0$ ist. Für $n = 0$, die Gleichung $a_0 x_0 = z$, ist $f_0(z) = 1$ oder $= 0$, je nachdem ob z durch a_0 teilbar ist oder nicht. Dasselbe gilt für $G_0(z)$, denn dies hat den Wert

$$\left[\sum_r \frac{(re^x)^z}{(re^x)^{a_0} - 1} \right]_{x-1} = \left[\sum_r \frac{r^z}{a_0 x + \cdots} \right]_{x-1} = \frac{\sum_r r^z}{a_0}.$$

Demnach ist $P_0 = 0$.

Aus (15) und (25) folgt:

$$P_n(z + a_n) - P_n(z) = P_{n-1}(z), \tag{29}$$

also, da $P_{n-1}(z) = 0$ als bewiesen vorausgesetzt wird,

$$P_n(z + a_n) = P_n(z), \tag{30}$$

d. h. $P_n(z)$ hat die Periode a_n, also auch $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, also auch deren größten Gemeinteiler 1, d. h. es ist $P_n(z)$ von z unabhängig. Wie in V. hängt $p_n P_n = P_{n+1}(z + p_{n+1}) - P_{n+1}(z)$ von $a_0, a_1, \cdots a_{n+1}$ symmetrisch, also nicht ab. Den Wert dieser Konstanten $p_n P_n$ ermitteln wir, indem wir für z einen Wert $\zeta < n+1$ nehmen, so daß $f_n(\zeta) = 0$ ist. Also ergibt (28):

$$-P_n = G_n(\zeta) = \sum_r \left[\frac{(re^x)^\zeta}{\prod_a (re^x)^a - 1} \right]_{x-1}.$$

Summieren wir diese Gleichung über alle Werte $\zeta + a'_0 + a'_1 + \cdots a'_n$, wo jedes a'_i die Werte $0, 1, 2, \cdots, a_i - 1$ annimmt, also immer $\zeta + a'_0 + a'_1 + \cdots + a'_n < s_n$, mithin $f_n(\zeta + a'_0 + a'_1 + \cdots + a'_n) = 0$ ist, so bekommen wir:

$$-\prod_{i=0}^{n} a_i P_n = \sum_r \left[(re^x)^\zeta \prod_a \frac{(re^x)^a - 1}{re^x - 1} \prod_a \frac{1}{(re^x)^a - 1} \right]_{x-1}$$

$$= \sum_r \left[\frac{(re^x)^\zeta}{(re^x - 1)^{n+1}} \right]_{x-1} = \left[\frac{e^{x\zeta}}{(e^x - 1)^{n+1}} \right]_{x-1}$$

$$= \left[e^{x\zeta_n} \prod_a \frac{ax}{e^{\frac{a}{2}x} - e^{-\frac{a}{2}x}} \right]_{x^n},$$

wenn alle $a = 1$ gesetzt werden. Dies ist aber grade nach IV gleich $g_n(\zeta) = \binom{\zeta - 1}{n}$, also gleich Null, weil $\zeta < n+1$ gewählt wurde. Damit ist bewiesen, daß allgemein $P_n = 0$, also nach (28) $f_n(z) = G_n(z)$, d. h. nach (26)

$$f_n(z) = \sum_r \left[\frac{(re^x)^z}{\prod_a (re^x)^a - 1} \right]_{x-1} \tag{31}$$

ist. Dies ist ein Ergebnis von Sylvester[1], das wir aber hier mit elementaren Mitteln gewonnen haben, die einen deutlichen Einblick in das Wesen der auftretenden Funktionen gestatten.

Der auf $r = 1$ bezügliche Teil der Summe (31) ist:

$$\left[\frac{e^{xz}}{\prod_a e^{xa} - 1} \right]_{x-1} = \frac{1}{p_n} \left[\prod_a \frac{ax}{e^{\frac{a}{2}x} - e^{-\frac{a}{2}x}} e^{xz_n} \right]_{x^n}$$

also gleich

$$\frac{g_n(z)}{p_n}.$$

[1] Quart. Journal of Mathematics 1 (1857) S. 81 und 131; Philos. Mag. 16 (1858) S. 369 und 371; Amer. Journ. of Math. 5 (1882) S. 119.

Der auf die übrigen Wurzeln r von (27) bezügliche Teil der Summe (31) wird, wenn man $z+p$ für z setzt, wo p durch jedes a_i teilbar ist, gleich:

$$\left[\sum_r \frac{(re^x)^{z+p}}{\prod_a (re^x)^a - 1}\right]_{x-1} = \left[\sum_r \frac{(re^x)^z}{\prod_a (re^x)^a - 1}\right]_{x-1} + \left[\sum_r \frac{(re^x)^z}{\prod_a (re^x)^a - 1}\right]_{x-2} \frac{p}{1!}$$
$$+ \left[\sum_r \frac{(re^x)^z}{\prod_a (re^x)^a - 1}\right]_{x-3} \frac{p^2}{2!} + \cdots$$

mit dem ν-ten Gliede abbrechend, wenn von den a höchstens ν einen Gemeinteiler haben.

Sind alle a paarweis teilerfremd, so bleibt nur das erste Glied übrig, d. h. $f_n(z) - \frac{g_n(z)}{p_n}$ hat die Periode p_n. Überdies wird die Summe der verschiedenen Werte dieses Restes, wenn man die Glieder mit demselben r summiert, in jeder solchen Teilsumme den Faktor

$$\sum r^h \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots, p_n - 1)$$

enthalten, also verschwinden.

Über die geschlossenen Bahnen in der Mondtheorie.

Von Dr. Eberhard Hopf
in Berlin-Dahlem.

(Vorgelegt von Hrn. Schmidt.)

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist eine mathematische Untersuchung gewisser periodischer Lösungen spezieller dynamischer Probleme, die in der Himmelsmechanik, insbesondere der Mondtheorie, eine wichtige Rolle spielen. Es handelt sich dabei hauptsächlich um das (ebene) problème restreint, bekanntlich denjenigen Spezialfall des (ebenen) Dreikörperproblems, bei welchem eine Masse gleich Null ist, während die beiden übrigen (durch den masselosen Punkt unbeeinflußten) Massen sich in Kreisen um ihren Schwerpunkt bewegen. Wie üblich, bezieht man die (ebene) Bewegung des masselosen Punktes auf ein mit beiden positiven Massen fest verbundenes, daher mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Schwerpunkt rotierendes Koordinatenkreuz. Legt man den Koordinatenanfang $x = y = 0$ in die eine Masse M, so erhalten die Bewegungsgleichungen des masselosen Punktes die Gestalt

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial y}; \qquad \Omega(x, y) = \frac{M}{r} + U(xy), \quad r^2 = x^2 + y^2, \tag{I}$$

unter $U(x, y)$ eine an der Stelle $x = y = 0$ jedenfalls reguläre analytische Funktion verstanden[1]. Den folgenden Ausführungen ist diese allgemeine Form der Bewegungsgleichungen zugrunde gelegt. Im problème restreint hat man bekanntlich

$$U(x, y) = \frac{M_1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{\omega^2}{2}[(x+b)^2 + y^2]^{\,2} \tag{1}$$

[1] Betreffs (I), (1), (2), (2 a) vgl. Charlier, Die Mechanik des Himmels II, § 5, insbesondere p. 137—140. Das Auftreten der Komponenten $-2\omega\frac{dy}{dt}$, $2\omega\frac{dx}{dt}$ der »Corioliskraft« ist charakteristisch für die Bezugnahme auf ein rotierendes Koordinatensystem.

[2] Der erste Summand ist das Potential der von M_1 herrührenden Anziehung, der zweite Summand das Potential der (durch die Rotation des Koordinatensystems bedingten) Zentrifugalkraft.

unter $x = -a$, $y = 0$ die Koordinaten der zweiten Masse M_1, und unter $x = -b$, $y = 0$ die Koordinaten des Schwerpunkts von M, M_1 verstanden. Der HILL-BROWNschen Mondtheorie liegt der Fall

$$U(x, y) = \left(\frac{3}{2}\omega^2 - \frac{M}{a^2}\right)x^2 + \frac{M}{2a^3}y^2 \qquad (2)$$

zugrunde. Diesen Ausdruck erhält man, wenn man die Reihenentwicklung von (1) nach Potenzen von x, y bei den Gliedern zweiter Ordnung abbricht (Bewegung in infinitesimaler Nähe von M) und die Konstantenbeziehungen $\omega^2 a^3 = M + M_1$ (Drittes Keplersches Gesetz) und $(a-b)M_1 = bM$ (Schwerpunktsbeziehung) berücksichtigt. Läßt man überdies a bei festgehaltenem ω und M über alle Grenzen wachsen (Vernachlässigung der Sonnenparallaxe), so erhält man aus (2)

$$U(x, y) = \frac{3}{2}\omega^2 x^2, \qquad (2\,a)$$

das HILLsche parallaxenlose Mondproblem.

Mit Rücksicht auf die Mondtheorie sind diejenigen periodischen Lösungen von (I) von Interesse, bei welchen der masselose Punkt eine geschlossene Bahn um die Masse M beschreibt. Genauer handelt es sich dabei um eine Schar

$$x(t; m), \quad y(t; m)$$

geschlossener Bahnen um $x = y = 0$, welche sich für $m \to 0$ auf diesen Punkt zusammenziehen; der Scharparameter m ist so gewählt, daß

$$\frac{2\pi}{|m|}$$

gleich der jeweiligen Periode der Bewegung (synodische Umlaufszeit) ist, und daß das Vorzeichen von m dem Umlaufssinn entspricht[1].

Im folgenden wird die Existenz einer solchen Schar periodischer Lösungen von (I) für hinreichend kleine $|m|$ streng bewiesen[2]. Des weiteren wird gezeigt, daß dabei die Koordinaten des Bahnpunktes nach Potenzen von $\sqrt[3]{m}$ entwickelbar sind,

$$x(t; m) = m^{\frac{2}{3}}\left\{\cos\tau + \sum_{\nu=1}^{\infty} m^{\frac{\nu}{3}}\phi_\nu(\tau)\right\}M^{\frac{1}{3}}$$
$$y(t; m) = m^{\frac{2}{3}}\left\{\sin\tau + \sum_{\nu=1}^{\infty} m^{\frac{\nu}{3}}\psi_\nu(\tau)\right\}M^{\frac{1}{3}}, \quad t = m\tau, \qquad (3)$$

unter $\phi_\nu(\tau)$, $\psi_\nu(\tau)$ periodische Funktionen von τ mit der Periode 2π verstanden; die Reihen konvergieren nebst den beliebig oft nach τ gliedweise differenzierten Reihen für alle hinreichend kleinen $|m|$ und für alle τ absolut und gleichmäßig.

---

[1] Im Falle (1) vgl. J. FISCHER-PETERSEN, Astron. Nachr. 200 (1914), p. 385—404, 202 (1915), p. 201—204.

[2] Daß es außer den Bahnen dieser Schar keine weiteren in der Nähe von $x = y = 0$ verlaufenden geschlossenen Bahnen von hinreichend kleiner Periode gibt, ist sehr wahrscheinlich. Ein strenger Beweis dieser plausiblen Vermutung ist mir jedoch nicht gelungen.

Man bemerkt, daß für $m \to 0$ die Form der Bahnen sich der Kreisform nähert.

Die obige Schar periodischer Lösungen bildet im Falle (2a) des parallaxenfreien Mondproblems den Gegenstand von Hills berühmten »Researches in the lunar theory«[1]. Es handelt sich in diesem Falle um die Hillsche Schar der »Variationsbahnen« des Mondes; eine unter ihnen dient der modernen Mondtheorie als intermediäre Bahn zur Berechnung der genauen Bahn des Erdmondes.

Die erste Schwierigkeit in der mathematischen Behandlung jener Schar geschlossener Bahnen von (I) liegt darin, daß $x = y = 0$ eine singuläre Stelle der Bewegungsgleichungen ist. Hill ging dieser Schwierigkeit im Falle (2) bzw. (2a) dadurch aus dem Wege, daß er das (für die Singularität verantwortliche) Glied $\frac{M}{r}$ aus den Gleichungen (I) mit Hilfe des Jakobischen Integrals

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2M}{r} + 2U + c$$

eliminierte. Der Fourieransatz $z = x + iy = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu(m) e^{i\nu\tau}$ führt dann nach Einsetzen in die (von der Singularität befreiten) Bewegungsgleichungen zu einem unendlichen, von Hill praktisch gelösten System von Bedingungsgleichungen für die Fourierkoeffizienten $a_\nu(m)$. Die strenge Begründung dieser kühnen Methode und damit auch den Konvergenzbeweis von (3) für hinreichend kleine $|m|$ im Falle (2) sowie weitergehende Untersuchungen über die Hillsche Schar verdankt man Hrn. A. Wintner[2]. Ferner hat Hr. E. Hölder[3] den Existenzbeweis für die Hillsche Schar auf anderem Wege, unter Heranziehung der Lichtensteinschen Methode der Integrodifferentialgleichungen, erbracht.

Natürlich ist die Durchführbarkeit des Hillschen Ansatzes nicht auf den speziellen Fall

$$U(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2$$

beschränkt. Jedoch werden bereits im problème restreint die Hillschen unendlichen Bedingungsgleichungen ungemein kompliziert. Überhaupt liegt es im Charakter der Hillschen Methode begründet, daß bei ihr das dynamisch Wesentliche des Problems sehr in den Hintergrund tritt. Im folgenden wird ein anderer Ausgangspunkt zur Behandlung jener Schar periodischer Lösungen gewählt. Der Ansatz beruht auf einer einfachen Plausibilitätsbetrachtung: Da in der Nähe von $x = y = 0$ die Anziehung der Masse M vorherrscht, werden erwartungsgemäß die Bahnen jener Schar für kleine $|m|$ nahezu Keplersche Ellipsen sein, insbesondere wird die große Halbachse von der Größenordnung $m^{\frac{2}{3}}$ sein (Drittes Keplersches Gesetz). Die hierdurch nahegelegte Transformation

$$x = \mu^2 \xi, \quad y = \mu^2 \eta, \quad t = \mu^3 \tau; \quad \mu^3 = m \qquad (4)$$

bringt in der Tat die Bewegungsgleichungen (I) auf eine Form, bei welcher μ derart als Gleichungsparameter eingeht, daß für $\mu = 0$ die Gleichungen

[1] G. W. Hill, Coll. Math. Works 1, Washington 1905, p. 284—335.

[2] A. Wintner, Math. Zeitschr. 24 (1925), p. 259—265; 28 (1928), p. 430—450; 30 (1929), p. 211—227.

[3] Erscheint demnächst in der Math. Zeitschr.

formal in die Gleichungen der Keplerbewegung übergehen. Es handelt sich also bei dieser Auffassung um eine »gestörte« Keplerbewegung. Da die Bahnen jener Schar, im Zeitmaß τ gemessen, alle die gleiche Periode 2π besitzen, ist die Behandlung jener Schar auf die folgende Frage zurückgeführt:

Gegeben ist eine periodische Lösung des »ungestörten« Problems ($\mu = 0$) mit der Periode 2π (Keplersche Ellipse mit der großen Halbachse $\sqrt[3]{M}$). Gibt es für hinreichend kleine $|\mu|$ eine diese Bahn enthaltende stetige Schar periodischer Lösungen des »gestörten« Problems mit gleicher Periode 2π?

Zur Behandlung dieser Frage werden im folgenden klassische Methoden herangezogen, wie sie Poincaré in seiner berühmten Theorie der periodischen Lösungen des Dreikörperproblems entwickelt hat[1]. Die Rotation des Koordinatensystems wird dabei eine entscheidende Rolle spielen. Es zeigt sich, daß die obige Frage dann und nur dann zu bejahen ist, wenn die Exzentrizität der »Ausgangsellipse« verschwindet.

§ 1. Die kanonischen Bewegungsgleichungen in elliptischen Elementen.

Durch geeignete Wahl der Einheiten für Länge und Zeit erreicht man stets, daß

$$\omega = M = 1$$

ist. Die Einführung von (4) in die Bewegungsgleichungen (I) ergibt dann leicht

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2\mu^3\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\partial\mu^2\Omega}{\partial\xi}, \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\mu^3\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\partial\mu^2\Omega}{\partial\eta}; \tag{II}$$

$$\mu^2\Omega = \frac{1}{\rho} + \mu^2 U(\mu^2\xi, \mu^2\eta), \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Man bemerkt, daß diese Gleichungen für $\mu = 0$ in die Gleichungen der gewöhnlichen Keplerbewegung um eine im Punkte $\xi = \eta = 0$ befindliche Masse Eins übergehen. Es handelt sich somit bei (II) um die Gleichungen einer in bestimmter Weise gestörten Keplerbewegung. Wir stellen dann die Frage:

Gegeben ist eine in positivem Sinne durchlaufene geschlossene Bahn des ungestörten Problems ($\mu = 0$) mit der Bahnperiode 2π, d. h. eine rechtläufige Keplersche Ellipse mit der großen Halbachse Eins. Gibt es für hinreichend kleine $|\mu|$ eine diese »Ausgangsellipse« enthaltende stetige Schar geschlossener Bahnen von (II) mit der gleichen Periode 2π?

Geht man wieder zu den alten Variablen x, y, t zurück, so geht eine derartige Schar offenbar in eine Schar periodischer Bahnen von (I) über, welche

---

[1] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I (1892), Chap. III, insbesondere p. 133—139. Bei den von Poincaré ins Auge gefaßten Anwendungen der Methode ist die mechanische Bedeutung des »Störungsparameters« μ durchweg die eines Massenfaktors.

Eine Klasse periodischer Lösungen des Dreikörperproblems, welche die Hillsche Schar als Spezialfall enthält, behandelt mit Hilfe anderer Poincaréscher Methoden F. R. Moulton, Transact. of the Amer. Math. Soc. Vol. 7, p. 537—577 (1906).

für $\mu \to 0$ auf den Punkt $x = y = 0$ zusammenschrumpfen; die Bahnen sind für $\mu > 0$ rechtläufig, für $\mu < 0$ rückläufig, und die jeweilige Bahnperiode ist gleich $2\pi|\mu|^3 = 2\pi|m|$.

Zur Behandlung der obigen Frage mit Hilfe Poincaréscher Methoden seien die kanonischen Variablen

$$x_1 = \xi, \quad y_1 = \frac{d\xi}{d\tau} - \mu^3\eta, \qquad x_2 = \eta, \quad y_2 = \frac{d\eta}{d\tau} + \mu^3\xi \tag{5}$$

eingeführt. Die Differentialgleichungen (II) gehen dann in die Hamiltonsche Form

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \tag{III}$$

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2; \mu) = \tfrac{1}{2}(y_1 + \mu^3 x_2)^2 + \tfrac{1}{2}(y_2 - \mu^3 x_1)^2 - \mu^2\Omega$$

über. Man darf hierbei gewiß[1]

$$\mu^2\Omega = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \mu^4 V(x_1, x_2; \mu) \tag{6}$$

setzen, unter V eine in einem Gebiete der Form

$$\mu^4(x_1^2 + x_2^2) < c \qquad (c > 0) \tag{7}$$

reguläre analytische Funktion von x_1, x_2, μ verstanden. Die Entwicklung nach Potenzen des »Störungsparameters« μ ergibt

$$F = F_0 + \mu^3 F_3 + \mu^4 F_4 + \cdots \tag{8}$$

mit

$$F_0 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \qquad F_3 = y_1 x_2 - y_2 x_1, \tag{8a}$$

d. h. F_0 ist die Keplersche Energie und F_3 das Impulsmoment des Bahnpunktes. Man bemerke, daß die eigentlichen durch U repräsentierten »störenden« Kräfte wegen (6) erst in F_4, F_5, $\cdots$ auftreten.

Wir führen schließlich noch die Poincaréschen elliptischen Elemente

$$p_1 = \lambda, \quad p_2 = \eta, \quad q_1 = L, \quad q_2 = \xi \,^2$$

statt der x_i, y_i als neue Variable ein. Die Transformation

$$x_i, y_i \to p_i, q_i$$

[1] Offenbar darf man $U(0,0) = 0$ voraussetzen.

[2] Genaues über die elliptischen Elemente findet man etwa in Poincaré, Leçons de la mécanique céleste I, Chap. III. Oben handelt es sich um die Bewegung in einer festen Ebene. Die auf die Neigung und Knotenlänge bezüglichen Elemente fallen dann fort ($\xi_2 = \eta_2 = 0$). Die oben gebrauchten Elemente erhält man aus den allgemeinen Poincaréschen, indem man dort noch $m = M = 1$ setzt. Natürlich sind hier ξ, η mit den in (II) eingeführten Koordinaten ξ, η nicht zu verwechseln.

ist bekanntlich kanonisch, und (III) geht daher in

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2) \qquad \text{(IV)}$$
$$F = F_0 + \mu^3 F_3 + \mu^4 F_4 + \cdots$$

über. Mit Rücksicht auf (8a) hat man dann

$$F_0 = -\frac{1}{2q_1^2}, \quad F_3 = \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} - q_1, \qquad \text{(8b)}$$

die bekannten Darstellungen von Energie und Impulsmoment in Poincaréschen Elementen. Im ungestörten Falle ($\mu = 0$) ist offenbar

$$(\mu = 0) \qquad \frac{dp_1}{d\tau} = \frac{1}{q_1^3}, \quad \frac{dp_2}{d\tau} = \frac{dq_1}{d\tau} = \frac{dq_2}{d\tau} = 0.$$

Von den Zusammenhängen der Poincaréschen Elemente mit den gewöhnlichen elliptischen Elementen merken wir uns nur die Beziehungen

$$q_1 = \sqrt{a}, \quad p_2^2 + q_2^2 = 2\sqrt{a}\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right) \qquad (9)$$

($a =$ große Halbachse, $e =$ Exzentrizität); $p_1 = \lambda$ ist die mittlere Länge. Die x_i, y_i hängen von p_1 periodisch mit der Periode 2π ab. Sie sind ferner analytische Funktionen der Poincaréschen Elemente, und zwar für alle reellen Wertsysteme derselben, welche den Ungleichungen

$$q_1 > 0, \quad p_2^2 + q_2^2 < c_1 q_1 \ ^1$$

genügen, unter c_1 eine passende Konstante mit $0 < c_1 < 1$ verstanden. Mit Rücksicht auf die Ungleichungen $a(1-e) \leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqq a(1+e)$ und auf (7) erkennt man dann leicht, daß die Hamilton-Funktion F im Bereiche

$$q_1 > 0, \quad p_2^2 + q_2^2 < c_1 q_1, \quad |\mu| q_1 < c_2 \qquad (10)$$

($c_2 > 0$) eine analytische Funktion von p_i, q_i und μ ist. Wir bemerken noch, daß stets

$$x_2 = 0 \text{ und } x_1 > 0 \text{ für } p_1 = 0$$

ist.

Von einer periodischen Lösung von (IV) mit der Periode T wird man naturgemäß dann sprechen, wenn

$$p_1(\tau + T) = 2\pi + p_1(\tau), \quad p_2(\tau + T) = p_2(\tau), \quad q_i(\tau + T) = q_i(\tau)$$

ist. Sie stellt, in der x_1, x_2-Ebene betrachtet, gewiß eine rechtläufige und in gewöhnlichem Sinne periodische Bahn von (III) um den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ mit der Periode T dar.

Über den Nullpunkt der Zeit kann offenbar so verfügt werden, daß

$$p_1 = 0 \text{ für } \tau = 0$$

---

[1] Die Form dieser Ungleichung rührt daher, daß die x_i, y_i homogene Funktionen von $\sqrt{L}$, ξ, η sind.

ist, d. h. in der x_1, x_2-Ebene, daß der Bahnpunkt im Zeitanfang die positive Hälfte der x_1-Achse passiert.

Unsere Frage kann nunmehr endgültig folgendermaßen formuliert werden:

Gegeben sei eine ungestörte ($\mu = 0$) periodische Lösung von (IV) mit der Periode 2π,

$$p_1 = \tau, \quad p_2 = p_2^0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = q_2^0.$$

Bei welchen Werten von p_2^0, q_2^0 gibt es für hinreichend kleine $|\mu|$ eine diese Ausgangslösung enthaltende stetige Schar periodischer Lösungen

$$p_i(\tau ; \mu), \quad q_i(\tau ; \mu)$$

von (IV) mit der festen Periode 2π?

§ 2. Heranziehung Poincaréscher Methoden.

Zur Beantwortung dieser Frage und zur Untersuchung des analytischen Charakters der periodischen Lösungen ziehen wir die Methoden heran, auf welche Poincaré seine Theorie der periodischen Lösungen zweiter Art (sorte) im Dreikörperproblem gegründet hat. Wir entwickeln sie der Vollständigkeit halber kurz in einer dem vorliegenden Problem angefaßten Form. Es sei

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}; \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

$$F = F(p_1, p_2, q_1, q_2; \mu)$$

ein von einem »Störungsparameter« μ abhängiges dynamisches System mit zwei Freiheitsgraden. F sei hierbei eine periodische Funktion von p_1 mit der Periode 2π. Des weiteren sei F eine analytische Funktion seiner Argumente, und zwar für alle Wertsysteme derselben, für welche der Punkt (p_2, q_1, q_2) in einem festen dreidimensionalen Gebiete liegt und für welche etwa $|\mu| < \mu_0$ ist. Die Entwicklung nach Potenzen des Störungsparameters sei von der Form

$$F(p_1, p_2, q_1, q_2; \mu) = F_0(q_1) + \mu^3 F_3(p_2, q_1, q_2) + \mu^4 F_4 + \cdots, \tag{11a}$$

so daß also F_0 nur von q_1 abhängt, F_3 von p_1 unabhängig ist, und im übrigen F_4, F_5 periodisch von p_1 mit der Periode 2π abhängen. Über F_0 machen wir noch die Voraussetzung

$$\frac{dF_0}{dq_1} > 0. \tag{11b}$$

Im ungestörten Falle ($\mu = 0$) lautet die allgemeine Lösung von (11) offenbar

$$\begin{aligned} p_1 &= n\tau + p_1^0, & q_1 &= q_1^0 \\ p_2 &= \mu_2^0, & q_2 &= q_2^0, \end{aligned} \qquad n = \frac{dF_0}{dq_1}(q_1^0). \tag{12}$$

Wir nennen sie periodisch (vgl. den Schluß von § 1) mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{n}\,^{1}. \tag{12a}$$

Allgemein sei eine Lösung von (11) als periodisch mit der Periode T bezeichnet, wenn

$$p_1(\tau + T) = 2\pi + p_1(\tau), \quad p_2(\tau + T) = p_2(\tau), \quad q_i(\tau + T) = q_i(\tau)$$

gilt. Eine Lösung ist gewiß periodisch mit der Periode T, wenn diese Beziehungen für einen speziellen Wert von τ, etwa $\tau = 0$, erfüllt sind.

Im allgemeinen Falle wird eine Lösung von (11) mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1^0 + \alpha_1, \quad & q_1 &= q_1^0 + \beta_1 \\ p_2 &= p_2^0 + \alpha_2, \quad & q_2 &= q_2^0 + \beta_2 \end{aligned} \quad \text{für } \tau = 0 \tag{13}$$

zur Zeit $\tau = T$ die Werte

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1^0 + \alpha_1 + \phi_1 + nT, \quad & q_1 &= q_1^0 + \beta_1 + \psi_1 \\ p_2 &= p_2^0 + \alpha_2 + \phi_2, & q_2 &= q_2^0 + \beta_2 + \psi_2 \end{aligned} \quad \text{für } \tau = T \tag{14}$$

annehmen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann

$$p_1^0 = \alpha_1 = 0 \tag{15}$$

angenommen werden ($p_1 = 0$ für $\tau = 0$). Man erreicht dies stets durch passende Wahl des Zeitanfangs[2].

Verläuft nun die ungestörte Bahn (12) ganz im Regularitätsgebiete der Funktion F, so sind nach klassischen Theoremen über die analytische Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten und Parametern[3] ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, ψ_2 gewiß analytische Funktionen von α_1, α_2, β_1, β_2 und μ an der Stelle $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$. Offenbar ist

$$\phi_1 = \phi_2 = \psi_1 = \psi_2 = 0 \text{ für } \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \mu = 0.$$

Die den Anfangswerten (13) entsprechende Lösung von (11) ist dann und nur dann periodisch im obigen Sinne mit der Periode T, wenn

$$\phi_1 = \phi_2 \,(= \psi_1) = \psi_2 = 0 \tag{16}$$

ist. Durch die Klammer ist angedeutet, daß $\psi_1 = 0$ eine Folge der übrigen Gleichungen ist; denn wegen des Integrals $F = \text{const.}$ von (11) hat man für $\phi_1 = \phi_2 = \psi_2 = 0$, wenn noch die Periodizität von F in p_1 mit der Periode $2\pi = nT$ beachtet wird,

$$\begin{aligned} &F(p_1^0 + \alpha_1, p_2^0 + \alpha_2, q_1^0 + \beta_1, q_2^0 + \beta_2; \mu) \\ &= F(p_1^0 + \alpha_1, p_2^0 + \alpha_2, q_1^0 + \beta_1 + \psi_1, q_2^0 + \beta_2; \mu). \end{aligned}$$

Wegen (11b) ist dies bei hinreichend kleinem $|\mu|$ nur für $\psi_1 = 0$ möglich.

---

[1] Man beachte im folgenden, daß durch die Periode T der Wert von q_1^0 wegen (11b) eindeutig bestimmt ist.

[2] Offenbar ist dies möglich, wenn man sich auf hinreichend kleine Werte der $|\alpha_i|$, $|\beta_i|$, $|\mu|$ beschränkt, wie dies im folgenden durchweg der Fall ist.

[3] Vgl. Méth. nouv. I p. 58—61. Vgl. auch Goursat, Cours d'analyse III, 4. Aufl., p. 20—25.

Zur Bestimmung einer die Lösung (12) enthaltenden μ-Schar periodischer Lösungen von (11) hat man aus den Gleichungen (16) α_2, β_1, β_2 als Funktionen von μ zu berechnen. Wir beweisen zunächst das

Lemma 1. Ist (12) die Ausgangslösung einer μ-Schar periodischer Lösungen von (11) mit der Periode T, so muß F_3 der Bedingung

$$\frac{\partial F_3}{\partial p_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_2} = 0$$

für $p_2 = p_2^0$, $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0$ genügen.

Beweis. Die Gleichungen $\phi_2 = \psi_2 = 0$ sind offenbar für $\mu = 0$ identisch in α_2, β_1, β_2 erfüllt. Es empfiehlt sich daher der Poincarésche Kunstgriff, statt (16) die Gleichungen

$$\phi_1 = \frac{\phi_2}{\mu^3} = \frac{\psi_2}{\mu^3} = 0 \tag{17}$$

zu betrachten. In der Tat sind $\frac{\phi_2}{\mu^3}$ und $\frac{\psi_2}{\mu^3}$ analytisch an der Stelle $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$; denn aus (11), (11a), (13), (14) folgt leicht

$$\phi_2 = \int_0^T \frac{\partial F}{\partial q_2} d\tau = \mu^3 \int_0^T \frac{\partial F_3}{\partial q_2} d\tau + \mu^4 \int_0^T \frac{\partial F_4}{\partial q_2} d\tau + \cdots$$

und Entsprechendes für ψ_2. Speziell ergibt sich für $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_2}{\mu^3} &= T \frac{\partial F_3}{\partial q_2}(p_2^0 + \alpha_2, q_1^0 + \beta_1, q_2^0 + \beta_2), \\ \frac{\psi_2}{\mu^3} &= -T \frac{\partial F_3}{\partial p_2}(p_2^0 + \alpha_2, q_1^0 + \beta_1, q_2^0 + \beta_2). \end{aligned} \qquad (\mu = 0) \tag{18}$$

Aus (17) und (18) folgt unmittelbar der Beweis des Lemmas.

Lemma 2. Unter den Voraussetzungen

$$\frac{\partial F_3}{\partial p_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_2} = 0,$$

$$\frac{d^2 F_0}{dq_1^2} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial p_2^2}\frac{\partial^2 F_3}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_2 \partial q_2}\right)^2 \neq 0$$

für $p_2 = p_2^0$, $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0$ gibt es für hinreichend kleine $|\mu|$ eine eindeutig bestimmte[1] Schar

$$p_i(\tau; \mu), \quad q_i(\tau; \mu) \qquad (i = 1, 2)$$

periodischer Lösungen von (11) mit der festen Periode T und mit Anfangswerten der Form

$$\begin{aligned} p_1(0; \mu) &= 0, & q_1(0; \mu) &= q_1^0 + \beta_1(\mu), \\ p_2(0; \mu) &= p_2^0 + \alpha_2(\mu), & q_2(0; \mu) &= q_2^0 + \beta_2(\mu), \end{aligned}$$

[1] D. h. es gibt zwei positive Zahlen $\varkappa$ und μ_0, derart, daß zu jedem μ mit $0 < |\mu| < \mu_0$ eine und nur eine in der $\varkappa$-Umgebung der Lösung (12) gelegene periodische Lösung von (11) mit der Periode T existiert.

unter α_2, β_1, β_2 an der Stelle $\mu = 0$ analytische und verschwindende Funktionen verstanden.

Beweis. Wir brauchen mit POINCARÉ nur zu zeigen, daß unter den Voraussetzungen von Lemma 2 die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial\left(\phi_1, \frac{\phi_2}{\mu^3}, \frac{\psi_3}{\mu^3}\right)}{\partial(\alpha_2, \beta_1, \beta_2)}$$

der Gleichungen (17) an der Stelle $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$ von Null verschieden ist; denn da nach Voraussetzung die Gleichungen (17) durch das Wertesystem $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$ befriedigt werden, lassen sich dann α_2, β_1, β_2 aus (17) für hinreichend kleine $|\mu|$ auf genau eine Weise als eindeutige, an der Stelle $\mu = 0$ analytische und verschwindende Funktionen von μ bestimmen.

Zum Beweise berechnen wir noch ϕ_1 für $\mu = 0$. Aus (13), (14), (15) folgt wegen (11) leicht

$$\phi_1 = T\left\{\frac{dF_0}{dq_1}(q_1^0 - \beta_1) - \frac{dF_0}{dq_1}(q_1^0)\right\}. \qquad (\mu = 0) \quad (19)$$

Somit ist für $\mu = 0$ ϕ_1 von α_2 und β_2 unabhängig, und die besagte Funktionaldeterminante zerfällt daher für $\mu = 0$ in die Faktoren

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \beta_1}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{\phi_2}{\mu^3}, \frac{\psi_2}{\mu^3}\right)}{\partial(\alpha_2, \beta_2)}.$$

Berechnet man nun diese Faktoren aus (18) und (19) für $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, so erhellt ohne weiteres die Richtigkeit von Lemma 2.

§ 3. Die Schar geschlossener Bahnen von (I) um $x = y = 0$.

Die am Schluß von § 1 gestellte Frage läßt sich nunmehr ohne weiteres beantworten. Das kanonische System (IV) genügt allen in § 2 eingangs gemachten Voraussetzungen. Die HAMILTONsche Funktion F ist im Gebiete (10), a fortiori also im Gebiete

$$\frac{1}{2} < q_1 < 2, \quad p_2^2 + q_2^2 < \frac{c_1}{2}, \quad |\mu| < \frac{c_2}{2}$$

eine analytische Funktion der reellen Argumente p_i, q_i, μ. Nach (8b) ist

$$F_0 = -\frac{1}{2q_1^2}, \quad F_3 = \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} - q_1,$$

so daß auch (11b) erfüllt ist. Da es sich im folgenden um periodische Lösungen mit der Periode $T = 2\pi$ handelt, hat man wegen (12a)

$$n = \frac{1}{(q_1^0)^3} = 1, \quad \text{d. h. } q_1^0 = 1. \qquad (20)$$

Im ungestörten Falle ($\mu = 0$) verlaufen daher diese periodischen Lösungen

$$p_1 = \tau\,, \quad p_2 = p_2^0\,, \quad q_1 = 1\,, \quad q_2 = q_2^0$$

von (IV) gewiß ganz im Regularitätsgebiet von F, wenn $(p_2^0)^2 + (q_2^0)^2 < \frac{c_1}{2}$ ist. Damit nun überhaupt eine anschließende stetige Schar periodischer Lösungen von (IV) mit der Periode 2π existieren kann, muß wegen Lemma 1 und (8 b)

$$p_2^0 = q_2^0 = 0$$

sein. Wegen (9) bedeutet dies aber, daß als Ausgangslösung nur die Kreisbahn mit dem Radius Eins in Frage kommt.

Daß es tatsächlich eine von dieser Kreisbahn ausgehende derartige Schar gibt, folgt unmittelbar aus dem Lemma 2. Die beiden Ausdrücke, auf deren Nichtverschwinden es dort ankam, haben nämlich in unserem Falle offenbar die Werte $-\frac{3}{(q_1^0)^4} = -3$ bzw. 1. Die Anfangswerte dieser Schar

$$p_i(\tau\,;\mu)\,, \quad q_i(\tau\,;\mu)$$

periodischer Lösungen von (IV) sind von der Form

$$p_1(0\,;\mu) = 0\,, \quad p_2(0\,;\mu) = \alpha_2(\mu)\,, \quad q_1(0\,;\mu) = 1 + \beta_1(\mu)\,, \quad q_2(0\,;\mu) = \beta_2(\mu)\,,$$

unter $\alpha_i(\mu)$, $\beta_i(\mu)$ an der Stelle $\mu = 0$ analytische und verschwindende Funktionen verstanden.

Kehrt man nunmehr zu den kanonischen Variablen x_i, y_i zurück, so erhält man für hinreichend kleine $|\mu|$ eine Schar

$$x_i(\tau\,;\mu)\,, \quad y_i(\tau\,;\mu)$$

periodischer Lösungen von (III) mit der festen Periode 2π und der Ausgangslösung

$$x_1(\tau\,;0) = y_2(\tau\,;0) = \cos\tau\,, \quad x_2(\tau\,;0) = -y_2(\tau\,;0) = \sin\tau\,.$$

Die Anfangswerte dieser Schar sind von der Form

$$\begin{aligned} &x_1(0\,;\mu) = 1 + \alpha_1(\mu)\,, \quad && y_1(0\,;\mu) = b_1(\mu)\,, \\ &x_2(0\,;\mu) = 0\,, && y_2(0\,;\mu) = 1 + b_2(\mu)\,, \end{aligned} \tag{21}$$

wo $a_i(\mu)$, $b_i(\mu)$ mit Rücksicht auf die analytische Abhängigkeit der x_i, y_i von den p_i, q_i an der Stelle $\mu = 0$ analytisch sind und verschwinden. Eine nochmalige Heranziehung des Cauchy-Poincaréschen Theorems[1] über die analytische Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten und der Zeit lehrt leicht, daß die $x_i(\tau\,,\mu)$ und $y_i(\tau\,,\mu)$ für alle (komplexen) μ mit $|\mu| < \mu_0$ (μ_0 hinreichend klein) und alle reellen τ analytische Funktionen von τ und μ und periodische Funktionen von τ mit der Periode 2π darstellen. Man folgert daraus in bekannter Weise die Existenz von Entwicklungen der Form

[1] Vgl. S. 408 l. c. [3]).

$$x_1(\tau;\mu) = \cos\tau + \sum_{s=1}^{\infty} \phi_s(\tau)\mu^s, \quad x_2(\tau;\mu) = \sin\tau + \sum_{s=1}^{\infty} \psi_s(\tau)\mu^s,^1 \quad (22)$$

wo die Reihen etwa für $|\mu| \leqq \frac{\mu_0}{2}$ nebst den beliebig oft nach τ formal differenzierten Reihen absolut und gleichmäßig konvergieren.

Kehrt man mittels (4) wieder zu den ursprünglichen Variablen $x = \mu^2 x_1$, $y = \mu^2 x_2$, $t = \mu^3 \tau$ zurück, so erhält man endlich die gewünschte Schar periodischer Bahnen von (I) um den Punkt $x = y = 0$. Die Bahnen schrumpfen für $\mu \to 0$ auf diesen Punkt zusammen und sind für $\mu > 0$ rechtläufig, für $\mu < 0$ rückläufig. Die Entwicklungen (3) sind eine unmittelbare Folge von (22). Man kann sie auch direkt durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten schrittweise gewinnen.

§ 4. Schlußbemerkungen.

Im Falle des eingeschränkten Dreikörperproblems (1) herrscht Symmetrie zur x-Achse, $U(x, y) = U(x, -y)$. Infolgedessen ist mit $x(t)$, $y(t)$ auch $x(-t)$, $-y(-t)$ eine Lösung von (I). Somit erhält man eine weitere Schar $x(-t; m)$, $-y(-t; m)$ periodischer Lösungen, welche die gleichen Eigenschaften wie die Schar $x(t; m)$, $y(t; m)$ besitzt. Mit Hilfe der im Lemma 2 von § 2 enthaltenen Eindeutigkeitsbehauptung ist jedoch ohne Mühe zu erkennen, daß beide Scharen Lösung für Lösung übereinstimmen müssen. Dies bedeutet, daß die Bahnen der besagten Schar symmetrisch zur x-Achse (Verbindungslinie beider endlichen Massen) gelegen sind und demgemäß für genügend kleine $|m|$ die x-Achse senkrecht durchsetzen.

Das Hillsche Mondproblem besitzt Symmetrie sowohl zur x- als zur y-Achse. Daher durchsetzen in diesem Falle jene Bahnen für kleine $|m|$ beide Achsen senkrecht. Zum Hillschen Falle sei noch folgendes bemerkt. Da hier $U = a_1 x^2 + a_2 y^2$ ist, hat man in (II) $\mu^2 \Omega = \frac{1}{\rho} + \mu^6 (a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2)$, somit in (III)

$$F = F_0 + \mu^3 F_3 + \mu^6 F_6,$$

d. h. im Hillschen Falle ist F eine analytische Funktion von $\mu^3 = m$. Man erkennt leicht, daß dann alle in § 2 auftretenden Funktionen von μ analytische Funktionen von μ^3 sind, und schließlich, daß in den Entwicklungen (3) für die Hillsche Schar die gebrochenen Potenzen von m unter den Summenzeichen fortfallen.

Wir schließen mit einer grundsätzlichen Bemerkung über die vorangehenden Überlegungen. In der μ-Entwicklung der Hamiltonschen Funktion

$$F = F_0 + \mu^3 F_3 + \mu^4 F_4 + \cdots$$

---

[1] Hierbei ist $\psi_s(0) = 0$ für alle $s = 1, 2, \cdots$. Im übrigen ist unschwer einzusehen, daß $\phi_1 = \psi_1 = \phi_2 = \psi_2 = 0$ ist.

treten die zur Anziehung der in $x = y = 0$ befindlichen Masse noch hinzukommenden (durch U repräsentierten) »störenden« Kräfte erst in $F_4, F_5, \ldots$ auf. Somit besteht die im ersten Augenblick paradox anmutende Tatsache, daß die besondere Natur dieser »störenden« Kräfte in unsere Schlüsse gar nicht eingeht. Der Grund für dieses merkwürdige Verhalten ist darin zu suchen, daß die Bewegung auf ein rotierendes Koordinatensystem bezogen wird. In der Tat rührt das Glied

$$F_3 = y_1 x_2 - y_2 x_1,$$

das bei unseren Schlüssen eine wesentliche Rolle spielte, einzig und allein von der Rotation des Bezugssystems her. Durch diese Rotation ist somit auch die angenäherte Kreisform der Bahnen jener Schar für kleine Werte der Bahnperiode begründet. Die »störenden« Kräfte sind lediglich für die Abweichung von der Kreisform verantwortlich. Im Falle, wo die »störenden« Massen als ruhend gedacht werden und daher das mit ihnen fest verbundene Koordinatensystem ein ruhendes ist, tritt der Koeffizient F_3 gar nicht auf, und unsere Schlüsse werden hinfällig[1]. In der Tat kann hier im allgemeinen von der Existenz einer Schar geschlossener Bahnen der oben behandelten Art nicht mehr die Rede sein[2]. Hieraus erhellt die grundlegende Bedeutung des rotierenden Bezugssystems in der Hill-Brownschen Mondtheorie.

---

[1] Ein interessantes Analogon zu dieser Tatsache ist übrigens das Zeipelsche Theorem über die Energiebefreiung in rotierenden Sternen. Vgl. Seeliger-Festschrift, Berlin 1924, p. 144—152. Vgl. insbesondere die kritischen Bemerkungen in: Eddington, Der innere Aufbau der Sterne, Berlin 1928, p. 350—354.

[2] Im Falle des Zweizentrenproblems, das bekanntlich (Euler) durch Quadraturen lösbar ist, ist leicht zu sehen, daß keine derartige Schar geschlossener Bahnen um eine Masse existiert.

RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen.

(Vierte Mitteilung: Verlauf geodätischer Linien.)

Von PAUL KOEBE
in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

IX. Homotope geodätische Normierung von geschlossenen Linien und von Systemen solcher Linien (56—58).

X. Quasiergodisch und semiergodisch verlaufende Geodätische (59a bis 60).

XI. Individuelle Charakterisierung und Synthesis insbesondere der geschlossenen Geodätischen: Homotopieproblem (61—64).

XII. Topologische Charakterisierung der quasiergodischen und semiergodischen Bahnen (65 und 65a).

XIII. Geodätische Aufschneidung von Raumformen unendlichhoher Zusammenhangsordnung durch getrennte geodätische Querschnitte (66).

XIV. Besondere geodätische Aufschneidungen geschlossener Raumformen: Konfigurationspolygone und Konfigurationsnetze (67—68).

XV. Homotopie und Isotopie (69—72).

Wir betrachten eine beliebige hyperbolische Raumform, geschlossen oder offen, endlicher oder unendlichhoher Zusammenhangsordnung, zweiseitig oder einseitig, schließen jedoch die niederen hyperbolischen Raumformen aus, d. s. die zyklischen hyperbolischen Raumformen, wo nämlich die Fundamentalgruppe aus einer einzigen Erzeugenden gewonnen wird. Die zu betrachtenden Raumformen sind mithin die geschlossenen zweiseitigen Raumformen vom Geschlecht $p \geqq 2$, die geschlossenen einseitigen Raumformen vom Geschlecht $p \geqq 3$, die zweiseitigen und einseitigen offenen Raumformen, deren charakteristische Zahl $\mathfrak{c}$ größer oder gleich 1 ist, deren Zusammenhangszahl mithin größer oder gleich 3 ist (∞ eingeschlossen).

Jede der genannten Raumformen läßt sich durch getrennte Rückkehrschnitte, deren einzelner zerfällend oder nichtzerfällend, zweiufrig oder einufrig sein kann, in dreifach zusammenhängende schlichtartige Elemente (α-Elemente) zerlegen, wobei im Augenblick nur an eine topologische, nicht weiter normierte Zerlegung gedacht wird. Die Anzahl der so sich ergebenden α-Elemente

ist unabhängig von der besonderen Zerlegung und identisch mit der charakteristischen Zahl $\mathfrak{c}$. Bei Zugrundelegung des topologischen Charakters (A, p, q) bzw. (B, p, q) hat man für die geschlossenen Raumformen $\mathfrak{c} = 2p-2$ bzw. $p-2$, allgemein $\mathfrak{c} = 2p+q-2$ bzw. $p+q-2$.

a) Die schon in der dritten Mitteilung im Zusammenhange sozusagen ad hoc zur Behandlung gelangte Frage der homotopen geodätischen Normierung topologisch gegebener geschlossener Linien innerhalb einer Raumform wird zunächst einer allgemeinen selbständigen Erörterung unterworfen. Als unnormierbar auszuscheiden haben die Linien, die homotop null sind (Nullinien) oder homotop dem Multiplum einer parabolischen Öffnungslinie (parabolische Linien). Alle anderen Linien werden wir zweckmäßig als hyperbolische Linien bezeichnen. Die parabolischen Linien sind die einzigen geschlossenen Linien, zu denen parabolische Umlaufssubstitutionen der Größe ζ gehören. Diese Bemerkungen gelten auch für Raumformen unendlichhoher Zusammenhangsordnung.

Wird nun speziell eine einfach geschlossene topologische Linie (Rückkehrlinie, Rückkehrschnitt) gegeben, die nach unserer Terminologie als hyperbolisch zu bezeichnen ist, so kann es doch vorkommen, daß die zugehörende geodätische Normierte nicht wieder eine einfache Linie ist. Das tritt dann und nur dann ein, wenn die betreffende Rückkehrlinie ein Möbiusband $(B, 1, 1)$ von der Raumform abspaltet, in welchem Falle nämlich die Normierte mit dem Doppelt der einufrigen normierten Rückkehrlinie zusammenfällt, deren topologisches Original innerhalb der betreffenden $(B, 1, 1)$ enthalten ist.

Wird nicht nur eine einfache Linie, sondern ein ganzes System von Fundamentallinien topologisch gegeben, die eine α-Zerlegung (Zerlegung in dreifach zusammenhängende schlichtartige Elemente) der Raumform bewirken, so stellt sich stets eine geodätische Zerlegung ein, die mit der gegebenen topologisch äquivalent ist, bei Raumformen des dritten Typus (Fundamentalgruppe auf dem Einheitskreise noch eigentlich diskontinuierlich) mit Grenzhalbebenen jedoch nur semiäquivalent ist, insofern als die normierte Zerlegung dann nur den »Innenteil« der Raumform erfaßt. Über die Äquivalenz hinaus wird im letzten Teile der Arbeit gezeigt, daß die betreffende Zerlegung sogar isotop ist, was bedeutet, daß das System der topologisch gegebenen Linien unter Wahrung seiner Zerlegungseigenschaft in das geodätische System stetig übergeführt werden kann. Auch die Geltung der vorstehenden Bemerkungen erstreckt sich auf alle Raumformen einschließlich derer unendlichhoher Zusammenhangsordnung.

b) Das System aller geschlossenen geodätischen Linien hat auf den geschlossenen zweiseitigen wie einseitigen Raumformen die Eigenschaft, alle Linienelemente der Raumform mit unbeschränktem Genauigkeitsgrade zu approximieren. Dieselbe Eigenschaft besteht auch für alle uneigentlich offenen Raumformen auch unendlichhoher Zusammenhangsordnung, deren Fundamentalgruppe nämlich auf dem Einheitskreise nirgends mehr eigentlich diskontinuierlich ist. Auf Grund dieser Eigenschaft ergibt sich weiter, daß fast alle offenen Geodätischen auf genannten Raumformen quasiergodisch ver-

laufen. Bei den eigentlich offenen Raumformen tritt an die Stelle des quasiergodischen Verlaufs der semiergodische Verlauf, bei welchem die unbeschränkte Approximation sich nur auf die von uns als »ausgezeichnet« bezeichneten Linienelemente erstreckt, die nämlich in der ζ-Ebene nach beiden Seiten hin auf Grenzpunkte der Gruppe zeigen[1]. Ein instruktives einfaches Beispiel quasiergodischen Verlaufs bietet die (A, o, q) mit lauter parabolischen Öffnungen, auf die wir in Nr. 65a spezieller eingehen.

Zu einer topologisch durchsichtigen Bestimmung der quasiergodisch bzw. semiergodisch verlaufenden Bahnen gelangt man durch eine besondere Charakterisierung der geschlossenen und offenen geodätischen Linien durch Indexsymbole, bestehend aus Quersignaturen und Umlaufzahlen, angelehnt an den zu diesem Zwecke aufgestellten Begriff der zu einer Geodätischen gehörenden charakteristischen gebrochenen Linie. Der Grundgedanke ist dabei gegeben in der an die Zellenüberlagerung angelehnte Methode der fundamentalen Schnittreihen, von der ich zuerst in meiner Preisschrift (Urmanuskript 1917)[2] ausgiebigen Gebrauch gemacht habe. Stützbasis ist somit die von mir immer angewandte Elementarzerlegung der Raumformen, deren Verwendung sich auch für diesen Zweck als besonders geschickt erweist.

c) Als weitere Anwendung unserer Methode der fundamentalen Schnittreihen entwickeln wir die geodätische Aufschneidung von Raumformen unendlichhoher Zusammenhangsordnung durch unendlichviele getrennte geodätische Querschnitte, wodurch für Fundamentalgruppen mit unendlichvielen Erzeugenden solche Fundamentalpolygone gewonnen werden, die von lauter getrennten paarweis bezogenen, vollständigen Orthogonalkreisbögen begrenzt werden. Diese Fundamentalpolygone können allerdings, soweit die Untersuchung hier geführt wird, bei eigentlich offenen Raumformen mit »Grenzhalbebenen« Pseudobereiche sein. Als eine letzte Anwendung werden für beliebige geschlossene Raumformen Fundamentalpolygone hergestellt, die wir als Konfigurationspolygone bezeichnen, insofern als sie im Gegensatz zu den bisher im allgemeinen Fall betrachteten Fundamentalpolygonen die Eigenschaft haben, durch ihre Reproduktionen nach der Fundamentalgruppe ein solches Diskontinuitätsnetz (Konfigurationsnetz) zu liefern, bei welchem jede Netzseite nicht nur als solche geodätisch ist, sondern auch mit ihrer ganzen beiderseitigen Verlängerung an dem Netz tatsächlich teilnimmt; ein Vorkommnis, das bei speziellen symmetrischen Fällen ganz bekannt ist[2].

d) Der Leser dieser Schrift wird bemerken, daß dieselbe über die Raumformen und Riemannschen Mannigfaltigkeiten als solche hinausgreift in das Gebiet der reinen Analysis situs der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. In der Tat scheint mir hier noch manches zu tun zu bleiben. Mit dem, was ich in der gegenwärtigen Mitteilung über Homotopie und Isotopie entwickele, glaube

---

[1] Über meine vorstehend unter b) genannten allgemeinen Resultate habe ich bereits vor einem Jahr einigen Mathematikern gelegentlich des Bologna-Kongresses (Sept. 1928) Mitteilung gemacht.

[2] S. weiter unten »Literarisches« unter Koebe.

ich diesen Begriffen auf den einfachsten Grund gekommen zu sein, ein Umstand, vermöge dessen ich hier die Isotopiefrage ohne Schwierigkeit in ihrer ganzen Allgemeinheit, auch für einseitige Flächen, klären und davon bei unseren besonderen Problemen Gebrauch machen konnte.

Literarisches.

HADAMARD: »Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques«, Journ. de math. pur. et appl., 5. ser., t. 4 (1898). HADAMARD betrachtet natürliche endlich-vielfach zusammenhängende (offene) Flächen negativer Krümmung, die er eigens konstruiert. Die bei ihm auftretende Unterscheidung der »nappes évasées« und »nappes non évasées« ist analog unserer Unterscheidung der hyperbolischen und parabolischen Öffnungen. Durch flächentheoretische Betrachtungen unter ausdrücklicher Beschränkung auf Flächen mit lauter »nappes évasées« gelangt er zum Beweise der Existenz geschlossener Geodätischen auf solchen Flächen, wobei er den topologischen Verlauf vorschreiben kann. Weiter entwickelt HADAMARD Häufungseigenschaften offener Geodätischen, insbesondere gewinnt er für seine Flächen den Satz von der Existenz solcher offenen Geodätischen, die eine beliebige unendliche Serie von geschlossenen Geodätischen in immer wiederholten Anläufen mit schließlich jedem beliebigen Genauigkeitsgrade approximieren; ein typisches Verhalten, wie es in anderer Problemlage schon von POINCARÉ (»Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste«, t. I, pag. 82) erörtert wird.

Derselbe: »Sur le billard non euclidien«, Procès-verbaux soc. sciences phys., Bordeaux 1898, S. 147—149; vgl. Fußnote S. 443.

KOEBE: Urmanuskript (1917) der Preisschrift (Acta 50), inbesondere »Dritter nichteuklidisch-geometrischer Teil«, enthaltend u. a. die auf der Zellenüberlagerung basierte Methode der fundamentalen Schnittreihen zur Bestimmung des Verlaufs geodätischer Linien in Anwendung auf die unter c) der Einleitung aufgeführten Probleme der geodätischen Aufschneidung und der Konfigurationspolygone. Das »Urmanuskript« ist deponiert im Mathematischen Institut MITTAG-LEFFLER zu Djursholm; s. die »Schlußnotiz« in Acta 50 S. 157. Auf die erwähnten Probleme bezieht sich gleichfalls die kleine Note:

Derselbe: »Zur Geometrie der automorphen Fundamentalgruppen«, Gött. Nachr. 1918, S. 54—56.

Anmerkung: Bezugnahmen auf die in vorliegender Mitteilung ganz allgemein für die Raumformen entwickelte Häufungstheorie der Geodätischen finden sich im Urmanuskript meiner Preisschrift nicht.

Derselbe: »RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen«, erste, zweite, dritte Mitteilung; Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1927, S. 164—196; 1928, S. 345—384; 1928, S. 385—442.

H. M. MORSE: »A one-to-one representation of geodesics on a surface of negative curvature«, Am. Journ. Vol. 43, S. 33—51 (1921).

»Recurrent geodesics on a surface of negative curvature«; Am. Trans. Bd. 22, S. 84—100 (1921).

Diese beiden Arbeiten beziehen sich auf die von HADAMARD konstruierten (offenen) natürlichen Flächen negativer Krümmung mit lauter »nappes évasées«. Die Idee topologischer Charakterisierung der betrachteten Geodätischen findet bei MORSE einen eigenen Ausdruck; auch in der nachgenannten Arbeit:

Derselbe: »A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one«; Am. Trans. Vol. 26, S. 25—60 (1924).

In letzterer Arbeit wird zur Untersuchung der Geodätischen auf geschlossenen räumlichen Flächen vom Geschlecht p eine topologische Hilfsabwicklung derselben in die nichteuklidische Ebene vorgenommen, so daß eine Fundamentalgruppe entsteht mit einem Fundamentalpolygon mit $4p$ gleichen Winkeln der Größe $\frac{\pi}{2p}$ und $4p$ gleich großen Seiten.

U. a. wird hier für diese Fundamentalgruppe auf S. 32 das Lemma gebracht von der Existenz von Achsen, deren Endpunkte zwei gegebenen Punkten des Einheitskreises beliebig nahekommen.

J. Nielsen: »Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen«; Hamburger Seminarabhandlungen Bd. 3, S. 246 ff. (1924).

»Zur Topologie der geschlossenen Flächen«; Skandinavischer Kongreß, Kopenhagen 1925, S. 263 ff.

»Om geodaetiske Linier i lukkede Mangfoldigheder med konstant negativ Krumning«; Mat. Tidsskrift B, 1925 (Juel-Festschrift), S. 37—44.

»Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen«; Acta math. Bd. 50, S. 190ff. (1928), insbesondere 1. Abschnitt S. 193—231.

Nielsen bezieht sich auf dasselbe reguläre Polygon, das von Morse in seiner genannten gleichzeitigen Publikation benutzt wird, und beweist für die betreffende spezielle Raumform die Existenz quasiergodischer Geodätischen.

Nielsen gibt in Acta l. c. auch eine eigene Behandlung des Homotopieproblems für geschlossene zweiseitige Flächen. Vgl. auch Morse l. c.

Zur Frage der Homotopie und Isotopie nennen wir weiter:

M. Dehn: Enzyklopädie III 1, 1 (Dehn-Heegard), 1907; Math. Ann. Bd. 71 u. 72, 1912; autographierter Vortrag Breslauer Colloquium vom 12. 2. 1922. Dissertation Gieseking, Münster 1912.

R. Baer: »Kurventypen auf Flächen«; Journ. f. Math. 156 (1927), S. 231—246.

»Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen«; Journ. f. Math. Bd. 159, S. 101—116 (1928).

In diesen Arbeiten Hinweise auf Nielsen, Dehn, Kerekjarto, zurückleitend zu Poincaré, C. Jordan.

Wegen der Beziehungen der Verlaufstheorie der Geodätischen zur Dynamik ist außer Poincaré (l. c.) besonders namhaft zu machen:

G. D. Birkhoff: »Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques«; Bull. Soc. de France Bd. 40 (1912), S. 305—323.

»Dynamical Systems«. Am. Math. Soc., Colloquium-Publications, Vol. IX, 1927, insbesondere Chapter VIII »the case of two degrees of freedom«.

»Einige Probleme der Dynamik«; Berliner Gastvorträge (1928), erschienen im Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinigung, Bd. 38 (1929), S. 1—16.

Einen kleinen durch die zahlentheoretische Beziehung bemerkenswerten Beitrag liefert

E. Artin: »Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen«; Hamburger Seminarabhandlungen Bd. 3 (1924), S. 170—175.

Während der Drucklegung der vorliegenden Mitteilung des Verfassers (Sitzungsberichte der Akademie vom 25. Juli 1929, s. auch Fußnote 1 S. 416 vorliegender Arbeit) erschien in Bd. 30, Heft 4 (S. 572—607) der Math. Zeitschrift (zweite Hälfte August 1929) eine Arbeit des Herrn F. Loebell »Über die geodätischen Linien der Clifford-Kleinschen Flächen«, in welcher nach einer andern Methode die hier in X behandelten Häufungseigenschaften der Geodätischen untersucht sind. Bemerken möchte ich, daß die von Loebell S. 578 oben aufgeführten Sätze einschränkungsbedürftig sind, insofern als dabei das hier unten S. 422 Mitte durch (*) gekennzeichnete Vorkommnis übersehen ist.

IX. Homotope geodätische Normierung von geschlossenen Linien und von Systemen solcher Linien.

56. Die erste Frage, die wir stellen, ist die nach dem Auftreten **parabolischer Substitutionen** in der Fundamentalgruppe; eine Frage, die wir bereits früher gestreift haben.

Liegt eine geschlossene hyperbolische Raumform vor, so treten in ihr unter keinen Umständen parabolische Substitutionen auf, gleichgültig, ob die Raumform einseitig oder zweiseitig ist. Nimmt man nämlich das Vorkommen einer solchen Substitution an, so möge diese in der Form $Z' = Z + c$ (c reell positiv) dargestellt sein, unter Zugrundelegung der oberen Z-Halbebene an Stelle des ζ-Einheitskreises. Wählt man in der oberen Z-Halbebene eine Strecke der Länge c parallel der Achse des Reellen und verschiebt diese

vertikal nach oben ins Unendliche, so wird dabei ihre absolute Länge der Null zustreben. Es würde also in der geschlossenen Raumform geschlossene Linien beliebig kleiner absoluter Länge geben, die nicht homotop null wären, längs denen vielmehr die Uniformisierende z den additiven Zuwachs von c erfahren würde. Offenbar ist aber in der Raumform jede geschlossene Linie, deren absolute Länge unterhalb einer gewissen von Null verschiedenen Schranke liegt, auf einen Punkt zusammenziehbar, d. h. homotop null.

Betrachten wir zweitens eine offene hyperbolische Raumform endlicher Zusammenhangsordnung, die dabei zweiseitig oder einseitig sein kann. Nehmen wir jetzt an, daß eine parabolische Substitution vorkomme, so lehrt die obige Betrachtung, daß die der erwähnten Strecke entsprechende geschlossene Linie der Raumform in dieser eine Bewegung ausführen muß, bei der sie jeden abgeschlossenen inneren Teilbereich einmal endgültig verläßt. Dann wird sie schließlich ganz einem Öffnungsstück der Raumform angehören, mithin homotop einem Multiplum der zugehörenden Öffnungslinie sein. Die Öffnung selbst aber kann dabei nur eine parabolische Öffnung sein, weil die Umlaufssubstitution einer hyperbolischen Öffnung stets hyperbolisch ist.

Liegt endlich eine Raumform unendlichhoher Zusammenhangsordnung vor, so schließen wir bei Annahme einer geschlossenen Linie L in der Raumform, längs welcher die Größe z eine parabolische Substitution $z' = z + c$ erfährt, daß L einer solchen Deformation fähig ist, bei der sie allmählich jeden inneren Teilbereich der Raumform verläßt. Mündet sie dabei in eine Öffnung der unendlich-vielfach zusammenhängenden Raumform, so folgt, daß die Linie wieder einem Multiplum der Öffnungslinie einer parabolischen Öffnung der Raumform homotop ist. Mündet sie aber nicht in eine Öffnung, so muß sie während ihrer Deformation offenbar unendlich viele verschiedene α-Elemente einer als zugrunde liegend angenommenen topologischen Hauptdarstellung passieren. Sei nun α_0 ein solches α-Element. Eine gewisse Abwicklung dieses Elements in die z-Ebene vollzieht sich dann notwendig in der Weise, daß die ganze Ausbreitung der zugehörenden $\alpha_0^{(\infty)}$ oberhalb des gemäß $z' = z + c$ periodischen Abwickelungsbildes der Ausgangs-L bleibt. Den verschiedenen Grenzgewinden der Überlagerungsfläche $\alpha_0^{(\infty)}$ entsprechen in der z-Ebene unendlichviele getrennte Linien, die nur im Punkt $z = \infty$ endigen können, deren Deckbewegungen in sich folglich nur parabolische Substitutionen, nämlich Translationen in Richtung parallel der Achse des Reellen sein können. Offenbar können nun aber unendlichviele derartige Linien niemals einen zusammenhängenden Bereich begrenzen. Damit ist ein Widerspruch gewonnen[1].

Unser Ergebnis ist demnach folgendes: Längs einer geschlossenen Linie L in einer hyperbolischen nichtniederen, sonst aber ganz beliebig zu denkenden Raumform erfährt die Uniformisierende ζ dann und nur dann eine parabolische Substitution, wenn diese Linie homotop einem Multiplum einer Öffnungslinie ist, die zu einer parabolischen Öffnung gehört. Das Zustande-

[1] Einen etwas anderen Beweis gebe ich in Acta 50 S. 155 ff. Vgl. »Urmanuskript« (1917) l. c.

kommen parabolischer Substitutionen in der Fundamentalgruppe setzt hiernach voraus, daß die Raumform offen ist und weiter, daß sie parabolische Öffnungen besitzt. Die Linie L muß dann selbst zweiufrig sein.

Als Folge des Vorhergehenden ergibt sich nun weiter: Ist L eine geschlossene, in einer nichtniederen hyperbolischen Raumform geführte Linie, die weder homotop null noch homotop einem Multiplum der Öffnungslinie einer parabolischen Öffnung der Raumform ist, so existiert zur Linie L eine und nur eine geschlossene geodätische Linie, die mit L homotop ist. Man findet diese mit L homotope geodätische Linie, indem man ein Abwicklungsbild der L wählt, welches nun offenbar in zwei voneinander verschiedenen Punkten (Fixpunkten) der Peripherie des ζ-Einheitskreises mündet, und diese Linie durch den Orthogonalkreisbogen ersetzt, der die erwähnten beiden Fixpunkte durch das Innere des ζ-Einheitskreises miteinander verbindet.

Den Deformationsvorgang hat man sich in der ζ-Ebene so ausgeführt zu denken, daß während der Deformation die mit der Abwicklung der L unmittelbar gegebene Zerlegung der Abwicklungslinie in unendlichviele äquivalente Stücke gewahrt wird, was offenbar keinen Schwierigkeiten begegnet, auch dann nicht, wenn es sich um eine einufrige Linie handelt. Es ist weiter evident, daß auch die mit L homotope geschlossene Geodätische eindeutig bestimmt ist. In der Tat muß ja längs irgend zwei homotopen geschlossenen Linien eine und dieselbe ζ-Substitution vorkommen, deren Fixpunkte dann ja nur durch einen Orthogonalkreisbogen verbunden werden können. Zu beachten ist noch, daß selbstverständlich die gewonnene Geodätische sich als Multiplum einer einfachen geschlossenen Geodätischen repräsentieren kann. Im vorstehenden ist zugleich enthalten, daß zwei verschiedene geschlossene geodätische Linien niemals homotop sind. So sind beispielsweise die an einer geodätischen normierten Zerlegung der Raumform in α-Elemente teilnehmenden geschlossenen Geodätischen sämtlich untereinander inhomotop. Auch sind niemals geschlossene Geodätische, die verschiedenzählige Multipla derselben Spurlinie sind, einander homotop.

57. Es werde nun spezieller angenommen, daß die vorgegebene Linie L ein **Rückkehrschnitt** in der Raumform ist. In diesem Falle läßt sich ein einfaches Kennzeichen dafür angeben, daß die Uniformisierende ζ längs L eine parabolische Substitution erfährt, sowie auch dafür, daß diese Uniformisierende längs L die identische Substitution erfährt. Das erstere tritt nämlich dann und nur dann ein, wenn L von der Raumform eine $(A, 0, 2)$, nämlich ein Öffnungsstück abschneidet, das einer parabolischen Öffnung angehört. Die identische Substitution tritt dann und nur dann ein, wenn L von der Raumform eine $(A, 0, 1)$, nämlich eine einfache schlichtartige Scheibe abschneidet, innerhalb deren sie dann offenbar auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.

Zunächst ist ja klar, daß für das Zustandekommen einer parabolischen Substitution oder der identischen Substitution vorausgesetzt werden muß, daß der Rückkehrschnitt L zweiufrig ist; einufrige würden ja unter allen Umständen eine hyperbolische Gleitspiegelung der Umlaufssubstitution ergeben.

Nehmen wir nun weiter an, es sei L ein nichtzerfällender Rückkehrschnitt mit parabolischer Umlaufssubstitution innerhalb der Raumform, über deren Zusammenhangsverhältnisse wir übrigens keine besonderen Voraussetzungen machen. Die längs L aufgeschnittene Raumform heiße R'. Die $R^{(\infty)}$ kann dann aus unendlichvielen Exemplaren $R'^{(\infty)}$ in uns geläufiger Weise aufgebaut werden. Die $R'^{(\infty)}$ hat, da R' zweifellos mindestens dreifach zusammenhängend ist, unendlichviele Liniengewinde $L^{(\infty)}$ als Begrenzung. Die Linie $L^{(\infty)}$ bildet sich in die ζ-Ebene jedesmal als ein leicht modifizierter parabolischer Bahnkreis ab, jedenfalls als eine Kurve, deren beide Enden mit entgegengesetzt gerichteter Tangente, den Fundamentalkreis berührend, in einem parabolischen Fixpunkte einlaufen. Innerhalb dieser Bahnlinie findet sich nun ein eindeutiges, an die genannte Linie unmittelbar anschließendes Bild der $R'^{(\infty)}$. Dieses müßte demnach von unendlichvielen verschiedenen solchen modifizierten parabolischen Bahnlinien begrenzt sein; was aber nicht möglich ist, da höchstens zwei derartige Linien an der Begrenzung eines zusammenhängenden Bereiches teilnehmen können. Die zu L gehörende Umlaufssubstitution kann also nur hyperbolisch sein.

Nehmen wir zweitens an, die Linie L zerfälle die Raumform in zwei Teile R' und R''. Sind nun beide Teile mindestens dreifach zusammenhängend, so tritt offenbar vorstehende Betrachtung wieder in Kraft, nur mit dem Unterschied, daß zwei Flächen, $R'^{(\infty)}$ und $R''^{(\infty)}$, jede einzelne von unendlichvielen Gewinden $L^{(\infty)}$ begrenzt, beim Aufbau der $R^{(\infty)}$ in unendlichvielen Exemplaren eingehen. Die Umlaufssubstitution wäre demnach wieder notwendig hyperbolisch.

Soll also eine parabolische Substitution zustande kommen, so muß jedenfalls einer der Teile zweifach zusammenhängend, d. i. entweder eine $(A, 0, 2)$ oder eine $(B, 1, 1)$ sein. Im letzteren Falle wäre aber L homotop dem doppelt durchlaufen zu denkenden, in der $(B, 1, 1)$ vorhandenen einufrigen Rückkehrschnitt, mithin wäre die längs L sich ergebende ζ-Substitution die zweite Potenz einer Gleitspiegelung, also sicher eine hyperbolische Substitution. Liegt andererseits der Fall der $(A, 0, 2)$ vor, so ist eben L ein Öffnungsschnitt. Dann wird die Substitution in der Tat parabolisch, sofern die abgeschnittene Öffnung eben eine parabolische Öffnung ist.

Was nun das Zustandekommen der identischen Substitution längs eines Rückkehrschnittes betrifft, so belehrt uns die Methode auch darüber sofort. Nehmen wir nämlich an, daß L nicht eine $(A, 0, 1)$ abtrenne, so zerlegt L die R in zwei Stücke, deren keines einfach zusammenhängend ist, oder L läßt die R ein Ganzes, welches dann auch nicht einfach zusammenhängend ist. Wenden wir nun unsere oben benutzte Methode des Aufbaues der Überlagerungsfläche $R^{(\infty)}$ an, so zeigt sich sofort, daß die L in die Überlagerungsfläche notwendig nur in der Form unendlicher Liniengebilde eingeht. Wir wissen ja, daß die $R^{(\infty)}$, unabhängig von ihrer besonderen Herstellung, in allen Fällen eindeutig durch die R bestimmt ist.

Nachdem die Eigenart derjenigen Rückkehrschnitte L, längs denen die identische Substitution oder eine parabolische Substitution eintritt, festgestellt ist, wissen wir nunmehr, daß bei allen anders gewählten Rückkehrschnitten

die eintretende Substitution sicher hyperbolisch ist, evtl., nämlich wenn L einufrig ist, eine hyperbolische Gleitspiegelung.

Wir können die drei unterschiedenen Arten von Rückkehrschnitten bezeichnen als Nullrückkehrschnitte, parabolische Rückkehrschnitte, hyperbolische Rückkehrschnitte. Nullrückkehrschnitte schneiden eine einfach zusammenhängende Scheibe aus, parabolische Rückkehrschnitte trennen von der Raumform eine parabolische Öffnung ab, hyperbolische Rückkehrschnitte tun keines von beiden. Unter den hyperbolischen Rückkehrschnitten wollen wir zwei Spezialitäten hervorheben. Hyperbolische Rückkehrschnitte erster Spezialität sind die Öffnungsschnitte, welche hyperbolische Öffnungsstücke $(A, 0, 2)$ abtrennen. Hyperbolische Rückkehrschnitte zweiter Spezialität mögen diejenigen hyperbolischen Rückkehrschnitte genannt werden, die ein Möbiusband $(B, 1, 1)$ abtrennen. Die Spezialität liegt demnach in beiden Fällen darin, daß die Abtrennung eines zweifach zusammenhängenden Teiles der Raumform erfolgt.

Zu jedem hyperbolischen Rückkehrschnitt L gehört also gewiß eine **homotope Geodätische** G. Ist diese **wieder ein Rückkehrschnitt**, nämlich eine einfache geschlossene Linie? Diese Frage ist bejahend zu beantworten für die allgemeinen hyperbolischen Rückkehrschnitte sowie für die hyperbolischen Rückkehrschnitte erster Spezialität (hyperbolische Öffnungsschnitte). Hingegen ist sie für die Rückkehrschnitte zweiter Spezialität zu verneinen (*). In diesem Fall steht es vielmehr folgendermaßen: Die $(B, 1, 1)$, welche durch den Rückkehrschnitt L abgetrennt wird, trägt in sich einen einufrigen Rückkehrschnitt. Dieser ist nach unserer Terminologie ein allgemeiner hyperbolischer Rückkehrschnitt der Raumform. Seine geodätische Normierung liefert somit unserer Behauptung entsprechend einen selbstverständlich ebenfalls einufrigen Rückkehrschnitt. Die doppelte Durchlaufung dieses Rückkehrschnittes liefert eine geschlossene Geodätische, welche mit unserem gegebenen Rückkehrschnitt L zweiter Spezialität homotop ist.

Indem wir auf den einfachen Fall des hyperbolischen Rückkehrschnittes erster Spezialität, der auf die geodätischen Öffnungsschnitte führt, nicht noch besonders eingehen, haben wir zum Beweis wesentlich nur den Fall des allgemeinen hyperbolischen Rückkehrschnittes zu untersuchen. Sei L ein solcher Rückkehrschnitt. Wir denken ihn uns in einem Punkt P_0 durchschnitten. L sei etwa ein nichtzerfällender Rückkehrschnitt. In R', nämlich der längs L aufgeschnittenen R, gibt es jetzt sicher ein an L anstoßendes α-Element, das wir mit α' bezeichnen. Überlagern wir α', so übersehen wir, daß die entstehende Fläche $\alpha'^{(\infty)}$ nicht nur von unendlichvielen Liniengewinden begrenzt wird, die von L herrühren, sondern weiter, daß diese Liniengewinde, als Begrenzungslinien vom Innern der $\alpha'^{(\infty)}$ aus betrachtet, eine zyklische Ordnung haben, und daß es in dieser Ordnung zwischen je zwei solchen Begrenzungsseiten immer noch eine weitere solche Begrenzungsseite gibt (*); s. Fig. 62. Diese Bemerkung erstreckt sich demnach offenbar überhaupt auf die Anordnung der von L herrührenden Begrenzungsseiten der $R'^{(\infty)}$. Die $R^{(\infty)}$ ist aus lauter Exemplaren $R'^{(\infty)}$ durch relationenfreie Zusammenfügung längs den $L^{(\infty)}$ zu gewinnen. In der ζ-Ebene ergibt sich demnach entsprechend eine Par-

zellierung des Einheitskreises durch unendlichviele getrennte Querschnitte Q, Bildern der $L^{(\infty)}$, wobei jede $L^{(\infty)}$ zwei verschiedene Fixpunkte miteinander verbindet und entsprechend der Punktierung der L in unendlichviele Stücke l zerlegt erscheint, die durch die betreffende, dem einfachen Gewindeumlauf der $L^{(\infty)}$ entsprechende Substitution der Fundamentalgruppe und deren Wiederholungen auseinander hervorgehen. Die Gesamtheit der Substitutionen der Fundamentalgruppe ist genau durch die verschiedenen Stücke l charakterisiert, die die unendlich vielen verschiedenen Querschnitte Q liefern, in der Weise, daß ein einzelnes fest gewähltes Linienstück l durch die verschiedenen Gruppensubstitutionen gerade in alle die verschiedenen Linienstücke l übergeht.

Weiter ist zu bemerken, daß wegen des erwähnten Anordnungstypus (*) über die Q sofort geschlossen werden kann, daß selbstverständlich keine zwei Q sich im Innern des ζ-Einheitskreises treffen, außerdem aber, daß keine zwei Q auch nur einen Endpunkt gemeinsam haben. Führen wir nun für alle Q die geodätische Normierung durch, indem wir jeden Querschnitt Q durch den Orthogonalkreisbogen mit denselben Endpunkten ersetzen, so ist sofort einleuchtend, daß der Austausch der Q, den die Gruppensubstitutionen vor der Normierung bewirkten, auch nach der Normierung in völlig korrespondierender Weise besteht; daß mithin insbesondere die neue Zuordnung eines Querschnittes zu sich selbst nur durch die Potenzen derjenigen Substitutionen erfolgt, die den unnormierten Querschnitt in sich überführen. Die Überführung des unnormierten gestückelten Querschnittes Q in den normierten findet natürlich in der Weise statt, daß bei der Deformation in jedem Moment eine entsprechende Stückelung nach Maßgabe der Potenzen der betreffenden Substitution eintritt, was keine Schwierigkeiten darbietet, da bei dieser Überführung, die wir uns als stetige Deformation im Sinne der Homotopie vorstellen, das Vorkommnis von Überschneidungen zwischendurch zugelassen wird. Im Endstadium ist dann ebensowenig wie im Anfangsstadium eine Überschneidung vorhanden. Dieses Endstadium zeigt wieder eine reine Stückelung. Diese aber zeigt an, daß das Einzelstück der Normierung keine vermöge einer Substitution der Gruppe äquivalenten Punkte besitzt, abgesehen von der Zuordnung der Endpunkte; d. h. es ergibt sich in der Tat in der Raumform eine einfach geschlossene Linie, ein geodätischer Rückkehrschnitt.

Der im vorstehenden betrachtete Rückkehrschnitt L, den wir nichtzerfällend annahmen, kann offenbar einufrig oder zweiufrig angenommen werden. In beiden Fällen besteht die Betrachtung zu Recht. Aber auch wenn die Linie L zerfällend ist, in welchem Falle wir mit zwei Zerfallteilen R' und R'' und entsprechend mit zwei anstoßenden α-Elementen, α' und α'', operieren würden, bleibt unsere Betrachtung ihrem Prinzip nach in Kraft.

58. Man kann offenbar weiter die Frage aufwerfen, ob in den Fällen der allgemeinen hyperbolischen Rückkehrschnitte oder der hyperbolischen Rückkehrschnitte erster Spezialität (Öffnungsschnitte) über die Homotopie hinaus Isotopie besteht, d. h. ob es möglich ist, die Überführung des Rückkehrschnittes L in den mit ihm homotopen geodätischen Rückkehrschnitt G durch eine solche Deformation der Linie zu bewirken, daß der Charakter des Rückkehrschnittes als solcher beständig gewahrt wird. Für ein hyperbolisches Öffnungsstück ist

das offenbar richtig. Man kann nämlich L und die zugehörige G beide isotop deformieren in einen genügend weit draußen liegenden Öffnungsschnitt derselben Öffnung; denn ein solcher begrenzt mit L wie mit G je einen ringartigen Bereich.

Für die allgemeinen hyperbolischen Rückkehrschnitte wollen wir die Isotopiefrage an dieser Stelle unerörtert lassen[1]. Hingegen sei die **Äquivalenzfrage** beantwortet. Den zu beweisenden Satz formulieren wir so: Es gibt eine stetige eineindeutige Übertragung der ganzen Raumform in sich, bei der der Rückkehrschnitt L in den mit ihm homotopen Rückkehrschnitt G übergeht. In dieser Aussage stecken mannigfaltige Einzelaussagen, z. B.: daß, wenn L zerfällend ist, auch G zerfällend ist, daß die Zerfallbestandteile topologisch isomorph sind usw.

Indem wir diesen Äquivalenzsatz zu beweisen suchen, geben wir ihm sogleich eine allgemeinere Form, die das gewünschte Resultat für die einzelne Linie L als Spezialfall enthält.

Satz: Es sei irgendeine vollständige topologische Zerlegung der gegebenen Raumform in α-Elemente vorgegeben, wozu bei unendlichhoher Zusammenhangsordnung offenbar unendlichviele α-Elemente gehören. Diese Zerlegung ist selbstverständlich im Innern der Raumform singularitätenfrei zu denken. Treten hyperbolische Öffnungen auf, so denken wir uns ferner in jedem α-Element, an dem eine hyperbolische Öffnung teilhat, diese Öffnung noch besonders durch eine Öffnungslinie als selbständige Parzelle abgetrennt. Führen wir nun die geodätische Normierung dieser Gesamtzerlegung durch, so entsteht für Raumformen endlicher Zusammenhangsordnung jedesmal eine äquivalente geodätische Zerlegung. Das gleiche gilt für eine Raumform unendlichhoher Zusammenhangsordnung, wenn dieselbe uneigentlich offen ist, d. i. wenn die Fundamentalgruppe auf dem Einheitskreis nicht mehr eigentlich diskontinuierlich ist. Ist jedoch die Raumform von unendlichhoher Zusammenhangsordnung eigentlich offen, so stellt sich nur dann eine äquivalente geodätische Zerlegung ein, wenn die Raumform von Grenzhalbebenen frei ist, während hyperbolische Öffnungen ebenso wie parabolische Öffnungen die Gültigkeit des Satzes nicht einschränken. Das Vorkommen von Grenzhalbebenen der Raumform hat zur Folge, daß die normierte Zerlegung der gegebenen semiäquivalent ist. Die geodätische Zerlegung erfaßt nämlich in diesem Fall nur den Innenteil R^* der Raumform R, an welchen sich noch die hyperbolischen Öffnungsstücke anschließen. Äquivalenz bedeutet im vorstehenden die Existenz einer eineindeutigen stetigen Abbildungsmöglichkeit der ganzen Raumform auf sich, bei welcher die gegebene topologische Zerlegung in die normierte übergeht. Semiäquivalenz andererseits bedeutet, daß es eine eineindeutige Abbildung der Raumform auf einen Teil von sich selbst gibt, nämlich auf die Raumform nach Abtrennung der Grenzhalbebenen, bei der die gegebene topologische Zerlegung in die normierte Zerlegung übergeht. In beiden Fällen ist gemeint, daß bei der stetigen Übertragung jede einzelne Zerlegungslinie in die mit ihr homotope geodätische Zerlegungslinie übergeht.

[1] S. weiter unten Nr. XV.

Die Begründung unseres Satzes beruht wesentlich auf Argumenten, die uns schon von der dritten Mitteilung her geläufig sind, nämlich auf den Argumenten, die uns die allgemeine Zerlegungstheorie der Raumformen endlicher und unendlichhoher Zusammenhangsordnung in Doppelsechsecke liefert. Wir können uns daher hier mit einigen Andeutungen begnügen. Zur Fixierung der Gedanken wollen wir etwa an eine unendlichvielfach zusammenhängende Raumform denken, die keine Öffnungen habe. Die einzelne Zelle der topologischen Zerlegung denken wir uns durch drei Querschnitte in zwei sechseckförmige Teile zerlegt. Bei der Wahl dieser Querschnitte ist, wenn eine für R einufrige Randlinie der Zerlegung auftritt, darauf zu achten, daß die beiden Querschnitte, die von der betreffenden Linie ausgehen, von unmittelbar gegenüberliegenden Uferpunkten ausgehen. Man kann dann ein Doppelsechseck der unnormierten Zerlegung stetig eineindeutig, unter Berücksichtigung der Seitenzuordnung, auf das entsprechende Doppelsechseck der normierten Zerlegung beziehen, für welches im erwähnten Sonderfalle die normierten Querschnitte sich von selbst so einstellen, daß sie von gegenüberliegenden Uferpunkten ausgehen. Hat man so jedes unnormierte α-Element auf sein normiertes stetig eineindeutig übertragen, so wird man auf den Parzellierungslinien selbst, die den Linien Q entsprechen, sofern diese Parzellierungslinien zweiufrig sind, offenbar zunächst zweierlei Arten der stetigen Übertragung haben, je nachdem nämlich, welchem anstoßenden α-Element die betreffende Linie zugerechnet ist. Die beiden Übertragungen hängen aber ersichtlich untereinander durch eine gleichsinnige stetige Übertragung zusammen, so daß eine Regulierung auf Identität sofort dadurch vorgenommen werden kann, daß ein der einen der beiden Zellen angehörender, an die Linie anschließender ringförmiger Saum einer geeigneten Deformierung in sich unterworfen wird.

Übrigens sei hier angemerkt, daß es bei offenen Raumformen niemals vorkommt, daß ein α-Element von lauter einufrigen Rückkehrschnitten der Raumform begrenzt wird. In der Tat würde dies bedeuten, daß dann die Raumform eine $(B, 3, 0)$, mithin geschlossen sein müßte. Wir merken weiter noch an, daß, wenn wir jede Einteilungslinie der unnormierten Zerlegung mit einem Umlaufsinn belegen, dieser Umlaufsinn sich bei der Normierung in eindeutiger Weise auf die zugehörende Geodätische überträgt. Beachtet man dies, so bemerkt man, daß der oben ausgesprochene Äquivalenzsatz noch dahin erweitert werden kann, daß bei der behaupteten stetigen Übertragung auch der Umlaufsinn der einzelnen Linien gewahrt bleibt[1].

X. Quasiergodisch und semiergodisch verlaufende Geodätische.

59a. Es werde jetzt mit G eine beliebige geschlossene Geodätische einer nichtniederen hyperbolischen Raumform bezeichnet. G braucht also nicht ein Rückkehrschnitt zu sein. Die Linie G soll ferner als eine primitive

[1] Man wolle beachten, daß hier niedere Raumformen außer Betracht gelassen werden. Die Verhältnisse liegen bei diesen in der Tat etwas anders, indem es vorkommen kann, daß eine orientierte geschlossene Linie sich selbst in entgegengesetzter Orientierung homotop ist. Man denke an die einufrigen Rückkehrschnitte der $(B, 1, 0)$ oder an die zweiufrigen nichtzerfällenden Rückkehrschnitte der $(B, 2, 0)$.

Geodätische vorgestellt werden, womit nur der Gegensatz zu den imprimitiven, d. i. multiplen geschlossenen Geodätischen angedeutet ist, die eben durch wiederholte Umlaufung aus einer primitiven geschlossenen Geodätischen hervorgehen. Wir betrachten die unendlichvielen Abwickelungsbilder von G. Ein einzelnes solches Abwicklungsbild ist ein vollständiger Orthogonalkreisbogen Q, der durch die zu G gehörenden, Q entsprechenden Umlaufssubstitutionen mit den Endpunkten von Q als Fixpunkten in sich übergeht und demgemäß in unendlichviele äquivalente Teile zerlegt erscheint. Es ist klar, daß außer den Potenzen der Umlaufssubstitutionen es keine weiteren Substitutionen der Fundamentalgruppe geben kann, die Q in sich überführen. Andernfalls würde sich nämlich leicht ergeben, daß G keine primitive Geodätische wäre.

Die Linie G liefert in der Abwickelung unendlichviele Abwickelungsbilder $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$. Von diesen können keine zwei einen Fixpunkt gemeinsam haben, weil dies offenbar bedeuten würde, daß die Linie G sich selbst in allmählicher Annäherung unbeschränkt approximieren würde[1].

Wir nennen die verschiedenen Linien Q, die zu einer primitiven G gehören, auch die zu G gehörenden Achsen. Diese können sich natürlich untereinander schneiden, was immer dann und nur dann eintritt, wenn die G keine einfache geschlossene Linie ist, d. i. wenn sie kein Rückkehrschnitt ist. Die Achsen $Q_1, Q_2, \cdots$ bilden selbstverständlich eine abzählbare Menge wegen der Abzählbarkeit der Gruppensubstitutionen. Die scheinbaren Längen der Achsen, d. s. ihre euklidischen Längen, streben der Grenze Null zu. Denn die Annahme einer unendlich großen Zahl solcher Achsen, deren Länge oberhalb einer von Null verschiedenen Schranke bliebe, würde zur Folge haben, daß es verschiedene Achsen dieser Art geben würde, deren Endpunkte beliebig wenig voneinander entfernt wären. Daraus würde nun die Existenz infinitesimaler Substitutionen resultieren, insofern die durch die eine Achse definierte Primitivbewegung durch die Primitivbewegung der anderen Achse bzw. deren inverse Bewegung fast, aber nicht vollständig rückgängig gemacht wird.

Die Endpunkte der zu G gehörenden Achsen Q bilden ein Punktsystem auf der Peripherie des Einheitskreises, das durch die Substitutionen der Fundamentalgruppe in sich übergeführt wird. Ist F irgendein Gruppenfixpunkt, so bewirkt die Iteration einer zu F gehörenden Gruppensubstitution, daß jeder beliebige Peripheriepunkt eine Folge mit ihm äquivalenter Punkte beschreibt, die gegen F konvergiert. Daraus folgt, daß unser System der

[1] Überhaupt können auf Grund des vorgebrachten Arguments auch zwei verschiedene geschlossene Geodätische G_1 und G_2 niemals zwei Abwickelungsbilder $Q^{(1)}$ und $Q^{(2)}$ liefern, die einen Endpunkt gemeinsam haben. Es gibt überhaupt in der Fundamentalgruppe, können wir auch sagen, keine zwei Substitutionen, die einen Fixpunkt gemeinsam haben, es sei denn, daß sie beide Fixpunkte gemeinschaftlich haben, in welchem Falle die beiden Linien, sofern sie primitive Linien sind, identisch sein müssen. Ebensowenig kann, beiläufig bemerkt, ein parabolischer Fixpunkt mit einem hyperbolischen Fixpunkt zusammenfallen, weil das Eintreten eines Bogens Q in das Innere eines parabolischen Bahnkreises mit der Zielstrebigkeit auf den parabolischen Fixpunkt offenbar bedeuten würde, daß die betreffende geschlossene Geodätische eine grenzstrebige Linie der Raumform wäre, was sie als geschlossene Geodätische offenbar nicht ist.

Achsenendpunkte sich gegen jeden Gruppenfixpunkt häuft, mithin auch gegen jeden Grenzpunkt der Gruppe, da die Gruppengrenzpunkte mit den Häufungspunkten der Gruppenfixpunkte zusammenfallen. (Vgl. S. 431 der dritten Mitteilung.)

Die zur gegebenen G gehörenden Achsen haben demnach die Eigenschaft, indem sie allmählich scheinbar unendlich kleine Längen bekommen, sich gegen alle Grenzpunkte der Fundamentalgruppe zu häufen und nur gegen diese. Liegt demnach insbesondere eine geschlossene oder uneigentlich offene Raumform vor, so häufen sich die Achsen gegen den ganzen Einheitskreis (Verdichtungssatz)[1].

59b. Es werde nunmehr eine geschlossene zweiseitige hyperbolische Raumform betrachtet. Wir wählen in ihr einen geschlossenen geodätischen Rückkehrschnitt G. Derselbe möge die Raumform nicht zerfällen. Die längs G aufgeschnittene Raumform R werde mit R' bezeichnet. Die Linie G werde jetzt mit einem als positiv zu bezeichnenden Durchlaufungssinn ausgestattet, der sich nun auf die beiden Ufer überträgt, so daß wir von einem positiven Durchlaufungssinn der Ufer reden können. Wird nun die $R'^{(\infty)}$ gebildet und in die ζ-Ebene übertragen, so ergibt sich ein einfach zusammenhängendes Bildgebiet, das von unendlichvielen Bögen Q begrenzt wird, die alle einen Durchlaufungssinn besitzen. Beurteilt man diesen Durchlaufungssinn vom Innern eines solchen Gebietes her, so bemerkt man, daß diejenigen Linien Q, welche vom einen Ufer von G herrühren, mit gleichartigem Durchlaufungssinn behaftet erscheinen, während die von dem anderen Ufer von G herrührenden Q mit dem entgegengesetzten Durchlaufungssinn behaftet erscheinen.

Jetzt denken wir uns die ganze Raumform abgewickelt. Die Bilder Q der Linie G häufen sich, weil R geschlossen ist, unendlich klein werdend, gegen jeden Peripheriepunkt. Wir können demnach in beliebiger Nähe irgend zweier frei gewählter Punkte A und B der Peripherie Bilder Q finden. Seien Q_1 und Q_2 zwei solche Bilder. Jede dieser beiden Achsen trägt einen Durchlaufungssinn. Es kann nun sein, daß Q_1 und Q_2 vom Mittelpunkt des Einheitskreises aus beurteilt ungleichartig laufen. Dann hat jede Gruppensubstitution, die Q_1 in Q_2 überführt, ihre Fixpunkte innerhalb derjenigen kleinen Peripheriebögen, die von Q_1 und Q_2 einzeln überspannt werden, wobei der eine Fixpunkt dem bei A liegenden Peripheriebogen angehört, der andere dem andern, bei B liegenden Peripheriebogen. Mit dieser Substitution haben wir dann in dem Orthogonalkreisbogen zwischen den erwähnten beiden Fixpunkten das Bild einer geschlossenen Geodätischen der Raumform, die den Orthogonalkreisbogen AB beliebig genau approximiert. In der Raumform

[1] Dieser Verdichtungssatz gilt, wie unsere Beweismethode erkennen läßt, auch für die Abwickelungsbilder einer beliebigen offenen Geodätischen mit dem Unterschiede jedoch, daß diese Bilder auch im Innern des Einheitskreises sich häufen können, was dann und nur dann eintritt, wenn die betreffende Geodätische innerhalb der Raumform Häufungscharakter zeigt im Gegensatz zu denjenigen offenen Geodätischen, die nach beiden Seiten in der Raumform grenzstrebig verlaufen, d. h. jeden abgeschlossenen Teil der Raumform einmal endgültig verlassen.

bedeutet dies, daß die dem Orthogonalkreisbogen AB entsprechende, ebenso wie AB frei vorgebbare offene Geodätische längs einer beliebig langen endlichen Teilstrecke beliebig genau durch unsere geschlossene Geodätische approximiert wird.

Haben andererseits Q_1 und Q_2 gleichartig erscheinenden Durchlaufungssinn, so gelangt man doch sofort zu einem brauchbaren Paar von Bögen Q, indem man etwa Q_2 nach folgendem Prinzip abändert. In dem Kreisbogenzweieck, das Q_2 mit dem von ihm überspannten Peripheriebogen bildet, stößt unmittelbar an Q_2 ein Bildgebiet der $R'^{(\infty)}$ an. Die dieses Bildgebiet begrenzenden Q-Bögen haben, vom Innern desselben beurteilt, wieder nicht alle gleichartigen Durchlaufungssinn. Vom Mittelpunkt des Einheitskreises aus beurteilt, hat infolgedessen der Bogen Q_2 anderen Durchlaufungssinn als ein Teil der neuen Q-Bögen. Demnach können wir Q_2 durch einen anderen Bogen ersetzen, um auf den erstbetrachteten Fall zurückzukommen.

Das im vorstehenden gewonnene Ergebnis kann nun so ausgesprochen werden: Man kann jedes Linienelement einer vorgelegten geschlossenen zweiseitigen hyperbolischen Raumform durch geschlossene Geodätische der Raumform mit beliebigem Genauigkeitsgrade approximieren; oder: Das System der geschlossenen Geodätischen der Raumform approximiert alle Linienelemente der Raumform mit beliebigem Genauigkeitsgrade.

Betrachten wir nun weiter eine beliebige offene zweiseitige hyperbolische Raumform, von der wir zunächst voraussetzen, daß sie nicht schlichtartig sei, dann können wir innerhalb dieser Raumform ebenfalls einen nichtzerfällenden geodätischen Rückkehrschnitt ziehen und unsere soeben durchgeführte Betrachtung wiederholen. Unterscheidend treten nur die Betrachtungen der Nr. 59a in Kraft, wonach die Häufung der zu G gehörenden Linien Q nur gegen die Gruppengrenzpunkte stattfindet, diese aber voll erfaßt. Man wird dementsprechend zu einer Unterscheidung der Linienelemente in einer eigentlich offenen Raumform geführt. Ausgezeichnete Linienelemente nennen wir nämlich diejenigen Linienelemente einer solchen Raumform, die in der ζ-Abwickelung nach beiden Richtungen (im nichteuklidischen Sinne) auf Gruppengrenzpunkte zeigen; eine Definition, die offenbar von der Wahl des speziell gewählten Abwickelungsbildes des Linienelementes der Raumform unabhängig ist. Die nichtausgezeichneten Linienelemente mögen gewöhnliche Linienelemente genannt werden. Die ausgezeichneten Linienelemente schließen sich auf der Raumform zu ausgezeichneten Geodätischen zusammen, welch letztere im allgemeinen offene Geodätische sein werden. Zu ihnen gehören aber sämtliche geschlossenen Geodätischen der Raumform. Offenbar sind die ausgezeichneten Geodätischen nichts anderes als diejenigen Geodätischen, die ganz im Innenteil der Raumform verlaufen oder ihn vom Außenteil der Raumform abgrenzen.

Danach steht nunmehr fest, daß auch bei nichtschlichtartigen uneigentlich offenen zweiseitigen hyperbolischen Raumformen endlicher wie unendlichhoher Zusammenhangsordnung jedes Linienelement der Raumform durch das System der geschlossenen geodätischen Linien mit jedem beliebigen Genauigkeitsgrade approximiert wird; daß diese Behauptung andererseits bei eigent-

lich offenen solchen Raumformen auf die ausgezeichneten Linienelemente beschränkt bleibt.

Ist die Raumform zweiseitig, offen und schlichtartig, so sei zunächst angenommen, daß ihre Zusammenhangsordnung größer als 3 ist. Dann kann man sie durch einen zerfällenden geodätischen Rückkehrschnitt in zwei Teile R' und R'' zerlegen. Man bemerkt sofort, daß unsere Art der Beweisführung hierin kein Hemmnis findet.

Es sei schließlich die Raumform zweiseitig, schlichtartig, und zwar dreifach zusammenhängend. Man kann diesen Fall durch Hinweis auf den vorhergehenden zurückführen durch die Bemerkung, daß es zu einer solchen Raumform eine relativ zweiblättrige Überlagerungsraumform gibt, die vierfach zusammenhängend ist. Man kann aber auch dadurch zum Ziele kommen, daß man statt eines Rückkehrschnittes einen normierten Querschnitt etwa von einer Öffnung zu einer anderen benutzt. Man sieht nämlich leicht, daß bezüglich der Bilder solcher Querschnitte ein dem Verdichtungssatz der Nr. 59a analoger Verdichtungssatz gilt, der die Häufung dieser Bilder gegen alle Gruppengrenzpunkte ausspricht. Offenbar ist die Verwendung eines Querschnittes statt eines Rückkehrschnittes überhaupt bei offenen Raumformen insbesondere endlicher Zusammenhangsordnung möglich[1].

Was die einseitigen Raumformen anbetrifft, so gelangt man offenbar bei diesen durch die analogen Überlegungen zu den gleichartigen Resultaten. Man kann auch den Übergang von der einseitigen R zur zugehörigen zweiseitigen $\tilde{R}$ mit Nutzen verwenden. Diesbezüglich bringen wir in Erinnerung, daß die Fundamentalgruppe der $\tilde{R}$ ja nichts anderes ist als diejenige Untergruppe der Fundamentalgruppe der R, die von den Substitutionen erster Art gebildet wird. Gruppe und Untergruppe haben dabei dieselbe Grenzpunktmenge.

Zusammenfassend haben wir den

Satz: Das **System aller geschlossenen Geodätischen** einer beliebigen nicht niederen hyperbolischen Raumform ($\mathfrak{c} \geqq 1$, ∞ zugelassen) approximiert durch seine Individuen alle oder nur die ausgezeichneten Linienelemente der Raumform mit unbeschränktem Genauigkeitsgrade, jenachdem die Fundamentalgruppe auf dem Fundamentalkreise nicht mehr eigentlich diskontinuierlich ist oder doch noch eigentlich diskontinuierlich ist[2].

Der erste Fall umfaßt die hyperbolischen Raumformen des ersten und zweiten Typus, nämlich alle geschlossenen hyperbolischen Raumformen, alle offenen hyperbolischen Raumformen endlicher Zusammenhangsordnung mit ausschließlich parabolischen Öffnungen (uneigentlich offene hyperbolische Raumformen end-

---

[1] Instruktive Beispiele s. unter Nr. 65a.

[2] Die niederen hyperbolischen Raumformen sind die mit nur einer Erzeugenden der Fundamentalgruppe. Sie besitzen entweder keine oder nur eine geschlossene Geodätische nebst deren Multipla; s. zweite Mitteilung.

licher Zusammenhangsordnung), schließlich alle offenen Raumformen unendlich hoher Zusammenhangsordnung ohne hyperbolische Öffnungen und ohne Grenzhalbebenen (uneigentlich offene Raumformen unendlich hoher Zusammenhangsordnung).

Der zweite Fall umfaßt die nicht niederen hyperbolischen Raumformen des dritten Typus, nämlich alle offenen Raumformen endlicher Zusammenhangsordnung mit $c \geqq 1$, die mindestens eine hyperbolische Öffnung besitzen (eigentlich offene Raumformen endlicher Zusammenhangsordnung mit $c \geq 1$), ferner noch alle Raumformen unendlich hoher Zusammenhangsordnung, die hyperbolische Öffnungen oder Grenzhalbebenen haben (eigentlich offene Raumformen unendlich hoher Zusammenhangsordnung).

60. Hatten wir bisher Approximationen betrachtet, die durch das vollständige System der geschlossenen Geodätischen einer Raumform geleistet werden, so ist es weiter von besonderem Interesse, sich die Frage vorzulegen, was für **Approximationen durch einzelne Geodätische** geleistet werden können, wobei sich zeigen wird, daß hier die **Approximationsleistungen der offenen Geodätischen** besonders bemerkenswert sind.

Betrachten wir zunächst eine Raumform des ersten oder zweiten Typus (die Menge der Gruppengrenzpunkte erfüllt die ganze Peripherie des Einheitskreises). Wir geben in dieser R endlichviele Linienelemente beliebig vor. Dann ist es möglich, solche geschlossenen Geodätischen zu bestimmen, welche die vorgegebenen Linienelemente mit einem beliebig vorgegebenen Genauigkeitsgrade approximieren.

Zunächst bemerken wir, daß wir ein einzelnes Linienelement l_1 durch eine geschlossene Geodätische mit beliebigem Genauigkeitsgrade approximieren können. Wir konstruieren in der ζ-Ebene denjenigen Orthogonalbogen ω_1, der ein Bild λ_1 von l_1 enthält. Der Bogen ω_1 trifft in zwei verschiedenen Punkten A_1 und B_1 auf die Peripherie des Einheitskreises auf. Nach dem Vorhergehenden sind wir in der Lage, eine Substitution der Fundamentalgruppe anzugeben, deren einer Fixpunkt beliebig nahe bei A_1 liegt, während der andere beliebig nahe bei B_1 liegt. Die zu dieser Substitution gehörende geschlossene Geodätische hat die verlangte Approximationseigenschaft.

Auf Grund des gewonnenen Resultates bezüglich eines Linienelementes können wir den für endlichviele Linienelemente zu beweisenden entsprechenden Satz nunmehr auch so formulieren: es soll eine geschlossene Geodätische G gefunden werden, die ein endliches System geschlossener Geodätischer G_1, $G_2, \cdots, G_n$ mit einem vorgelegten Genauigkeitsgrade approximiert.

Die Linie G_1 hat als Bild einen Bogen ω_1 von A_1 nach B_1. Das Vollsystem aller geschlossenen Geodätischen gestattet nun, unendlichviele Geodätische darunter auszuwählen, die G_1 mit einem gegebenen Genauigkeitsgrade ε approximieren. Es müssen zu dem Zwecke die Endpunkte A und B des betreffenden Bogens ω nur einen gewissen Annäherungsgrad an A_1 und B_1 haben. Innerhalb dieses kleinen Spielraumes z. B. bei A_1 läßt sich nun eine vollständige Linie ω_2 angeben, die G_2 entspricht. Indem wir etwa den Punkt A nur genügend nahe bei einem Endpunkte von ω_2 wählen, so jedoch, daß

gleichzeitig der oben für A schon festgelegte Spielraum nicht verlassen wird, haben wir offenbar erreicht, daß die Linie ω bzw. die entsprechende Geodätische G die gewünschte Approximation zu G_1 und G_2 leistet. Damit ist für ω immer noch ein Spielraum der Endpunkte gesichert, innerhalb dessen wir nach dem oben angewandten Prinzip einen noch kleineren Spielraum finden, wo auch eine ω_3, die von G_3 herrührt, mit dem gegebenen Genauigkeitsgrade approximiert wird. Indem man so fortfährt, gewinnt man eine Linie ω und damit eine geschlossene Geodätische G, die für alle n gegebenen Geodätischen die verlangte Approximation leistet.

Das Verfahren liefert offenbar, in inf. fortgesetzt, ein weiteres Resultat, nämlich das folgende: Man kann offene geodätische Linien G in der Raumform bestimmen, die eine gegebene unendliche Folge von Linienelementen, jedes mit einem für dasselbe besonders vorgeschriebenen Genauigkeitsgrad, approximieren. Wenn man weiter bedenkt, daß in der gegebenen Folge ein und dasselbe Linienelement wiederholt, sogar unendlich oft auftreten kann, und daß dabei der verlangte Approximationsgrad sich gleichzeitig beliebig steigern kann, so findet man ohne weiteres den Satz: Innerhalb jeder Raumform des ersten oder zweiten Typus gibt es solche offenen Geodätischen, die sämtliche Linienelemente der Raumform mit unbeschränktem Annäherungsgrad approximieren **(quasiergodischer Verlauf)**[1]. Diesen Approximationsvorgang hat man sich natürlich für das einzelne Linienelement so zu denken, daß es bei Durchlaufung der betreffenden offenen Geodätischen immer wieder approximiert wird, wobei immer feinere Approximationsgrade eintreten.

Nach unserem Konstruktionsverfahren, das nur auf die eine Kategorie der Endpunkte achtete, nämlich auf die Punkte $A_1, A_2, \cdots$ usw., kann man noch hinzufügen, daß diese unbeschränkte Approximation aller Linienelemente schon erreicht wird, wenn die Geodätische G von einem ihrer Punkte aus in der Richtung nach A durchlaufen wird. Man kann offenbar auch erreichen, daß die gleiche Approximationseigenschaft bei derselben G auch besteht, wenn man die G in der Richtung auf B durchläuft.

Liegt andererseits eine Raumform des dritten Typus vor, für welche die Menge der Gruppengrenzpunkte eine perfekte Teilmenge diskreter Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises ist, so ist auf Grund der gegebenen Beweisführung ohne weiteres zu erkennen, wie der Approximationssatz nunmehr zu fassen sein wird. Offenbar kann ja ein einzelnes, nicht ausgezeichnetes Linienelement nicht mehr durch eine geschlossene Geodätische mit beliebigem Genauigkeitsgrad approximiert werden, da die Abwicklungslinie einer geschlossenen Geodätischen stets zwei Gruppengrenzpunkte miteinander verbindet. Wohl aber ist es jetzt möglich, jedes einzelne ausgezeichnete Linienelement tatsächlich durch eine geschlossene Geodätische mit vorgegebenem Genauigkeitsgrad zu approximieren, dasselbe ferner zu erreichen für beliebige endlichviele ausgezeichnete Linienelemente, mithin auch für ein beliebig gegebenes endliches System geschlossener Geodätischen.

---

[1] S. auch Abschnitt XII.

Schließlich können wir auch unendliche Systeme von geschlossenen Geodätischen und damit auch von unendlichvielen ausgezeichneten Linienelementen je mit einem vorgeschriebenen Genauigkeitsgrade durch eine offene Geodätische approximieren und damit überhaupt die Gesamtheit aller ausgezeichneten Linienelemente und aller geschlossenen Geodätischen mit unendlichhohem Approximationsgrade für jede einzelne **(semiergodischer Verlauf)**.

XI. Individuelle Charakterisierung und Synthesis insbesondere der geschlossenen Geodätischen: Homotopieproblem.

61. Die geschlossenen geodätischen Linien einer Raumform sind bisher von uns nur in unvollkommener Weise charakterisiert worden, was ihre individuelle Bestimmung anbetrifft. Wir dachten uns nämlich eine topologische Verlaufslinie gegeben, der die Geodätische homotop sein sollte. Diese Verlaufslinie ist aber offenbar nicht eindeutig bestimmt. Wählt man andererseits die Gruppensubstitutionen als maßgebendes Charakterisierungselement, so sind auch diese nicht eindeutig bestimmt; vielmehr gibt es zu jeder geschlossenen Geodätischen unendlichviele Umlaufssubstitutionen; diese gehen durch Transformation auseinander hervor und bilden eine sogenannte Elementklasse der Gruppe. Es bleibt also das Problem bestehen, die geschlossenen Geodätischen durch solche Bestimmungsstücke zu individualisieren, deren Wahl vollkommen übersehen wird und die die Eigenschaft haben, den geschlossenen Geodätischen eineindeutig zugeordnet zu sein. Zu einer solchen Charakterisierung gelangt man folgendermaßen.

Zunächst werde eine offene Raumform endlicher Zusammenhangsordnung mit lauter hyperbolischen Öffnungen betrachtet. Die Öffnungsstücke denken wir uns durch ihre geodätischen Öffnungsrückkehrschnitte gegen den Innenteil der Raumform abgegrenzt. Den Innenteil denken wir uns weiter durch getrennte Querschnitte von Öffnungslinie zu Öffnungslinie einfach zusammenhängend gemacht. Das uns geläufige Abwickelungsverfahren, angewandt auf den Innenteil, lehrt nun sofort, daß die zunächst nur topologisch eingeführten Querschnitte geodätisch normiert werden können, wobei sie zugleich der Orthogonalitätsbedingung unterworfen werden, nämlich orthogonal auf die Öffnungslinien aufzutreffen. Die so gewonnenen Querschnitte mögen jeder irgendwie gerichtet gedacht werden und so orientiert mit $q_1, \cdots, q_n$ bezeichnet werden. Eine geschlossene, ebenfalls gerichtete geodätische Linie der Raumform kann nun offenbar weder ganz in einem Öffnungsstück der Raumform verlaufen, noch überhaupt in ein Öffnungsstück der Raumform eindringen. Sie kann äußerstenfalls mit dem Multiplum einer Öffnungslinie zusammenfallen, welch letztere wir ebenfalls gerichtet denken. In jedem anderen Fall muß sie ganz innerhalb des Innenteils verlaufen, ohne einen Öffnungsschnitt auch nur zu berühren. Bei ihrem Verlauf wird sie nun die Querschnitte q in bestimmter zyklischer Reihenfolge kreuzen. Kommt es dabei vor, daß derselbe Querschnitt zweimal unmittelbar nacheinander durchquert wird, so muß die Überquerung beide Male im gleichen Sinne erfolgen.

Indem man andererseits diese Vorschriften beachtet und weiter bemerkt, daß die Abwicklung des Innenteils ein unendlichvielseitiges Spitzenpolygon wird, findet sich sofort, daß wir damit bereits zu einer eineindeutigen Charakterisierung aller geschlossenen Geodätischen gelangt sind. Wir haben einfach die allgemeinsten zyklischen Symbole der folgenden Art anzuschreiben: Eine beliebige orientierte zyklische Anordnung der Ziffern $1, \cdots, n$ mit beliebig zugelassenen Wiederholungen, jede Ziffer außerdem mit einem der Zeichen + oder — behaftet, zur Kennzeichnung der Überschreitungsrichtung; in diesem Symbol muß jede vorkommende Folge gleicher Ziffern mit gleichen Vorzeichen behaftet sein. Diese Symbole lassen insbesondere die multiplen Geodätischen sofort erkennen, nämlich durch die der Multiplizität entsprechend auftretenden Perioden des zyklischen Symbols. Sie umfassen zugleich die Öffnungslinien und deren Multipla, deren Symbole (Randsymbole) unmittelbar durch die beim Umlauf dieser Linien angetroffenen Querschnittendigungen geliefert werden.

Man wird bemerken, daß die vorstehende Kennzeichnung ebenso für die zweiseitigen wie für die einseitigen endlich-vielfach zusammenhängenden Raumformen mit hyperbolischen Öffnungen gilt. Lassen wir parabolische Öffnungen zu, so fällt, den parabolischen Öffnungsstücken entsprechend, je eine Öffnungslinie als nicht geodätisch normierbar weg. An Stelle der orthogonalen Normierung der Querschnitte tritt bei den parabolischen Öffnungen die Einmündungsnormierung. Unsere Symbolik bleibt offenbar in Kraft mit der einzigen Ausnahme, daß den besonderen Ziffernsymbolen, die einfachen oder mehrfachen Umlaufungen parabolischer Öffnungen entsprechen, keine geschlossenen Geodätischen entsprechen.

62. Wir betrachten weiter die geschlossenen zweiseitigen hyperbolischen Raumformen. Eine solche denken wir uns in geodätisch normierte α-Elemente zerlegt und jedes dieser α-Elemente durch Querschnitte q_{12}, q_{23}, q_{31} in uns geläufiger Weise in zwei symmetrische Sechsecke weiter zerlegt. Die Linien, welche die α-Zerlegung bewirken, mögen als die Fundamentallinien $f_1, \ldots, f_{3p-3}$ bezeichnet werden. Sowohl die $q_{\alpha\beta}$ wie die f_γ denken wir uns gerichtet.

Eine geschlossene Geodätische kann nun erstens mit einer Fundamentallinie zusammenfallen. Dann ist für sie offenbar die positive oder negative Umlaufzahl charakteristisch. Diese Umlaufzahl ist ganz und bestimmt die Multiplizität der Linie über ihrer einfachen Spurlinie f.

Zweitens kann es sein, daß eine geschlossene Geodätische ganz innerhalb eines α-Elementes verläuft. Dann können wir sie nach Analogie einer vorherigen Betrachtung durch zyklische Symbole bestimmen, die die überschrittene Querschnittfolge der $q_{\alpha\beta}$ innerhalb des betreffenden α-Elements anzeigen. Dabei kehren die Multipla der Randlinien des α-Elements nochmals wieder in Form spezieller Symbole uns bekannter Gestalt (Randsymbole).

Im Gegensatze zu den unter Nr. 61 eingeführten zyklischen Symbolen können bei den hier eingeführten Symbolen niemals zwei gleiche $q_{\alpha\beta}$ unmittelbar aufeinanderfolgen; ferner ist eine Vorzeichenbehaftung zur Charakterisierung der Überschreitungsrichtung nur für ein einziges Element des Symbols

erforderlich, um die immer gerichtet gedachte geschlossene Geodätische von der zu ihr in α symmetrischen zu unterscheiden.

Drittens, und zwar im allgemeinen, wird die geschlossene Geodätische Fundamentallinien durchqueren. Dann zerfällt sie in eine zyklisch geordnete endliche Anzahl Bögen, die von Fundamentallinie zu Fundamentallinie laufen und jedesmal ein und nur ein α-Element durchqueren. Der einzelne Durchquerungsbogen erscheint in der ζ-Ebene als Verbindungsbogen zwischen zwei getrennten Linien Q (Abwicklungslinien von Fundamentallinien). Denken wir uns die betrachtete geschlossene Geodätische mit der ganzen Raumform abgewickelt, so wird die Abwicklungslinie γ unserer zu charakterisierenden Geodätischen G eine nach beiden Seiten unendliche Folge von Linien Q (fundamentale Schnittreihe) durchqueren, die sich nach beiden Enden scheinbar unendlich verkleinern, indem sie gegen die Fixpunkte einer Umlaufssubstitution der Geodätischen konvergieren. Wir können die Linie γ nun durch einen gebrochenen Linienzug mit denselben beiden Endpunkten ersetzen, indem wir nämlich die einzelnen Bögen der γ, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Linien Q unserer Schnittreihe verlaufen, durch die betreffenden geodätischen Orthogonalbögen zwischen den beiden Q ersetzen und auf den einzelnen Linien Q die so unterbrochene Verbindung längs dem kürzesten Weg auf dieser Q wiederherstellen. Durch dieses Verfahren wird die betrachtete geschlossene Geodätische G innerhalb der Raumform durch einen gebrochenen Linienzug ersetzt, die zu G gehörende **charakteristische Linie** G^*. Dieselbe weist zunächst endlichviele geodätische Bögen auf, deren einzelner ganz innerhalb eines α-Elements verläuft und einem bestimmten Teilbogen von G innerhalb des betreffenden α-Elements homotop ist; dieser Ersatzbogen (Querbogen) ist durch die Bestimmung des orthogonalen Auftreffens auf die Fundamentallinie in Verbindung mit der erwähnten Homotopie eindeutig bestimmt. Die solcherweise bestimmten Querbögen sind nun in bestimmter Weise durch Umlaufbögen, die längs den Fundamentallinien verlaufen, zu einer Einheit verschmolzen. Sie liefern eben die mit G homotope charakteristische Linie G^*. Das Wesen einer charakteristischen Linie haben wir in folgenden Merkmalen zu erblicken: eine geschlossene charakteristische Linie der Raumform ist eine geschlossene Linie der Raumform, die aus endlichvielen geodätischen Bögen besteht, welche abwechselnd Querbögen und Umlaufbögen sind. Sie ist so zusammengesetzt, daß jede Sequenz »Querbogen, Umlaufbogen, Querbogen« eine tatsächliche Durchquerung derjenigen Fundamentallinie darbietet, zu welcher der Umlaufbogen gehört. Es besteht der Satz, daß zwei geschlossene charakteristische Linien nur dann homotop sind, wenn sie identisch sind. Werden nämlich zwei solche Linien als homotop angenommen, so können wir ihnen dieselben Umlaufssubstitutionen zuordnen, was in der Abwicklung zur Folge hat, daß die betreffenden Abwicklungslinien in denselben beiden Fixpunkten endigen. Das bedingt aber, daß für die beiden Abwicklungslinien dieselben fundamentalen Schnittreihen mit Linien Q eintreten müssen, womit ihre Identität offenbar wird. Andererseits sieht man, daß man eine geschlossene charakteristische Linie, den Angaben entsprechend, beliebig vorgeben kann. Es gibt stets eine und nur eine mit ihr

homotope geschlossene Geodätische, die man in der Abwicklung durch die geodätische Verbindung der beiden Fixpunkte erhält, in denen die Abwicklung der charakteristischen Linie endigt. Die gewonnene Geodätische liefert jedem Umlaufbogen der charakteristischen Linie entsprechend einen einfachen Schnitt mit der betreffenden Fundamentallinie.

Das Problem der individuellen Charakterisierung der geschlossenen Geodätischen ist durch die vorhergehende Betrachtung auf das einfachere Problem der individuellen Charakterisierung der geschlossenen charakteristischen Linien zurückgeführt. Hierzu lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die die α-Elemente durchquerenden Bögen dieser Linien. Ein solcher Bogen kann im einfachsten Fall mit einem der Bögen $q_{\alpha\beta}$ des betreffenden Elements zusammenfallen. Im allgemeinen wird jedoch eine endliche Folge von Querschnitten $q_{\alpha\beta}$ des Elements durchquert. In dieser Folge kann offenbar nicht ein und derselbe Querschnitt zweimal unmittelbar nacheinander auftreten. Im übrigen aber ist die Querschnittfolge ganz beliebig wählbar. Man hat weiter auch anzugeben den Durchquerungssinn des ersten Querschnitts der Folge. Ist in dieser Weise ein Indexsymbol für einen normierten gerichteten Querbogen (Quersignatur) gegeben, so ist derselbe nunmehr eindeutig bestimmt und sofort konstruierbar. Man kennt nämlich jetzt eine von ihm zu durchquerende Sechseckfolge, welche sich in der Abwicklung im ganzen als ein konvexes Polygon aus kettenförmig angeordneten Sechsecken mit lauter rechten Winkeln präsentiert und daher selbst nur rechte Winkel aufweist. Im ersten und letzten Sechseck der Kette muß der Anfangs- bzw. Endbogen des zu konstruierenden Querbogens so verlaufen, daß er den ersten bzw. letzten Querschnitt $q_{\alpha\beta}$ der Folge mit der gegenüberliegenden Sechseckseite des ersten bzw. letzten Sechsecks der Kette verbindet in der Weise, daß er auf diese beiden Seiten s_1 und s_2 senkrecht auftrifft. Diese beiden Seiten s_1 und s_2 sind ihrerseits jede Bild einer halben Fundamentallinie, herrührend von der Begrenzung des betreffenden α-Elements, in dem der Querschnitt verläuft. Zur Konstruktion des vollständigen Querbogens hat man nun nichts weiter zu tun, als den verbindenden geodätischen Orthogonalbogen zwischen den erwähnten beiden Seiten s_1 und s_2 des Polygons herzustellen. Diese Konstruktion geht in der projektiven Auffassung der hyperbolischen Ebene folgendermaßen vor sich (vgl. Fig. 61). An die genannten Seiten s_1 und s_2 stoßen je zwei Seiten unseres offenbar konvexen Kettenpolygons, die wegen der Rechtwinkligkeit des Polygons sich notwendig außerhalb des Fundamentalkreises treffen. Die beiden Treffpunkte sind durch eine gradlinige Strecke zu verbinden, die offenbar die Strecken s_1 und s_2 jede senkrecht schneidet. Das zwischen diesen Schnittpunkten enthaltene Stück der gezeichneten Strecke entspricht dem verlangten Querbogen in der ζ-Ebene.

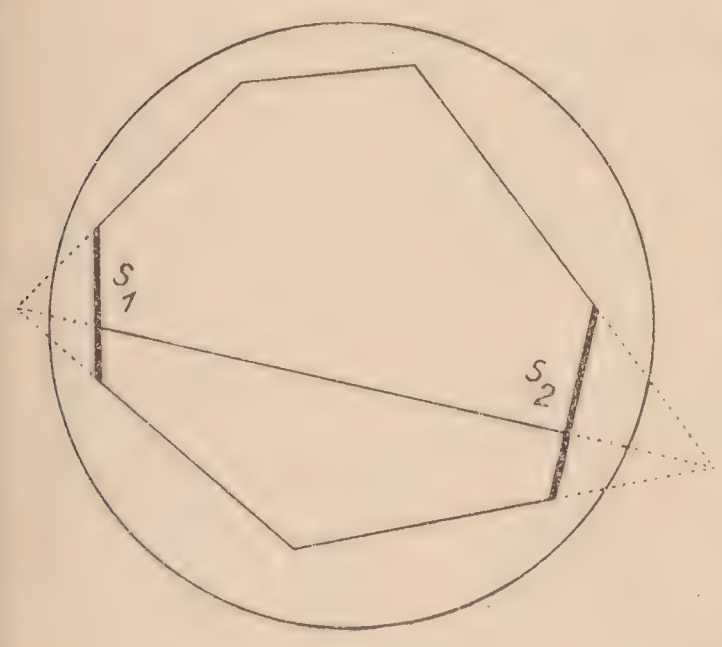


Fig. 61.

Hat man nun eine zyklische Folge solcher gerichteten Querbögen irgendwie gewählt, entsprechend der Bestimmung, daß jeder Querbogen am andern

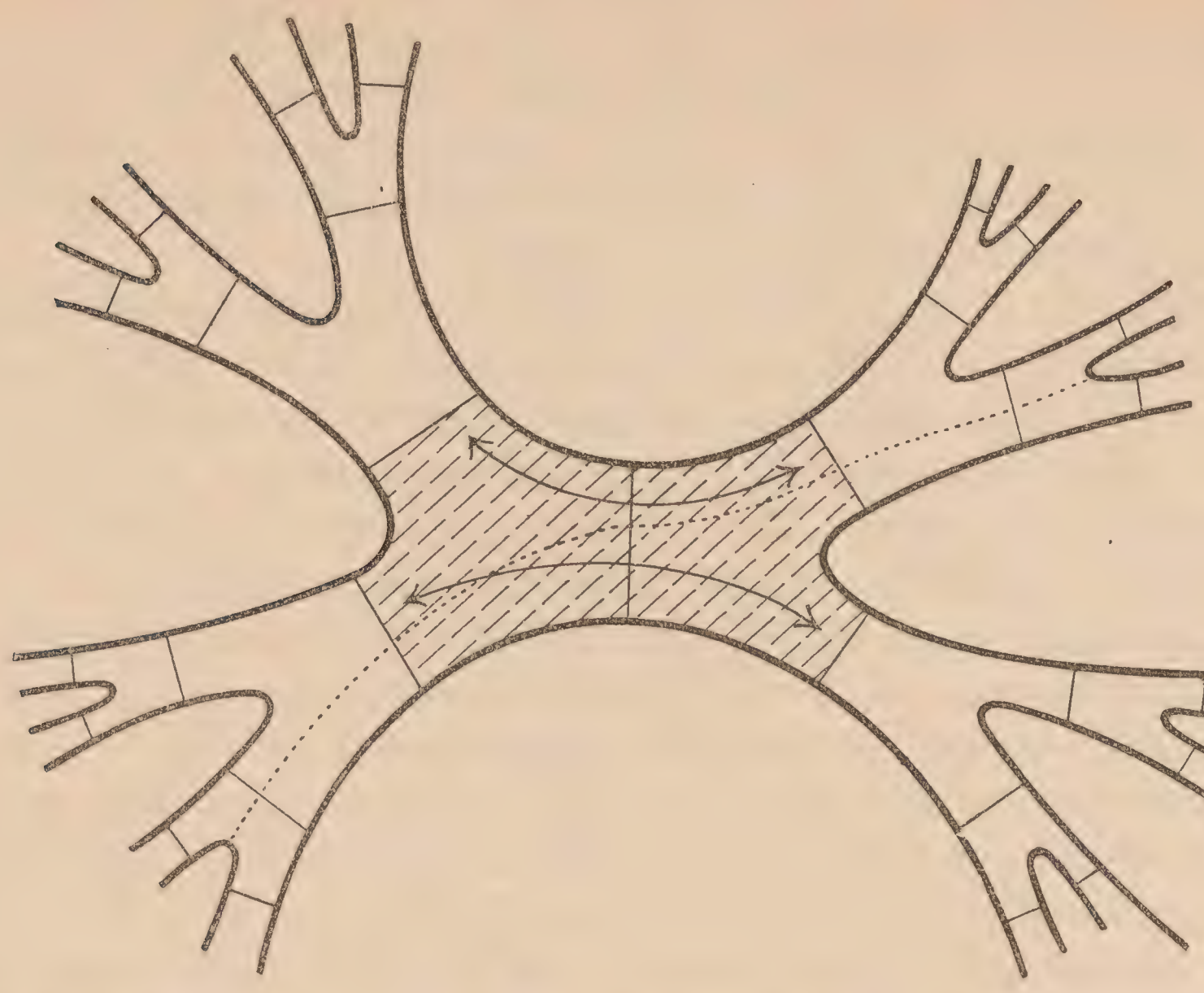


Fig. 62. Abwicklungsschema eines α-Elements (Doppelsechsecks) in Gestalt relationenfrei nebeneinander sich lagernder Sechsecke. Figur zeigt die Entstehung der unendlichvielen Q-Bögen (stark ausgezogen). Die punktierte Linie deutet einen reduzierten (normierten) Querbogen des α-Elements an. Er schneidet nur diejenigen Sechseckseiten, welche die beiden verbundenen Q-Bögen als Begrenzungsseiten des einfach zusammenhängenden vollständigen Abwickelungsgebiets voneinander trennen, und zwar in eindeutig bestimmter Reihenfolge (Signatur des Querbogens).

Ufer derjenigen Fundamentallinie beginnt, in welche der im Zyklus vorhergehende Querbogen endigt, so bleibt zur vollen Aufstellung einer charakteristischen Linie nur noch nötig, den Endpunkt jedes Querbogens mit dem Anfangspunkt des folgenden Querbogens durch einen Umlaufbogen längs der betreffenden Fundamentallinie zu verbinden, wobei die betreffende Fundamentallinie beliebig häufig in positivem oder negativem Sinne durchlaufen werden darf. Indem man die kürzeste Verbindung mit positivem Durchlaufungssinn der Fundamentallinie durch den Index o charakterisiert, kann jede weitere Verbindung dann durch eine positive oder negative ganze Zahl (Umlaufzahl) charakterisiert werden.

Wir sind nach dem Vorstehenden in der Lage, sämtliche charakteristischen Linien und damit sämtliche geschlossenen Geodätischen einer zweiseitigen geschlossenen hyperbolischen Raumform durch Indexsymbole mit gewissen Vorzeichennotierungen eineindeutig zu charakterisieren. Dabei wurde eine ganz beliebige normierte α-Zerlegung der Raumform zugrunde gelegt.

63. Es leuchtet ein, daß unsere Art der Charakterisierung auch auf einseitige geschlossene hyperbolische Raumformen übertragen werden kann. Einige besondere Bemerkungen sind allerdings zu machen. Wir denken uns wieder eine beliebige geodätische α-Zerlegung der Raumform zugrunde gelegt und jedes der α-Elemente seinerseits in zwei symmetrische kongruente Sechsecke zerlegt. Unter den die Zerlegung in α-Elemente bewirkenden Fundamentallinien können sich jetzt einufrige Rückkehrschnitte befinden. Sie müssen

sich sogar darunter befinden, wenn das Geschlecht der Raumform ungerade ist. Denkt man sich nämlich die auftretenden α-Elemente baumartig zusammengefügt, so daß ein schlichtartiger Bereich entsteht, so wird derselbe in einer schlichten topologischen Ausbreitung dreierlei Vorkommnisse darbieten können: Paare von Begrenzungslinien des schlichtartigen Bereichs können erstens direkt zugeordnet erscheinen, so daß der Durchlaufung der einen Linie des Paares in dem Sinne, daß der Bereich zur Linken liegt, eine Durchlaufung der zugeordneten Linie entspricht, bei welcher der Bereich zur Rechten liegt (zweiufrige Rückkehrschnitte mit gleicher Indikatrix der schlichtartigen Fläche auf beiden Ufern); sie können zweitens indirekt zugeordnet erscheinen, entsprechend einem zweiufrigen Rückkehrschnitt mit verschiedenen Indikatrizen der schlichtartigen Fläche auf beiden Ufern; drittens aber kann die indirekte Selbstzuordnung vorliegen, entsprechend einem einufrigen Rückkehrschnitt. Die Figur 63 zeigt jede Möglichkeit einmal. Da die zweiufrigen Rückkehrschnitte für das Geschlecht zweimal zählen, ergibt sich die Richtigkeit unserer Bemerkung, daß bei ungeradem Geschlecht notwendig einufrige Rückkehrschnitte an der α-Zerlegung teilhaben müssen[1].

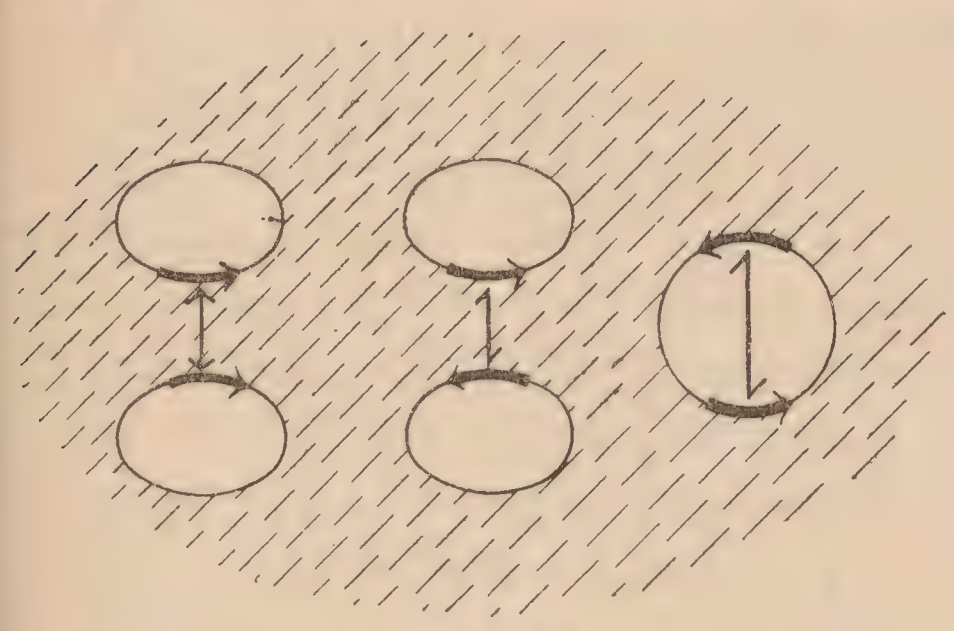


Fig. 63.

Mit Bezug auf die einufrigen Rückkehrschnitte gilt nun folgende Bemerkung. Bei Herstellung eines Umlaufbogens längs einer solchen Linie als Fundamentallinie ist darauf zu achten, daß die durch den Umlaufbogen zur Verbindung gebrachten Querbögen mit dem Umlaufbogen eine Linie bilden, die eine wirkliche Durchquerung der einufrigen Fundamentallinie leistet. Die dafür zulässigen Umlaufbögen unterscheiden sich dann um geradzahlige Vielfache eines vollen Umlaufs. Es treten demnach in diesem Falle nur gerade Umlaufzahlen auf, wenn einem richtig gewählten Grundumlauf wieder die Umlaufzahl o zugeordnet wird.

Man wird bemerken, daß es für unsere Betrachtungen nicht wesentlich ist, daß die Zerlegung der Raumform in dreifach zusammenhängende Elemente vorgenommen ist. Es genügt, daß überhaupt eine Zerlegung oder Aufschneidung durch getrennte geodätische Rückkehrschnitte vorgenommen ist. Z. B. würde auch das Ziehen eines einzigen geodätischen Rückkehrschnittes, der die Raumform zerfällt oder auch nicht zerfällt, genügen. Jeder Zerfallsteil ist weiter durch geeignete geodätische Querschnitte einfach zusammenhängend zu machen oder auch nach Analogie der Zerlegung der α-Elemente in zwei Sechsecke weiter zu zerlegen.

So können wir beispielsweise die $(A, 3, o)$ nach dem Schema der Figur 64a (zweiblättrige Fläche mit 8 Windungspunkten) behandeln: Zerlegung in zwei

---

[1] Auf S. 393 unten in der dritten Mitteilung wolle man entsprechend lesen: Diese Selbstverknüpfung .... entspricht dem bei ungeradem p jedenfalls unvermeidlichen Vorkommen der einufrigen Rückkehrschnitte bei der Zerlegung ....

Fig. 64a.

Fig. 64b.

Fig. 65a.

Fig. 65b.

vierfach zusammenhängende Vollblätter durch vier Rückkehrschnitte (stark ausgezogen), die Vollblätter ihrerseits jedes durch je vier Bögen (feiner ausgezogen) in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegt. Ein anderes Zerlegungsschema zeigt Fig. 65 b; die RIEMANNsche Fläche durch zwei koinzidierend erscheinende Rückkehrschnitte (stark ausgezogen) in zwei $(A, 1, 2)$ zerlegt; jeder dieser Teile seinerseits durch vier Querschnitte (fein ausgezogen) in zwei einfach zusammenhängende Flächen zerlegt. Die Figur 66 a andererseits zeigt eine $(B, 4, 0)$ längs der Faltlinie (stark ausgezogen) aufgeschnitten, die aufgeschnittene Fläche dann durch vier Querschnitte (fein ausgezogen) in zwei einfach zusammenhängende Stücke zerlegt. Indem man umgekehrt die fein ausgezogenen Linien stark auszieht, die stark ausgezogenen Linien fein auszieht, bemerkt man, daß auch die damit angedeutete Auffassung, die eine Rollenvertauschung mit sich bringt, für die Charakterisierung der geschlossenen charakteristischen Linien und damit der geschlossenen Geodätischen durch Indexsymbole zugrunde gelegt werden kann; vgl. Fig. 64 b, 65 a, 66 b.

Fig 66a.

Fig. 66b.

Es liege nun eine beliebige offene Raumform endlicher oder unendlichhoher Zusammenhangsordnung in normierter α-Zerlegung vor, wobei hyperbolische Öffnungen durch geodätische Öffnungsschnitte in der uns geläufigen Weise besonders abgegrenzt seien (α'-Zerlegung), während parabolische Öffnungen in parabolische Grenzelemente eingehen. Wir denken uns alle Elemente dieser Zerlegung, mit Ausnahme der hyperbolischen Öffnungsringe, durch je drei Querschnitte $q_{\alpha\beta}$ in zwei symmetrische Sechsecke, evtl. bei parabolischen Grenzelementen in Fünfecke oder Vierecke zerlegt. Eine geschlossene Geodätische, die nicht mit einem hyperbolischen Öffnungsschnitt koinzidiert und dann eben ein Multiplum desselben ist, wird ganz innerhalb des Innenteils der Raumform verlaufen, wobei die hyperbolischen Öffnungsschnitte auch nicht berührt werden, andererseits die parabolischen Grenzelemente sehr wohl durchquert werden können. Jedenfalls kann die betreffende Geodätische nur endlichviele Fundamentallinien bzw. α-Elemente der Zerlegung treffen. Es ist dann sofort zu übersehen, daß unsere Charakterisierungsmethode durch charakteristische Linien bzw. entsprechende Indexsymbole auch im betrachteten allgemeinsten Falle offener Raumformen ihre Geltung behält.

64. Aber nicht nur für die geschlossenen Geodätischen, sondern auch für die offenen Geodätischen erhält unser Charakterisierungsverfahren eine Bedeutung. An Stelle endlicher treten jetzt im allgemeinen unendliche **offene charakteristische Linien** und entsprechend unendliche Ziffernsymbole. Die eindeutige Bestimmtheit der Charakterisierung erleidet bei den eigentlich

offenen Raumformen (hyperbolische Raumformen des zweiten Typus) allerdings eine Durchbrechung insofern, als offene Geodätische, die in der Abwickelung auf Diskontinuitätsintervallen oder auch nur in den Endpunkten solcher Intervalle endigen, sei es mit beiden Enden oder nur mit einem ihrer Enden, offenbar beweglich sind; es können nämlich die Endpunkte in den betreffenden Diskontinuitätsintervallen frei gewählt werden. Unter den so bestehenden Möglichkeiten gibt es jedoch eine eindeutig ausgezeichnete, die durch die Bedingung der Orthogonalität der Geodätischen zu dem betreffenden geodätischen Öffnungsschnitt bzw. der betreffenden Grenzgeraden charakterisiert ist.

Der Begriff der charakteristischen Linie erfährt übrigens in der betrachteten Allgemeinheit noch eine Modifikation insofern, als jetzt unendliche Endquerbögen auftreten können, nämlich Querbögen, die von einer Fundamentallinie unter rechtem Winkel ausgehend in ihrem weiteren Verlauf vollständig innerhalb des betreffenden α-Elementes bleiben, in welches sie eingetreten sind, dabei eine unendliche Folge von $q_{\alpha\beta}$ überschreitend. Ebenso kann es eintreten, daß eine offene Geodätische überhaupt ganz innerhalb eines α-Elementes verläuft und lediglich durch eine nach beiden Seiten unendliche Überschreitungsfolge der $q_{\alpha\beta}$ charakterisiert ist. Als ein besonders einfacher Endigungscharakter ist der des Einmündens in eine hyperbolische oder parabolische Öffnung zu nennen. In diesen Fällen ergibt sich entsprechend ein letzter Querbogen. Im ersten Falle ist entsprechend eine Orthogonalnormierung zur eindeutigen Festlegung der Geodätischen durch ihr charakteristisches Symbol erforderlich. Offene Geodätische, die den Innenteil der Raumform nicht passieren, stehen außerhalb unserer Charakterisierungsmethode und sind übrigens unmittelbar zu übersehen.

Anmerkung. Die vorgetragene Methode der topologischen Charakterisierung der Geodätischen ist hier im unmittelbaren Anschluß an die normierte Zerlegung der Raumformen gegeben. Sie hat jedoch einen reinen Analysis-situs-Gehalt. Man wird sich dann einfach auf topologische Mannigfaltigkeiten beziehen, die in lauter α-Elemente (dreifach zusammenhängende schlichtartige Zellen) zerlegt angenommen werden. Die Öffnungen gehen dabei in Grenzelemente ein, wenn man nicht vorzieht, sie durch Öffnungslinien (α'-Zerlegung) besonders abzugrenzen. Die Unterscheidung zwischen hyperbolischen und parabolischen Öffnungen fällt weg, desgleichen das Vorkommnis von Stücken, die den Grenzhalbebenen entsprechen würden. Es ist ferner zweckmäßig, bei einseitigen Mannigfaltigkeiten die Einseitigkeit ganz durch Abgrenzung von Kreuzhauben zu kennzeichnen, was an Hand einer topologischen »Hauptdarstellung« (1. Mitt. S. 172—175) auch bei Mannigfaltigkeiten unendlich hoher Zusammenhangsordnung immer gelingt, indem man diese Abgrenzung in den vorkommenden γ-Elementen gemäß Fig. 67 vornimmt und dann den inneren Möbiusschnitt der vom einzelnen γ-Element abgetrennten Kreuzhaube als Fundamentallinie der Zerlegung aufhebt. — Hat man nun eine beliebige geschlossene topologische Linie in der Mannigfaltigkeit, so wird man sie zunächst reduzieren, indem

Fig. 67.

Fig. 68.

man alle Bögen, die homotop einem Stück einer Fundamentallinie sind, durch Deformationen beseitigt. Danach wird man die einzelnen Querbögen im Sinne der Querschnitthomotopie (bewegliche Endpunkte) weiter reduzieren (Fig. 62, punktierte Linie). Die Bögen, die durch eine und dieselbe Kreuzhaube gehen, sind alle untereinander querschnitthomotop. Wir bekommen so eine schematische Normallinie, bestehend erstens aus reduzierten Querbögen (Quersignaturen) innerhalb der α-Elemente (— die β-Elemente denken wir uns gemäß Fig. 68 in je zwei α-Elemente zerlegt —), zweitens aus Querbögen durch Kreuzhauben, drittens aus Umlaufbögen (Umlaufzahlen) längs den Fundamentallinien, welch letztere Kategorie von Bögen jedoch bei den die Kreuzhauben abgrenzenden Fundamentallinien nicht auftritt.

Statt einer α-Zerlegung können wiederum auch allgemeinere Zerlegungen zugrunde gelegt werden. Schließlich wird es vielfach auch zweckmäßig sein, bei geeigneten Zerlegungen, z. B. α-Zerlegung, darauf zu achten, daß die fundamentale Unterteilung der Fundamentalzellen durch Querschnitte zwecks Bildung der reduzierten Querbögen durch solche Querschnitte erfolgt, die mit ihren Enden in die Enden der Fundamentalquerschnitte der Nachbarzellen münden. Dies ist z. B. bei einer reinen α-Zerlegung offenbar für die zugehörenden $q_{\alpha\beta}$ stets erreichbar.

Wir weisen im Zusammenhange auf die oben (S. 417 ff.) angeführte Literatur (Morse, Nielsen, Baer usw.) nochmals hin.

Wir verweisen ferner noch auf Abschnitt XV (»Homotopie und Isotopie«) der vorliegenden vierten Mitteilung.

XII. Topologische Charakterisierung der quasiergodischen und semiergodischen Bahnen.

65. Die Betrachtungsweisen, die wir im vorstehenden kennengelernt haben, sind geeignet, der Beantwortung einiger Fragen zu dienen, denen wir uns zum Schluß zuwenden.

Zunächst können wir mit Hilfe unserer charakteristischen Linien die Frage nach quasiergodischen Bahnen in mehr konstruktiver Weise behandeln. Wir wollen uns etwa vorstellen, daß wir es mit einer Raumform des ersten oder zweiten Typus zu tun haben, die zweiseitig oder einseitig sein mag. Die Auffindung einer offenen Geodätischen, die alle Linienelemente der Raumform unbeschränkt approximiert, ist, wie wir gesehen haben, gleichbedeutend damit, eine offene Geodätische zu finden, die alle geschlossenen geodätischen Linien mit unbeschränktem Genauigkeitsgrade approximiert. Wir denken uns nun alle geschlossenen geodätischen Linien durch ihre charakteristischen Linien ersetzt. Zu diesen charakteristischen Linien bestimmen wir die ihnen zugehörenden übergelagerten unendlichen Liniengewinde (charakteristische Liniengewinde), die ihrerseits offene Linien sind mit periodischem Charakter. Wir merken dabei an, daß wir oben für die geschlossenen Geodätischen, die ganz innerhalb eines α-Elementes verlaufen, keine charakteristischen Linien angegeben haben, vielmehr lediglich charakteristische zyklische Indexsymbole, entsprechend den von der betreffenden geschlossenen Linie gekreuzten $q_{\alpha\beta}$.

Demgegenüber wollen wir bemerken, daß es sowohl in diesen Ausnahmefällen wie überhaupt für uns nur wichtig ist, die in Betracht kommenden Indexsymbole zu haben und damit geometrisch den typischen Verlauf der betreffenden Linien. Hat man die Indexfolge einer ganz innerhalb eines α-Elementes verlaufenden geschlossenen Geodätischen, so kann man sofort einen durch dasselbe α-Element verlaufenden geodätischen Querbogen bestimmen, der die geschlossene Geodätische beliebig approximiert. Das Indexsymbol dieses Querbogens wäre nämlich einfach zu bestimmen durch genügend häufige Wiederholung der betreffenden zyklischen Indexfolge, die dabei als eine offene Folge jetzt aufgefaßt wird. Vermöge dieser Bemerkung können wir die erwähnte, ganz innerhalb eines α-Elementes verlaufende geschlossene Geodätische für unseren Zweck durch Querbögen vertreten lassen, deren bloßes Eingehen als Glied in eine unendliche offene charakteristische Linie einer zu bestimmenden offenen Geodätischen zur Folge hat, daß jene geschlossene Geodätische von der so gewonnenen offenen Geodätischen mit verlangtem Genauigkeitsgrade approximiert wird.

Wir haben soeben schon den nunmehr maßgebenden Gedanken angedeutet. Wir können nämlich offenbar jetzt eine offene charakteristische Linie, deren typischer, durch Indexfolgen bestimmbarer Verlauf übrigens allein wesentlich ist, herstellen, die von den charakteristischen Abwicklungslinien aller geschlossenen charakteristischen Linien beliebig große Teile[1] enthält und weiter, entsprechend den besonderen, ganz in einem einzigen α-Element verlaufenden geschlossenen Geodätischen, diese beliebig genau approximierende Querbögen aufweist. Was die Fundamentallinien selbst anbetrifft, so werden diese sinngemäß durch beliebig ausgedehnte Umlaufbögen in der zu wählenden offenen charakteristischen Linie vertreten sein müssen.

Ist eine offene charakteristische Linie in dieser Weise bestimmt, so muß die betreffende, durch sie bestimmte offene Geodätische jede geschlossene Geodätische mit beliebigem Genauigkeitsgrad approximieren. Wir wollen diesen Sachverhalt etwa für eine allgemeine geschlossene Geodätische erläutern, die durch eine zyklische Folge von Umlaufbögen und Querbögen bestimmt wird. Die charakteristische Linie der offenen Geodätischen enthält ein beliebig großes Multiplum der geschlossenen charakteristischen Linie als Teil. Diesen Teil können wir uns so vorstellen, daß er aus der hochmultiplen geschlossenen charakteristischen Linie durch die Fortlassung eines einzigen Umlaufbogens entstanden erscheint. In der Abwicklung wird nun dieser Teil die Verbindung zwischen zwei Abwicklungsbildern Q_1 und Q_2 derjenigen Fundamentallinien herstellen, welchen der erwähnte herausgenommene Umlaufbogen angehört. Sowohl die abgewickelte geschlossene Geodätische wie die sie approximierende offene Geodätische müssen nun die beiden Orthogonalkreisbögen Q_1 und Q_2 durchkreuzen. Wegen der erwähnten hohen Multiplizität können wir für diese Zwischenbetrachtung annehmen, daß beide Linien Q_1 und Q_2 scheinbar sehr klein sind, indem die eine den einen, die andere den anderen Fixpunkt der

[1] Vgl. NIELSEN, Vortrag Kopenhagen l. c., insbesondere S. 266. NIELSEN verwendet hier den entsprechenden Gedanken für seine spezielle regulärsymmetrisch gebildete geschlossene zweiseitige Raumform.

Abwicklungslinie der geschlossenen Geodätischen überspannt. Damit ist aber auch ersichtlich, daß die offene Geodätische die geschlossene mit entsprechend hohem Genauigkeitsgrade approximiert; diese Approximation tritt in der Abwicklung, sagen wir kurz in der Mitte zwischen Q_1 und Q_2, in Erscheinung, während sie natürlich in der Nähe der erwähnten Fixpunkte nicht stattzuhaben braucht. Die genaue Mitte zwischen Q_1 und Q_2 wird durch denjenigen Punkt bezeichnet, den man erhält, wenn man die Endpunkte von Q_1 und Q_2 überkreuz geodätisch verbindet.

Da eine willkürlich gebildete unendliche offene charakteristische Linie bzw. charakteristische Indexfolge beliebig große Teile jeder beliebigen periodischen charakteristischen Linie in sich aufnehmen wird, können wir unser Ergebnis von X so aussprechen: Fast alle offenen Geodätischen einer geschlossenen hyperbolischen Raumform oder uneigentlich offenen hyperbolischen Raumform verlaufen quasiergodisch. Fast alle offenen geodätischen Innenbahnen (ganz im Innenteil der Raumform verbleibende, auch ausgezeichnet genannte Bahnen) einer eigentlich offenen Raumform verlaufen semiergodisch.

65a. Als instruktives Beispiel betrachten wir diejenige symmetrische $(A, 0, q)$ mit lauter parabolischen Öffnungen, die man in Gestalt eines natürlichen Elementarmodells hat, wenn man die Fläche eines Spitzenpolygons der ζ-Ebene, gebildet von q sich im Zyklus berührenden Orthogonalkreisbögen, um ihre eigene Rückseite vervollständigt, indem man die Verbindung über die erwähnten Orthogonalbögen hergestellt denkt. Als Kongformmodell dieser Raumform hat man die in q Punkten des Einheitskreises (oder der Achse des Reellen) punktierte z-Ebene, die dabei durch q Bögen des Einheitskreises (Querschnitte), jeder von Punktierung zu Punktierung laufend, in zwei zueinander symmetrische Hälften zerlegt wird.

Die Fundamentalabwicklung unseres Elementarmodells nimmt die Gestalt eines unbeschränkten Spiegelungsprozesses an, der mit dem gegebenen Spitzenpolygon auszuführen ist. Das Innere des Einheitskreises erscheint so in der Form $E = \lim_{n\to\infty} S_n$ durch Näherungsspitzenpolygone S_n immer größerer Seitenzahl ausgeschöpft, wobei die Seiten von S_n mit wachsendem Index ihrer Ausdehnung nach gleichmäßig unter jede Grenze herabsinken. Alle Seiten tragen ihrer Provenienz entsprechend einen der Indizes $1, \ldots, q$ und einen Richtungssinn, wenn ein solcher beim Elementarmodell ursprünglich festgesetzt wird. Wir haben nun offenbar in beliebiger Nähe irgend zweier Punkte A und B des Einheitskreises Seiten beliebig kleiner Ausdehnung und von beliebigem Index. Wählen wir bei A und B je eine Seite eines und desselben Index aus, so müssen dieselben im Vergleich mit einem festgewählten positiven Umlaufsinn des Einheitskreises zueinander gegenläufig gewählt werden, damit die sie ineinander überführende Substitution eine hyperbolische Substitution ist, deren Fixpunkte durch die gewählten einander zugeordneten Bögen getrennt werden. Nun sieht man aber, daß überall an der Peripherie des Einheitskreises Seiten desselben Index und mit entgegengesetztem Sinn vorkommen. Hat man nämlich irgendeine bereits klein gewählte Seite s, so entsteht stets ein Bild von s mit zu s gegenläufiger Orientierung, wenn man s

an einem ihm nahe, zugleich aber außerhalb von ihm gelegenen Bogen des Abwickelungsnetzes spiegelt.

Damit ist klar, daß man geschlossene geodätische Linien der Raumform konstruieren kann, die ein beliebig vorgegebenes Linienelement des ζ-Gebiets und also der Raumform, so genau als man wünscht, nach Lage und Richtung approximieren. Wir können diese Linien jede durch die Indexfolge der überkreuzten »Querschnitte« vollständig charakterisieren. Die Abwicklungslinien dieser geschlossenen Geodätischen liefern entsprechend unendliche periodische Indexfolgen, mit deren Hilfe durch Aufnahme beliebig großer Teile derselben, und zwar von allen, man solche Indexfolgen erhält, die quasiergodische Bahnen vermitteln.

Ein anderes leicht zugängliches Beispiel ist die symmetrische (A, o, q) mit lauter hyperbolischen Öffnungen[1], dargestellt durch die unter Hinzunahme der Rückseite gebildete Fläche, die von sich nun nicht mehr berührenden, sondern getrennt verlaufenden Orthogonalbögen gebildet wird. In diesem Falle verlaufen fast alle offenen Geodätischen semiergodisch, indem sie alle geschlossenen Geodätischen unbeschränkt approximieren und dadurch auch alle diejenigen Linienelemente der Raumform, die in der Abwickelungsebene nach beiden Seiten auf Grenzpunkte der Gruppe zeigen.

Als leicht zugängliches Beispiel zweiseitiger geschlossener Raumformen hat man die orthosymmetrische hyperelliptische Raumform vom Geschlecht p mit $p+1$ Symmetrielinien, für welche die zweiblättrige RIEMANNsche Fläche mit $2p+2$ reellen Windungspunkten ein Konformmodell ist. Ein Abwickelungsnetz ergibt sich hier durch Anwendung eines reinen Spiegelungsprozesses, angewandt auf ein $(2p+2)$-Eck mit lauter rechten Winkeln. Vier geeignet zusammengefügte koinzidierend gelagerte solche $(2p+2)$-Ecke liefern nach Nr. 42a (3. Mitt.) ein natürliches Elementarmodell.

In allen genannten Fällen kann die geodätische Bewegung eines Punktes im Elementarmodell selbst wie die Bewegung einer punktförmigen Billardkugel auf einem nichteuklidischen Billard interpretiert werden und ergibt dann in dieser Interpretation besondere Formulierungen unserer Resultate. Bei dieser Auffassung wird von dem Blätterwechsel, den die Kugel bei ihrem Verlauf im Elementarmodell vornimmt, abgesehen.

XIII. Geodätische Aufschneidung von Raumformen unendlichhoher Zusammenhangsordnung durch getrennte Querschnitte.

66. Als eine zweite Anwendung unserer Methode der fundamentalen Schnittreihen wollen wir die geodätische Aufschneidung von Raumformen unendlichhoher Zusammenhangsordnung durch unendlichviele getrennte Querschnitte zu einem einfach zusammenhängenden Bereich betrachten. Wir wollen dabei zunächst die Voraussetzung machen, daß die Raumform keine Grenzhalbebenen besitzt. Es handelt sich um das Gegenstück zu der oben

[1] Zu diesem allerdings anders aufgefaßten Beispiel (»billard non euclidien«) bemerkt HADAMARD (l. c. Procès-verbaux), daß die ganz im Endlichen verlaufenden Bahnen diejenigen sind, die in ihrer Abwickelung beiderseits auf Grenzpunkte der Fundamentalgruppe stoßen.

(Nr. 61) benutzten geodätischen Aufschneidung endlich-vielfach zusammenhängender Raumformen durch getrennte Querschnitte.

Wir knüpfen dazu an die von uns in Nr. 28 (Zweite Mitteilung S. 357) eingeführte topologische Aufschneidung einer beliebigen Mannigfaltigkeit unendlichhoher Zusammenhangsordnung mittels unendlichvieler getrennter Querschnitte an. Diese Aufschneidung lehnte sich ihrerseits an eine topologische Zerlegung in Elementbereiche an, wie sie einer Hauptdarstellung der Mannigfaltigkeit, nämlich einer Darstellung durch Hauptnäherungsbereiche entspricht. Wir können nun, indem wir jetzt annehmen, daß wir es mit einer Raumform zu tun haben, eine geodätische Hauptdarstellung der Raumform zugrunde legen. Durch eine solche wird die Raumform in lauter endlich-vielfach zusammenhängende Teile zerlegt, und zwar mittels Rückkehrschnitten, deren jeder für sich die Eigenschaft hat, die Raumform zu zerfällen. Die Existenz einer solchen Zerlegung ist nach unseren Untersuchungen außer Zweifel. Kommen endlich-vielfach zusammenhängende Zerfallsteile der Hauptdarstellung vor, die hyperbolische Öffnungen enthalten, so wollen wir uns diese Öffnungen noch durch geodätische Öffnungsschnitte für sich abgetrennt denken. Nach dem l. c. angewandten Verfahren können wir nun zunächst rein topologisch unendlichviele getrennte Querschnitte herstellen, die die Raumform in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln. Wir denken nun die so mit Rückkehrlinien und Querlinien ausgestattete Raumform in die ζ-Ebene abgewickelt. Die längs den Querlinien allein aufgeschnittene Raumform, R_0, liefert einen Fundamentalbereich Φ_0, dessen Randsubstitutionen ein vollständiges System durchaus voneinander unabhängiger Erzeugenden der Gruppe bilden. Das ganze Innere des ζ-Einheitskreises erscheint in unendlichviele Φ_0-Bilder zerlegt, ohne jede Singularität im Innern. Die einzelnen Linien q, die diese Zerlegung bewirken, sind ihrem Verlauf nach charakterisiert durch die von den Rückkehrlinien herrührenden Q-Bögen, die nun in gewisser Reihenfolge und in bestimmter Auswahl von den Linien q gekreuzt werden. Sofern bei einer solchen Linie q nicht der Fall des Einmündens in eine hyperbolische oder parabolische Öffnung vorliegt, bemerken wir, daß die Reihe der von dieser Linie angetroffenen Q nach beiden Seiten unendlich ist, und daß dabei die Q-Bögen (wegen Fehlens von Grenzhalbebenen) scheinbar unendlich klein werden; womit zugleich gesagt ist, daß die betreffenden Linien q in zwei verschiedenen Punkten der Peripherie des Einheitskreises bestimmt endigen.

Auch wenn die Einmündung in eine parabolische Öffnung der Raumform vorliegt, bleibt offenbar der Charakter der bestimmten Endigung bestehen. Liegt die Einmündung in eine hyperbolische Öffnung vor, so kann allgemein nur von einer asymptotischen Endigung gegen ein Diskontinuitätsintervall der Peripherie, das der hyperbolischen Öffnung entspricht, gesprochen werden. Man wolle nun bemerken, daß auf Grund des Gesagten es ohne weiteres erlaubt ist, die Linien q durch ihre geodätisch Normierten mit denselben Endpunkten zu ersetzen bzw. im Falle des Vorliegens einer Einmündung in eine hyperbolische Öffnung die betreffende q durch diejenige Normierte, welche den der Öffnung entsprechenden Q-Bogen orthogonal

schneidet. Dieser Prozeß ist zweifellos kollisionenfrei und liefert den normierten Bereich Φ_0^* an Stelle des unnormierten Φ_0 mit denselben Randsubstitutionen. Es kommt auf diese Weise notwendig zu einer vollständig singularitätenfreien Zerlegung des ganzen Inneren des Einheitskreises. Denn die Annahme des Gegenteils würde folgendes bedeuten. Wendet man auf Φ_0^* sämtliche Substitutionen der Fundamentalgruppe an, so entsteht ein durch Nebeneinanderlegung unendlichvieler Φ_0^*-Bilder gebildeter einfach zusammenhängender Teilbereich des Einheitskreises, der jedenfalls nur von getrennten Orthogonalkreisbögen begrenzt sein könnte. Dieser Bereich müßte durch die Substitutionen der Fundamentalgruppe in sich übergehen, woraus zu schließen wäre, daß die von den erwähnten Orthogonalkreisbögen überspannten Peripheriebögen Diskontinuitätsintervalle wären. Diese könnten jedoch unmöglich hyperbolischen Öffnungen entsprechen, weil solche nach der ganzen Entstehung singularitätenfrei in das betrachtete Abwicklungsgebiet eingehen. Man bedenke dabei, daß doch jedenfalls nur endlichviele der topologisch gegebenen und also auch der normierten Querlinien in einer und derselben Öffnung münden können, eine Bemerkung, die sich natürlich auch auf die parabolischen Öffnungen erstreckt. — Übrigens bemerkt man auch sofort an Hand der Zellenabwickelung, daß die normierten Querschnitte in lauter Zellbögen zerfallen, deren einzelner dem entsprechenden unnormierten Bogen homotop ist. Auch so erkennt man, daß die normierten Querschnitte sich innerhalb der Raumform nicht häufen können.

Wir formulieren den gewonnenen Satz: Jede Raumform unendlichhoher Zusammenhangsordnung, die keine Grenzhalbebenen aufweist, läßt sich durch unendlichviele getrennte geodätische Querschnitte unter Vermeidung jeder inneren Häufungssingularität zu einer einfach zusammenhängenden Fläche aufschneiden. Für die zugehörende Fundamentalgruppe bedeutet dies die Existenz eines von lauter getrennten Orthogonalkreisbögen gebildeten einfach zusammenhängenden Fundamentalbereichs, dessen erwähnte Begrenzungsbögen paarweise durch direkte oder indirekte Substitutionen aufeinander bezogen sind.

Wir machen noch die Anmerkung, daß man die gewonnene kanonische Aufschneidung mittels getrennter Querschnitte nun benutzen kann, um die geschlossenen geodätischen Linien der Raumform durch einfache zyklische Symbole in derselben Weise zu charakterisieren, wie wir dies für endlich-vielfach zusammenhängende Raumformen in Nr. 61 getan haben.

Die Raumformen unendlichhoher Zusammenhangsordnung mit Grenzhalbebenen haben wir zunächst außer Betracht gelassen. Die Gewinnung einer analogen kanonischen Vollaufschneidung für Raumformen mit Grenzhalbebenen würde besondere Überlegungen erfordern.

Wenden wir unser Normierungsverfahren in einem solchen Falle an, so kommt möglicherweise, aber nicht notwendig die Orthogonalnormierung bezüglich Grenzgeraden vor, nämlich immer dann, wenn in der ζ-Ebene eine fundamentale Schnittreihe gegen ein Abwickelungsbild einer Grenzgeraden konvergiert. Wir sind offenbar in jedem Falle in der Lage, die Normierung kollisionenfrei durchzuführen, und erhalten dann stets eine

geodätische Zerlegung des »Innenteiles« der Raumform durch lauter getrennte vollständige geodätische Querschnitte. Diese geodätischen Querschnitte können aber jetzt die Eigenschaft haben, daß sie sich auf der Raumform gegen eine oder mehrere Grenzgeraden häufen. In diesem Falle ist der gewonnene Fundamentalbereich der Gruppe als Pseudobereich anzusprechen, weil nämlich seine Reproduktion nach der Gruppe nicht zur vollen Ausschöpfung der Fläche des Einheitskreises führt, vielmehr diejenigen von Orthogonalkreisbögen begrenzten unendlichvielen Zweiecke frei läßt, die Abwickelungsbilder der durch die Querschnitthäufungen versperrten Grenzhalbebenen der Raumform sind. Andererseits kann es vorkommen, daß nun unendlichviele Querschnitte bezüglich ein und derselben Grenzgeraden orthogonal normiert sind. Das modifiziert den Inhalt unserer Behauptung nicht. Die betreffende Grenzhalbebene wird in einem solchen Falle in die singularitätenfreie Aufschneidung voll einbezogen. Die Treffpunkte der betreffenden Querschnitte mit der Grenzgeraden können sich dann niemals gegen einen inneren Punkt der Grenzgeraden häufen; sie verteilen sich vielmehr notwendig gegen die Enden der Grenzgeraden hin. Denn im gegenteiligen Falle würde, wie man in der Abwickelung sieht, der Verlauf der zur Häufung gelangenden Querschnitte ein solcher sein, daß unendlichviele derselben ein und dasselbe α-Element passieren müßten, was nach der ganzen topologischen Anlage der Querschnitte, die ja bei der Normierung nicht verändert wird, ausgeschlossen ist. Jeder normierte Querschnitt passiert die und nur die normierten α-Elemente, durch die er nach seiner topologischen Verlaufskonstruktion führen soll. Das auf Grund einer α-Zerlegung gebildete Verlaufsschema der unendlichvielen Querschnitte weist aber in der Tat keine Anhäufung in irgendeinem α-Element auf. (S. oben S. 417 Koebe l. c.)

XIV. Besondere geodätische Aufschneidungen geschlossener Raumformen. Konfigurationspolygone und Konfigurationsnetze.

67. Als eine weitere Anwendung unserer Methoden behandeln wir die Aufschneidung der geschlossenen hyperbolischen Raumformen unter alleiniger Anwendung geschlossener Rückkehrschnitte. Die von uns zu konstruierenden Fundamentalbereiche mit ihren Reproduktionen sollen die Besonderheit haben, solche Diskontinuitätsnetze zu liefern, welche von lauter vollständigen Orthogonalkreisbögen gebildet werden.

Wir gehen von der Betrachtung eines symmetrischen Falles aus. Die hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht p mit lauter reellen Windungspunkten denken wir uns längs der ganzen Achse des Reellen durch beide Blätter hindurch aufgeschnitten, wodurch sie in 4 Halbebenen zerlegt wird. Dieser Aufschneidung entspricht in der ζ-Ebene eine Parzellierung in lauter teils direkt, teils indirekt kongruente $(2p+2)$-Ecke mit lauter rechten Winkeln, die offenbar von lauter vollständigen Orthogonalkreisbögen bewirkt wird. Verlängern wir die Seiten eines dieser $(2p+2)$-Ecke, so erhalten wir $4p+4$ Halbstrahlen, deren jeder von unendlichvielen weiteren Orthogonalkreisbögen des Netzes getroffen wird, wie Fig. 69 andeutet, in welcher $p=2$

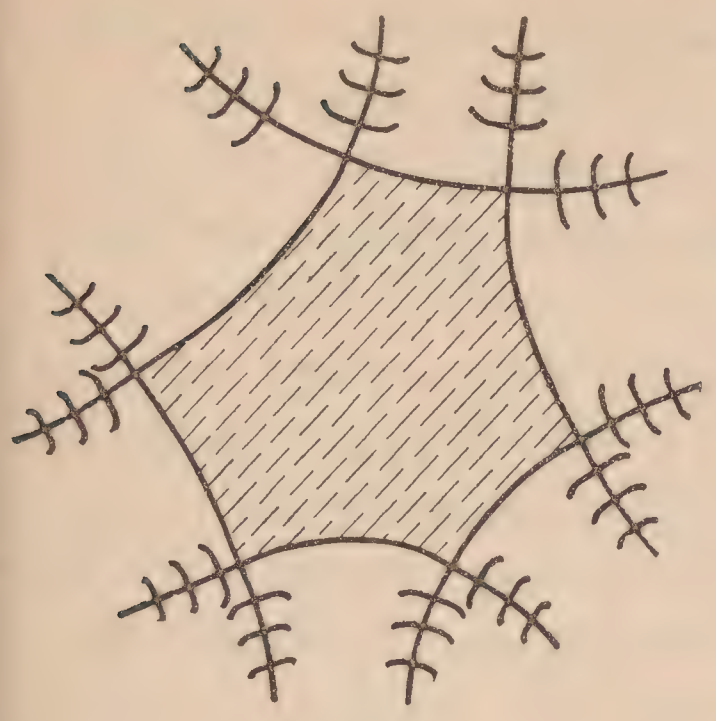


Fig. 69.

angenommen ist. Diese neuen Orthogonalkreisbögen haben keine zwei einen Punkt gemeinsam. Die $2p+2$ Orthogonalkreisbögen, welche die Begrenzung eines $(2p+2)$-Ecks liefern, bestimmen jeder auf die angedeutete Weise eine fundamentale Schnittreihe mit anderen Orthogonalkreisbögen des Netzes, und diese letzteren Bögen ziehen sich in der Grenze auf die Endpunkte der $2p+2$ Orthogonalkreisbögen zusammen.

Nunmehr wollen wir diesen vermöge der Symmetrieverhältnisse übersichtlichen Sachverhalt auf beliebige geschlossene Raumformen vom Geschlecht p verallgemeinern. Dazu bemerken wir, daß die Aufschneidung unserer symmetrischen hyperelliptischen RIEMANNschen Fläche im Endergebnis gleichwertig ist mit einer Aufschneidung der Fläche längs $2p+2$ Rückkehrschnitten, deren jeder einzelne die Verbindung zwischen zwei benachbarten Windungspunkten der RIEMANNschen Fläche herstellt. Diese Rückkehrschnitte haben einen bestimmten topologischen Anordnungstypus, auf Grund dessen wir sagen wollen, daß sie eine **geschlossene Rückkehrschnittkette** bilden. Offenbar können wir nun jede beliebige geschlossene zweiseitige Raumform nach demselben topologischen Schema durch eine geschlossene Rückkehrschnittkette in vier einfach zusammenhängende Teile zerlegen. Indem wir sodann die einzelnen Rückkehrschnitte geodätisch normieren, ergibt unsere Methode der fundamentalen Schnittreihen das Resultat, daß auch die geodätisch normierte Rückkehrschnittkette eine geschlossene Rückkehrschnittkette bildet, die eine äquivalente Zerlegung der Raumform in vier einfach zusammenhängende Teile bewirkt. Will man von dieser Zerlegung zu einem Fundamentalbereich gelangen, so wird man weiter nichts zu tun haben, als in der ζ-Ebene irgend vier in einem Kreuzungspunkte des Netzes zusammenstoßende Bereiche zu einem Ganzen zusammenzufassen. Das entspricht nämlich der Wiederverheftung der vier Zerfallsteile der RIEMANNschen Fläche längs zwei Rückkehrschnitten, die in der Kette benachbart liegen. Man überblickt diesen Sachverhalt am besten an der symmetrischen hyperelliptischen RIEMANNschen Fläche, wo ja die gleichen topologischen Verhältnisse vorliegen. Im übrigen sei zum leichteren Verständnis der vorgetragenen Begründung auf 3. Mitt. S. 391 verwiesen[1].

Will man die behandelten Konfigurationspolygone und Konfigurationsnetze tatsächlich konstruieren, so wird man dies auf Grund folgender Bemerkungen durchführen können. Man läßt in der Kette der Rückkehrschnitte, deren Anzahl ja gerade ist, abwechselnd einen weg bzw. stehen, dann ist eine Zerlegung der Raumform in zwei schlichtartige $(p+1)$-fach zusammenhängende Teile vorliegend. Diese beiden Teile können aus normierten α-Elementen synthetisch aufgebaut werden und dann unter Vorgabe von Kompositionsinvarianten zusammengefaßt werden. In der so auf-

[1] Vgl. Gött. Nachr. 1918 l. c. sowie »Urmanuskript«.

gebauten Raumform können nun die weiteren Rückkehrschnitte der Kette zunächst topologisch eingefügt und sodann normiert werden, was nach unseren Entwicklungen ein brauchbares kollisionenfreies Ergebnis liefert. Die Vollabwicklung der so aufgeschnittenen Raumform liefert das gewünschte Konfigurationsnetz.

Wie gesagt, bestimmt das soeben konstruierte Netz genau vier, vermöge der Gruppe inäquivalente Bereiche in Gestalt von $(2p+2)$-Ecken, die natürlich jetzt nicht, wie im ursprünglich betrachteten symmetrischen Falle, rechte Winkel haben müssen. Im Falle $p=2$ tritt als besonders erwähnenswerter Umstand ein, daß von den vier jetzt entstehenden inäquivalenten Sechsecken je zwei untereinander direkt kongruent sind. Es hängt das damit zusammen, daß nach Aufschneidung der Raumform längs dreier getrennter Rückkehrschnitte der Kette diese, wie wir wissen, in zwei direkt kongruente α-Elemente zerlegt wird[1]. Indem man im Netz entsprechend schraffierte und nicht schraffierte Bereiche unterscheidet, findet sich eine Lagerung, bei der an jedes schraffierte Sechseck längs jeder seiner Seiten ein unschraffiertes Sechseck anstößt. Die Raumform kann jetzt allgemein durch eine zweiblättrige hyperelliptische Riemannsche Fläche mit sechs Windungspunkten (Konformmodell) repräsentiert werden. Der allgemeinste Rückkehrschnitt erscheint in diesem Konformmodell derart, daß die ganze Fläche durch einen durch beide Blätter gleichzeitig geführten geschlossenen Schnitt, der über alle sechs Windungspunkte hinführt, aufgeschnitten wird.

68. Um entsprechende Konfigurationspolygone für geschlossene einseitige Raumformen zu erhalten, kann man beispielsweise das Aufschneidungsschema der Figg. 66 zugrunde legen, durch welches die Raumform in zwei einfach zusammenhängende Bereiche zerlegt wird, nämlich durch p einufrige Rückkehrschnitte und einen weiteren Rückkehrschnitt, der die so entstehende p-fach zusammenhängende Fläche in zwei einfach zusammenhängende Stücke zerlegt, indem er seinerseits jeden der einufrigen Rückkehrschnitte einmal kreuzt. Eine schematische Übersicht der Verhältnisse gewinnt man in diesem Falle, wenn man die betreffende Raumform durch eine regulär symmetrische Faltfläche, wie Figg. 66 zeigen (Konformmodell), gegeben denkt, wobei dann die einufrigen Rückkehrschnitte in geodätischer Normierung orthogonal auf die Faltlinie auftreffen müssen. Die Raumform ist dann offenbar durch das Linienschema in zwei kongruente $2p$-Ecke mit lauter rechten Winkeln zerlegt, so daß das in diesem symmetrischen Falle in der ζ-Ebene entstehende Netz durch einen reinen Spiegelungsprozeß aus einem solchen $2p$-Eck gewonnen wird.

Legt man irgendein endliches System geschlossener Geodätischen einer geschlossenen Raumform zugrunde, das die Beschaffenheit hat, die Raumform in einfach zusammenhängende Teile zu zerlegen, so gewinnen wir damit offenbar in der Abwickelung ein Konfigurationsnetz; aber diesem Netz fehlt eine für uns wesentliche Eigenschaft, die wir noch nicht als solche hervorgehoben haben, nämlich die Eigenschaft, eine typische Teilung zu bewirken, womit

[1] Siehe 3. Mitt. l. c. S. 396 ff.

gemeint ist, daß dieses topologische Zerlegungsschema erhalten bleibt, wenn man die Invarianten der Raumform irgendwie ändert.

Andererseits ist zu sagen, daß man typische Konfigurationsnetze nicht nur auf die eben angegebene Weise erhält, vielmehr gibt es mannigfaltige Möglichkeiten typischer geodätischer Aufschneidung, die das Gewünschte leisten. So können wir z. B. typische Aufschneidungen herstellen, die eine Zerlegung einer ganz beliebigen (A, p, o) oder (B, p, o) in lauter Sechsecke bewirken. Solche Zerlegungsschemata zeigen uns die beistehenden Figuren. Fig. 70 zeigt die Zerlegung einer $(A, 4, o)$ in 12 Sechsecke, Fig. 71 die Zerlegung einer $(B, 5, o)$ in 6 Sechsecke. Für die typischen Aufschneidungen unserer Art ist wesentlich, daß sich niemals in einem Kreuzungspunkte mehr als zwei geschlossene Geodätische schneiden, daß mithin in der Abwicklung auch bei beliebiger Veränderung der Invarianten der Raumform es niemals vorkommt, daß drei Netzlinien durch einen und denselben Punkt gehen.

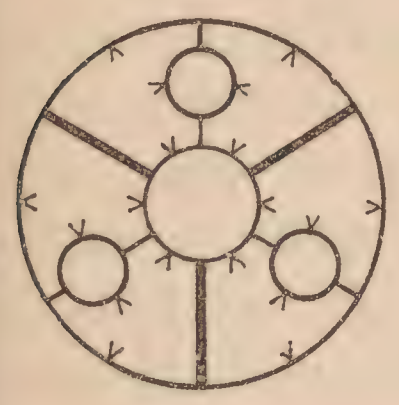


Fig. 70.

Fig. 71.

XV. Homotopie und Isotopie[1].

69. Denken wir eine nichtniedere Raumform ($\mathfrak{c} \geqq 1, \infty$ zugelassen) irgendwie einer topologischen α-Zerlegung unterworfen, in dieser α-Zerlegung ferner in allen vorkommenden Öffnungen (hyperbolischen und parabolischen Öffnungen) topologische Öffnungsstücke besonders abgegrenzt (topologische α'-Zerlegung), so haben wir ein Liniensystem in der Raumform vor uns, von dem keine zwei untereinander homotop sind. Die Konstruktion der universellen Überlagerungsfläche, die jedenfalls eindeutig bestimmt ist, zeigt nämlich, wenn die von uns oft angewandte Methode der Zellenüberlagerung benutzt wird, daß jede der Zerlegungslinien unendlichviele selbständige Liniengewinde liefert und daß die Gesamtheit aller dieser Liniengewinde in der ζ-Abwicklung ein System von Q-Bögen liefert, deren keine zwei auch nur einen Endpunkt gemeinsam haben können auf Grund des bestehenden Anordnungstypus aller dieser Q-Bögen, wonach nämlich zwischen je zwei verschiedenen Q-Bögen sich unendlichviele weitere Q-Bögen einschalten, und zwar über jedem der beiden Peripherieintervalle, die zwischen den beiden Q-Bögen liegen. Die Annahme der Homotopie zweier Linien der Zerlegung würde offenbar bedeuten, daß ein Q-Bogen durch sinngemäße Deformation, bei der notwendig die Endpunkte in Ruhe bleiben müßten, in einen anderen Q-Bogen übergehen könnte, der doch aber andere Endpunkte hat. Es ist leicht, den rein topologischen Sinn der vorstehenden Betrachtung herauszuschälen.

Es seien jetzt irgend zwei getrennte Rückkehrschnitte ρ_1 und ρ_2, die nicht Nullinien seien, innerhalb der Raumform gegeben. Woran erkennt man, daß dieselben homotop sind? Homotopie zweier geschlossenen

[1] Vgl. zu diesem Abschnitt auch Abschnitt XI.

Linien bedeutet ja, daß die eine geschlossene Linie durch stetige Veränderung in die andere übergeführt werden kann, wobei es gleichgültig ist, ob zwischendurch Selbstüberschneidungen oder Selbstberührungen der in Deformation begriffenen Linie neu auftreten. Es ist klar, daß ein zweiufriger Rückkehrschnitt nur einem zweiufrigen und ein einufriger Rückkehrschnitt nur einem einufrigen Rückkehrschnitt homotop sein kann.

Sind ρ_1 und ρ_2 zwei getrennte einufrige Rückkehrschnitte, so ist sofort zu bemerken, daß dieselben niemals homotop sein können. Die beiden Rückkehrschnitte ρ_1 und ρ_2 bewirken nämlich zusammen offenbar kein Zerfällen der Raumform. Wir können jeden der Rückkehrschnitte in einen schmalen Streifen einbetten, der ein Möbiusband ist. Nachdem wir diese Möbiusbänder durch ihre begrenzenden Linien l_1 und l_2 abgetrennt haben, bleibt der übrige Teil R_1 der Raumform R noch zusammenhängend, so daß man l_1 und l_2 in R_1 durch einen Querschnitt q verbinden kann. Indem man weiter die Ufer q^+, l_1, q^-, l_2 in R_1 abschreitet, die sich zu einem geschlossenen Gesamtufer vereinigen, kann man gleichzeitig längs dieses Ufers unmittelbar neben dem Rande eine geschlossene Linie λ ziehen, die nun offenbar, für sich allein genommen, von der ursprünglichen Raumform eine $(B, 2, 1)$ absondert, die durch das Ziehen der Möbiusschnitte ρ_1, ρ_2 in ein α-Element verwandelt wird. Der nach Abtrennung dieses Elements gewonnene Restteil der Raumform kann einer vollständigen α-Zerlegung in der Weise unterworfen werden, daß an l ein ganz bestimmtes α-Element anstößt. Wir haben also eine topologische α-Zerlegung der Raumform hergeleitet, an welcher die Linien ρ_1 und ρ_2 teilnehmen. Es ist daher nach der vorangehenden allgemeinen Bemerkung ausgeschlossen, daß diese Linien homotop sind.

Sind nun andererseits ρ_1 und ρ_2 zwei zweiufrige getrennte Rückkehrschnitte, so sind zwei Fälle möglich. Entweder ρ_1 und ρ_2 bilden die vollständige Begrenzung eines Teiles $(A, 0, 2)$ (Ring) der Raumform, oder das ist nicht der Fall. Im ersten Falle sind sie offenbar homotop. Im anderen Falle können wir ρ_1 und ρ_2 der Regel nach als einer α-Zerlegung bzw. α'-Zerlegung angehörend auffassen. Wenn diese Bemerkung für endlich-vielfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten offenbar leicht als richtig erkannt wird, so braucht zu ihrer Erläuterung für Mannigfaltigkeiten unendlichhoher Zusammenhangsordnung nur gesagt zu werden, daß aus einer solchen Mannigfaltigkeit ein Hauptnäherungsbereich abgesondert werden kann, der ρ_1 und ρ_2 in sich enthält. Wir sagten, »der Regel nach«. Es kann nämlich sein, daß einer der Rückkehrschnitte, etwa ρ_1, ein zerfällender Rückkehrschnitt ist, der eine $(B, 1, 1)$ (Möbiusband) von der Raumform trennt. In $(B, 1, 1)$ gibt es dann nur einen Rückkehrschnitt, und dieser ist ein einufriger Rückkehrschnitt, woraus man erkennt, daß ρ_2 dem Zerfallsteile $(B, 1, 1)$ nicht angehören kann. ρ_1 ist nun homotop dem Doppelt des erwähnten einufrigen Rückkehrschnittes und möge durch dieses Doppelt ersetzt werden. Das gleiche möge mit ρ_2 geschehen, wenn auch ρ_2 ein Möbiusband abspaltet. Nach dieser Abänderung können die einfachen Ersatzkurven jedenfalls als Teile einer α-Zerlegung betrachtet werden, und unsere Methode der getrennten Q-Bögen erklärt sofort die Unmöglichkeit der Homotopie.

70. Wir betrachten nunmehr irgend zwei Rückkehrlinien ρ_1 und ρ_2, die sich schneiden mögen. Wie erkennen wir jetzt, ob sie homotop sind, oder nicht?

Zur Fixierung der Ideen betrachten wir zunächst eine geschlossene zweiseitige Raumform. Indem wir Nulllinien von der Betrachtung ausschließen, bemerken wir, daß ρ_1 durch ein Liniensystem ergänzt werden kann, das mit ρ_1 zusammen eine α-Zerlegung der Raumform bewirkt. Die Linie ρ_2 wird nun durch dieses Fundamentalsystem in endlichviele Bögen zerlegt (— wir nehmen nämlich an, daß die von uns zu betrachtenden Linien immer aus endlichvielen geodätischen Teilen zusammengesetzt sind; desgleichen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß kein Stück von ρ_2 mit einem Stück einer Fundamentallinie zusammenfällt —). Die einzelnen Bögen gehen gerade von Fundamentallinie zu Fundamentallinie. Ist nun einer dieser Bögen homotop einem Stück einer Fundamentallinie, so können wir offenbar durch eine Deformation unter geeigneter Mitführung dabei angetroffener sonstiger Teile von ρ_2 erreichen, daß dieses Vorkommnis beseitigt wird, wobei sich die Anzahl der Schnitte der deformierten ρ_2 mit dem Fundamentalsystem und damit die Anzahl der Bögen verringert hat. Dieses Verfahren wird so oft wiederholt, bis die deformierte ρ_2 keinen Bogen mehr aufweist, der homotop einem Fundamentalbogen ist. Die so abgeänderte Linie ρ_2 möge eine bezüglich des Fundamentalsystems reduzierte Rückkehrschnittlinie heißen.

Es sind nun zwei Fälle möglich. Entweder hat die reduzierte ρ_2 noch Schnitte mit dem Fundamentalsystem. Dann geht ihre Abwickelung offenbar eine fundamentale Schnittreihe mit Q-Bögen ein, die von den durch die reduzierte ρ_2 geschnittenen Linien des Fundamentalsystems herrühren. Die reduzierte ρ_2 und folglich auch die ursprüngliche kann dann unmöglich homotop einer Fundamentallinie sein, insbesondere auch nicht homotop ρ_1.

Zweitens kann der Fall vorliegen, daß die reduzierte ρ_2 keinen Schnitt mit den Fundamentallinien mehr aufweist. Dann verläuft sie ganz in einem α-Element als geschlossene Linie und ist offenbar homotop einer Fundamentallinie. Soll sie insbesondere ρ_1 homotop sein, so muß sie in einem ρ_1 unmittelbar benachbarten α-Element »parallel« ρ_1 verlaufen, nämlich mit ρ_1 einen ringförmigen Streifen begrenzen.

Die vorstehende Betrachtung lehrt nun aber zugleich folgendes. Wenn zwei Rückkehrschnitte ρ_1 und ρ_2 einer zweiseitigen geschlossenen Raumform homotop sind, so sind sie auch isotop.

Wir betrachten nun eine einseitige geschlossene Raumform, darin irgend zwei Rückkehrlinien ρ_1 und ρ_2, die keine Nullinien seien, sich aber schneiden mögen. Es sei ρ_1 ein einufriger Rückkehrschnitt. Wir denken uns in diesem Falle ρ_1 als Rückkehrlinie in einer Kreuzhaube, die durch eine Fundamentallinie l_1 abgegrenzt wird, wie oben. Aus dem übrigen Teil der Raumform denken wir uns $p-1$ weitere Kreuzhauben durch Linien $l_2, \cdots, l_p$ abgesondert. Der von den Linien $l_1, \cdots, l_p$ begrenzte zweiseitige Teil der Raumform wird weiter in lauter dreifach zusammenhängende Elemente durch Fundamentallinien $l_{p+1}, \cdots, l_N$ zerlegt. Nunmehr können wir mit ρ_2 eine Re-

duktion in bezug auf das System aller l nach demselben Prinzip wie oben vornehmen. Wenn nun die reduzierte ρ_2 nicht vollständig innerhalb der ersten Kreuzhaube verläuft, so verläuft sie entweder von ρ_1 ganz getrennt und kann deswegen nach Früherem nicht homotop ρ_1 sein, oder sie entsendet gewisse Bögen durch die Kreuzhaube. Das ist jedoch nur in der Weise möglich, daß sie gleichzeitig Bögen durch mindestens ein α-Element entsendet. Auf Grund dieses Umstandes entsteht in der Abwickelung wieder mit Notwendigkeit eine fundamentale Schnittreihe mit den von den l herrührenden Q-Bögen. Es kann daher nicht Homotopie mit ρ_1 vorliegen, da letztere Linie doch in der Abwicklung sicher keine fundamentale Schnittreihe eingeht. Man möge in diesem Zusammenhang beachten, daß ein durch eine Kreuzhaube gehender Bogen in der Abwicklung zwei Q-Bögen miteinander verbindet, welche dieselben Endpunkte haben.

Wenn nun nach dem Vorstehenden die Homotopie von ρ_1 mit der reduzierten ρ_2 nur vorliegen kann, wenn die letztere Kurve ganz innerhalb der letzten Kreuzhaube verläuft, so ist andererseits dies ein elementarer Sachverhalt, daß dann, sofern auch ρ_2 einufrig ist, in der Tat Homotopie vorliegt. Eine Folge unserer Demonstrationsweise ist nun wieder der Satz, daß auf einer einseitigen geschlossenen Raumform die Homotopie zweier Rückkehrlinien stets ihre Isotopie einschließt.

Ist ρ_1 eine zweiufrige Rückkehrlinie und folglich auch ρ_2, sofern sie homotop ρ_1 sein soll, eine zweiufrige Rückkehrlinie in der betreffenden geschlossenen einseitigen Raumform, so kann es sein, daß ρ_1 eine Kreuzhaube abschneidet. Dann verwenden wir dasselbe Fundamentalliniensystem wie vorher, indem wir ρ_1 als Linie l_1 verwenden und finden durch eine der vorherigen ganz analoge Betrachtung, daß zur Homotopie notwendig und hinreichend ist, daß die reduzierte ρ_2 unmittelbar »parallel« neben ρ_1 verlaufen muß, nämlich mit ρ_1 eine $(A, 0, 2)$ vollständig begrenzend.

Ist schließlich ρ_1 irgendein anderer zweiufriger Rückkehrschnitt, so kann er unmittelbar als Fundamentallinie an einem Fundamentalliniensystem teilnehmen, das eine Zerlegung der Raumform, wie vorhin betrachtet, bewirkt; und unser Reduktionsverfahren liefert wieder das Resultat: Die reduzierte ρ_2 muß mit ρ_1 eine $(A, 0, 2)$ vollständig begrenzen, wenn ρ_2 homotop ρ_1 sein soll. Die Homotopie hat daher zur Folge die Isotopie.

Die Übertragung unserer Beweismethodik auf offene Raumformen endlicher wie unendlichhoher Zusammenhangsordnung begegnet offenbar keinen Schwierigkeiten, so daß sich auch für diese und damit ganz allgemein der **Satz** ergibt: Sind zwei Rückkehrlinien in irgendeiner zweidimensionalen Mannigfaltigkeit homotop, so sind sie auch isotop. Dabei sind auch die niederen Mannigfaltigkeiten nicht ausgeschlossen.

71. Wir kehren jetzt zurück zu dem Satz der Nr. 58, wonach eine topologisch gegebene α-Zerlegung einer Raumform geodätisch normiert wieder eine α-Zerlegung liefert, und zwar, wie wir feststellten, eine äquivalente bzw. bei Raumformen unendlichhoher Zusammenhangsordnung mit Grenzhalbebenen eine semiäquivalente. Wir sind jetzt in der Lage, die naheliegende Vermutung

zu begründen, daß die **normierte α-Zerlegung** mit der topologisch gegebenen Zerlegung in allen Fällen **isotop** ist. Dabei kann auch die α-Zerlegung durch Hinzunahme hyperbolischer Öffnungsschnitte noch zu einer α'-Zerlegung erweitert sein.

Zum Beweise wollen wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf eine geschlossene zweiseitige Raumform einstellen. Wir nehmen eine erste Fundamentallinie unserer topologischen Zerlegung. Nach gegebener Entwickelung ist diese mit ihrer normierten Fundamentallinie isotop. Es gibt also eine Deformation der Linie, welche sie isotop in ihre normierte Linie überführt. Die Ausführung denken wir uns in der Weise, wie oben angedeutet, d. h. wir reduzieren die gegebene Linie bezüglich der normierten α-Zerlegung; ein Prozeß, bei dem wir offenbar die übrigen topologischen Linien so mit verschieben können, daß der Reduktionsvorgang für die erste Linie den Charakter des ganzen Systems als einer topologischen α-Zerlegung bestehen läßt. Nachdem die erste Linie an ihren Platz gebracht ist, betrachten wir die jetzt gewonnene zweite topologische Fundamentallinie. Führen wir mit ihr jetzt die analoge Operation durch, so ist klar, weil die zweite Linie die erste normierte ja offenbar nicht trifft, daß der Reduktions- und Überführungsvorgang für die zweite Linie das bezüglich der jetzt festbleibenden ersten Linie gewonnene Resultat in keiner Weise wieder aufhebt. Offenbar ist dieses Verfahren bis zum Ende durchführbar, womit der Satz bewiesen ist.

Haben wir eine einseitige geschlossene Raumform und eine topologische α-Zerlegung derselben, so wählen wir zweckmäßig nicht das normierte System als Reduktionsbasis, vielmehr dasjenige Liniensystem, welches wir aus dem normierten System erhalten, indem wir die einzelne einufrige normierte Linie in eine Kreuzhaube einbetten. Zu den normierten zweiufrigen Linien nehmen wir nun die Begrenzungslinien der Kreuzhauben hinzu. Das so gewonnene Liniensystem benutzen wir als Reduktionsbasis entsprechend dem früheren analogen Vorgang.

Wir können irgendeine einzelne Fundamentallinie der gegebenen topologischen α-Zerlegung einer Reduktion wie oben unterwerfen und schließlich in ihre Normierte im Sinne der Isotopie überführen, wobei die anderen unnormierten Linien gleichzeitig einer isotopen Mitführung zu unterwerfen sind. Sodann nehmen wir die zweite Linie usw. Das Verfahren bietet offenbar auch keine Schwierigkeiten.

Auch die Fälle der offenen Raumformen sogar unendlichhoher Zusammenhangsordnung sind unserer Methode ohne weiteres zugänglich. Die einzelnen Fundamentallinien der gegebenen topologischen Zerlegung werden sukzessive in ihre Normierten übergeführt, und offenbar kann man das Verfahren so einrichten, daß immer größere Teile der Raumform ungestört bleiben, so daß sich der in inf. angewandte Prozeß in immer entfernteren Teilen der Raumform vollzieht. Damit ist zugleich ein sinngemäßer Begriff der Isotopie für unendliche Systeme von Fundamentallinien unmittelbar gegeben.

Wir hatten oben noch hinzugefügt, daß bei Auffassung der Fundamentallinien als gerichteter Kurven auch die normierten Kurven eine durch

die Homotopie eindeutig bestimmte Richtung erhalten. Auf Grund dieses Umstandes ist nun aber auch klar, daß bei der von uns vorgenommenen isotopen Überführung selbstverständlich jede gerichtete topologische Linie in die nach der Homotopie ihr eindeutig entsprechende gerichtete normierte Linie übergeführt wird.

Man wolle in diesem Zusammenhang bemerken, daß nur für Nulllinien, die wir ja von der Betrachtung ausgeschlossen haben, eine Ausnahme eintritt insofern, als diese Linien auf einseitigen Raumformen amphidrom sind, d. h.: man kann sie durch isotope Veränderung in ihren Ausgangszustand zurückführen unter Veränderung des Durchlaufungssinnes.

72. Wir lenken jetzt unsere Betrachtung noch auf die **Konfigurationsnetze** und wollen auch für diese beweisen, daß sie ihren entsprechenden gegebenen topologischen Polygonen bzw. Polygonanordnungen **isotop** sind.

Wir gehen aus von einer topologischen Rückkehrschnittkette K einer zweiseitigen Raumform. Zu dieser gehört die normierte Kette $\varkappa$. Wir wählen aus K eins der Teilsysteme gleicher Parität. Es sei K' dieses System, K'' das andere. Entsprechend haben wir $\varkappa'$ und $\varkappa''$. Nun ist es nach dem bereits Bewiesenen möglich, das System K' in das System $\varkappa'$ isotop überzuführen. Bei dieser Überführung können wir offenbar K'' isotop mitführen. Im Endresultat dieser Überführung ist dann K'' in ein System $\varkappa_{\text{I}}''$ übergegangen, das zusammen mit $\varkappa'$ eine mit K isotope Rückkehrschnittkette bildet. Es handelt sich nun weiter darum, $\varkappa_{\text{I}}''$ in $\varkappa''$ isotop überzuführen unter Festlassung des Systems $\varkappa'$. Das System $\varkappa'$ zerlegt die Raumform in zwei $(p+1)$-fach zusammenhängende schlichtartige Teile, τ_{I} und τ_2. Jede Rückkehrlinie von $\varkappa''$ wie von $\varkappa_{\text{I}}''$ wird durch $\varkappa'$ in zwei Bögen zerlegt, von denen der eine τ_{I}, der andere τ_2 angehört. Wir bemerken, daß die beiden τ_{I} angehörenden Bögen, die ja für τ_{I} Querbögen sind, als solche homotop sein müssen, und daß das entsprechende für die beiden τ_2 angehörenden Bögen gilt. Zu den beiden geschlossenen Linien muß nämlich, weil sie homotop sind, dieselbe charakteristische Linie in bezug auf die Zerlegung $(\tau_{\text{I}}, \tau_2)$ der Raumform gehören. Die charakteristische Linie liefert aber als Querbögen Bögen, die den vorliegenden sicher innerhalb τ_{I} bzw. τ_2 homotop sind im Sinne der Querschnitthomotopie. Damit ist zunächst klar, daß das Bogensystem in τ_{I}, das von dem System $\varkappa''$ herrührt, mit demjenigen Bogensystem, das $\varkappa_{\text{I}}''$ durch τ_{I} sendet, in der Beziehung steht, daß je zwei entsprechende Bögen in τ_{I} querschnitthomotop sind. Die gleiche Bemerkung gilt für die Bögensysteme, die τ_2 angehören.

Wir führen nun, indem wir eine Sonderüberlegung vorerst überspringen, den Grundgedanken des Beweises durch. Das in τ_{I} enthaltene Bogensystem von $\varkappa_{\text{I}}''$ läßt sich wegen der erwähnten Querschnitthomotopie in τ_{I} so deformieren, daß es in das von $\varkappa''$ stammende Bogensystem in τ_{I} übergeht. Bei dieser Bewegung führen die Endpunkte der Bögen gewisse Bewegungen auf den Randlinien von τ_{I} aus, und wir müssen die in τ_2 enthaltenen Ergänzungsbögen einer entsprechenden Mitführung unterwerfen, durch welche die Geschlossenheit der Linien des Systems $\varkappa_{\text{I}}''$ gewahrt bleibt. Diese Mitführungsbewegung hat sich natürlich ganz in τ_2 zu vollziehen. Nunmehr denken wir

uns in τ_2 die analoge Operation durchgeführt, wobei wir der Mitführungsbedingung in τ_1 nun in der Weise genügen, daß wir nur die äußersten Enden der in τ_1 bereits gewonnenen Bögen der Mitführung anpassen, indem wir sie auf einen, die betreffende Randlinie säumenden schmalen zweifach zusammenhängenden Streifen beschränken. So entsteht ein Endresultat, durch welches das Liniensystem $\varkappa_1''$ in das Liniensystem $\varkappa''$ übergeführt erscheint, jedoch mit einer noch fraglich gebliebenen möglicherweise eingetretenen Modifikation. Es sind nämlich zwischen die die einzelnen geschlossenen Linien von $\varkappa''$ ausmachenden beiden Bögen verbindende Umlaufbögen möglicherweise eingeschaltet. Aber diese Umlaufbögen können in Wahrheit keine Umlaufungen liefern. Denn wenn sie solche liefern würden, wären die so modifizierten geschlossenen Linien eben wegen der hinzukommenden Umlaufszahlen mit den unmittelbar geschlossenen Geodätischen nicht mehr homotop. Damit ist aber die volle Überführbarkeit dargetan.

Die Frage, die noch zu beantworten bleibt, ist die folgende: Sind zwei Querschnitte in τ_1, die einander homotop sind, auch einander isotop? Diese Frage wollen wir gleich allgemeiner erledigen. Wir denken uns nämlich irgendeine offene topologische Fläche (A, p, q) oder (B, p, q) gegeben, die jedoch endliche Zusammenhangsordnung habe. Die Fläche denken wir uns von q Randlinien begrenzt. Wir wollen zeigen, daß zwei in der Mannigfaltigkeit gezogene **homotope Querschnitte auch isotop** sind. Hierbei wird natürlich für die Isotopie ebenso wie für die Homotopie die Beweglichkeit der Endpunkte der Querschnitte auf den Randlinien zugelassen. Nullquerschnitte, nämlich Querschnitte, die homotop einem Randstück sind, lassen wir als trivial außer Betracht.

Zur Beweisführung denken wir uns zunächst ein fundamentales Querschnittsystem gebildet in folgender Weise: Wir schneiden die Mannigfaltigkeit längs $2p+q-1$ bzw. $p+q-1$ getrennten Querschnitten zu einer einfach zusammenhängenden Fläche auf. Denken wir uns diese schlicht ausgebreitet, so weist das entstehende Polygon eine gerade Anzahl von Seiten auf, die abwechselnd als Querschnittseiten bzw. Randseiten bezeichnet werden können, entsprechend ihrer Provenienz. Nun sehen wir, daß wir das schlichte Polygon durch Diagonalen von Randseite zu Randseite in lauter Sechsecke zerlegen können, wie dies Fig. 72a für ein Achteck und Fig. 72b für ein Zehneck andeutet. Das besagt, daß wir die Mannigfaltigkeit durch lauter getrennte Querschnitte in eine Anzahl von Sechsecken zerlegen können, deren einzelnes einfach zusammenhängend ist und begrenzt wird durch einen Zyklus von Seiten, die abwechselnd Randseiten und Querschnittseiten sind.

Fig. 72a.

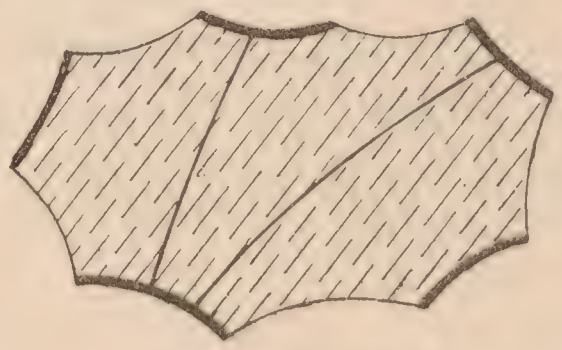


Fig. 72b.

Wird nun ein beliebiger Querschnitt gezogen, so möge dieser unser Fundamentalsystem der Querschnitte durchkreuzen. Wir können ihn reduzieren, indem wir Bögen, die homotop einem Stück eines Fundamentalquerschnittes sind, wegdeformieren. Ist diese Reduktion beendet, so können wir weiter

die Endbögen, welche längs eines Randes der Mannigfaltigkeit sogar in wiederholten Umläufen hingleiten können, in der Weise reduzieren, daß jeder Endbogen von einem Querschnitt ausgehend unmittelbar in der gegenüberliegenden Randseite desjenigen Sechseckes landet, in welches er eintritt, d. h. unser Endbogen schneidet nicht erst noch eine Anzahl weiterer Querschnitte, die von dem betreffenden Rande ausgehen. Wir sehen, daß jeder Querschnitt einem reduzierten Querschnitt homotop, sogar isotop ist. Der individuelle Typus des reduzierten Querschnitts ist nun bezeichnet durch die Folge der überschrittenen Fundamentalquerschnitte in einer Weise, wie wir das früher schon in Nr. 64 kennengelernt haben. Nunmehr hat man zu bemerken, daß reduzierte Querschnitte dann und nur dann homotop sein können, wenn sie dieselbe Querschnittfolge überkreuzter Fundamentalquerschnitte liefern. Das sieht man in der Abwicklung, wo die Randlinien als Randgewinde sich abwickeln und in der Ebene die begrenzenden Q-Bögen des Abwicklungsgebietes ergeben. Dieses Abwicklungsgebiet ist einfach zusammenhängend, und die einzelnen Bilder der Fundamentalquerschnitte haben jeder die Eigenschaft, den ganzen Abwicklungsbereich in zwei getrennte Teile zu zerlegen. Will man nun irgend zwei verschiedene Q-Linien miteinander verbinden durch eine Linie, die als Bild einer reduzierten Linie gelten kann, so wird diese Linie gerade diejenigen Fundamentalquerschnitte der Abwicklung treffen, die die beiden Q-Bögen voneinander trennen. Diese Bemerkung dürfte genügen, um unseren Satz zu begründen. Wir bewegen uns hier in Betrachtungen, die uns mehr oder weniger schon geläufig geworden sind (vgl. Fig. 62 S. 436).

Der gewonnene Satz kann nun erweitert werden auf ein ganzes Querschnittsystem, das etwa eine **Sechseckzerlegung,** wie oben betrachtet, bewirkt. Ist eine zweite solche Zerlegung gegeben, deren Querschnitte denen der ersten eineindeutig im Sinne der Homotopie entsprechen, so kann die zweite Zerlegung in die erste isotop übergeführt werden. Man wird dabei etwa die erste Zerlegung als Fundamentalsystem benutzen und ganz ähnlich verfahren, wie wir früher bei der isotopen Überführung einer topologischen α-Zerlegung in die normierte α-Zerlegung verfahren haben.

Wir überlassen dem Leser, auch für die übrigen, von uns in Nr. 68 behandelten Konfigurationspolygone sich nach dem Muster der vorgetragenen Entwicklung von der Richtigkeit des Satzes zu überzeugen, daß auch hier isotope Ersetzung der topologischen Aufschneidung durch eine normierte stets vorliegt.

Anmerkung A. Auf Grund unserer hier in XV zur Isotopiefrage gegebenen Entwicklungen wird es keine prinzipielle Schwierigkeit bereiten, den Tietzeschen Deformationssatz, den R. Baer auf Grund seiner die Isotopie betreffenden Resultate unter Bezugnahme auf gewisse Ergebnisse von J. Nielsen auf zweiseitige geschlossene Flächen ausdehnen konnte (l. c.), nunmehr auch auf einseitige geschlossene Flächen sowie auf offene Flächen auszudehnen.

Anmerkung B. In der dritten Mitteilung habe ich einige topologische Sätze speziellerer Natur im Zusammenhange gewonnen. Ich hebe besonders die Sätze betreffend die Rückkehrschnitte einer zweiblättrigen hyperelliptischen Riemannschen Fläche mit sechs Windungspunkten ($p = 2$) hervor (S. 398 in 3. Mitt.). Alle diese Sätze lassen sich, wie zu erwarten, durch zweckmäßige Verwendung der von uns hier benutzten topologischen Prinzipien durch elementare,

wenn auch nicht durchaus kurze Diskussionen beweisen; insbesondere die die hyperelliptische Fläche betreffenden Sätze, indem man ein passendes räumliches Modell, bestehend aus zwei $(A, 1, 1)$, an Stelle der RIEMANNschen Fläche treten läßt, das entsprechend der Blättervertauschung der letzteren seinerseits eine 180°-Drehung um eine räumliche Achse zuläßt. Damit ergibt sich u. a. auch ein elementarer Beweis des Satzes, daß das Fundamentalsextupel der $(A, 2, 0)$ eindeutig bestimmt ist, was ich l. c. unter wesentlicher Heranziehung funktionentheoretischer Schlußweisen dargetan habe.

Anmerkung C. Denkt man sich den »Innenteil« einer Raumform endlicher Charakteristik c mit lauter hyperbolischen Öffnungen durch getrennte Querschnitte von Randlinie zu Randlinie, wie oben S. 456, in lauter Sechsecke zerlegt und diese Zerlegung zu den Randlinien orthogonal geodätisch normiert, so erhält man eine geodätische Sechseckzerlegung des Innenteils, die auch für den direkten Aufbau geeignet ist. Dabei sind nur die $3c$ Längen der geodätischen Querschnitte und zwar frei vorzugeben. Hat die Raumform lauter parabolische Öffnungen, so ergibt sich als Analogon eine Zerlegung in lauter Spitzendreiecke. Beim Aufbau sind nunmehr $3c$ reelle Kompositionsinvarianten vorzugeben, die nur durch q unabhängige, den parabolischen Öffnungszykeln entsprechende homogene lineare Relationen mit ganzzahligen Koeffizienten verbunden sind.

Berichtigungsanmerkungen.

S. 393 Zeile 10 von unten lies: dem »bei ungradem p jedenfalls« unvermeidlichen Vorkommen der einufrigen Rückkehrschnitte bei der Zerlegung.

S. 422 Mitte lies: Die Linie f, topologisch im Sinne der Homotopie als nichtzerfällender »die Raumform zweiseitig machender« Querschnitt eindeutig bestimmt, die beiden Windungspunkte (Fundamentalpunkte) und der Rückkehrschnitt R_1 (s. Fig. 51 d, 6), der topologisch der einzig mögliche, die Raumform zweiseitig machende Rückkehrschnitt ist, bilden zusammen »mit dem Öffnungsschnitt o« die Fundamentalfigur.

Über die Arbeitsleistung der Schultergelenkmuskeln.

Von R. Fick.

(Vorgetragen am 25. April 1929 [s. oben S. 224].)

Hierzu Taf. I—X.

Wie ich in meiner vorigen Abhandlung (s. diese Sitzungsber. 1928) bereits erwähnte, stellt vorliegende Arbeit eine Ergänzung dar zu der außerordentlich gründlichen Arbeit über die Schulterbewegungen und die Wirkung der Schultermuskeln, die Shiino unter meiner Leitung in Innsbruck ausführte. Auch die Messungen, die der vorliegenden Arbeit zugrunde liegen, stammen noch aus meiner Innsbrucker Zeit und wurden gemeinsam mit meinem damaligen Assistenten Hrn. Dr. Otto P. Meier durchgeführt, dem ich auch hier nochmals für seine ausdauernde Hilfe bei den zahllosen ermüdenden Messungen danke.

Die Messungsart war die gleiche wie ich sie schon mit Hrn. Roschdestwenski[1] bei den Hüftmuskeln und mit Hrn. Shiino[2] bei den Schultergelenkmuskeln angewendet habe. Sie besteht darin, daß zuerst die Bewegungen des Gelenkes bei unversehrter Haut und Muskeln mittels eines Halbkreisrahmengestelles (s. Bild 1 S. 459) genau untersucht werden. Dann werden die Hauptzugrichtungen der einzelnen Muskeln nacheinander durch Fäden ersetzt, und es wird nun die Verkürzung oder Dehnung bestimmt, die der betreffende Muskel erfährt, wenn der Arm die vorher am ganzen Präparat als ausführbar erkannten und aufgezeichneten Gelenkbewegungen in dem Gestell wiederholt.

Wie in meinen früheren Arbeiten eingehend auseinandergesetzt, zeigen sich bei den größten Erhebungen, den »Grenzerhebungen« der Glieder in den Kugelgelenken, immer gewisse zwangsmäßige Kreiselungen der Glieder um ihre Längsachse, die ich als »Grenzkreiselungen« bezeichnet habe. Wenn

[1] J. Roschdestwenski und R. Fick, Über die Bewegungen im Hüftgelenk und die Arbeitsleistung der Hüftmuskeln. In: His' Archiv f. Anat. u. Entwicklungsgesch. 1913.

[2] K. Shiino, Über die Bewegung im Schultergelenk und die Arbeitsleistung der Schultermuskeln. Ebenda. 1913.

man diese Kreiselungen ausschließt, kann das Glied nicht so hoch erhoben werden. Wir bestimmten nun, wie in der vorigen Abhandlung mitgeteilt ist, zuerst, wie hoch der Arm auf jedem 10. Längskreis des Gestelles mit der Zwangskreiselung gehoben werden konnte und dann, wie hoch eine »reine« Erhebung ohne Kreiselung auf dem betreffenden Längskreis ausgeführt werden kann (s. Tafel I).

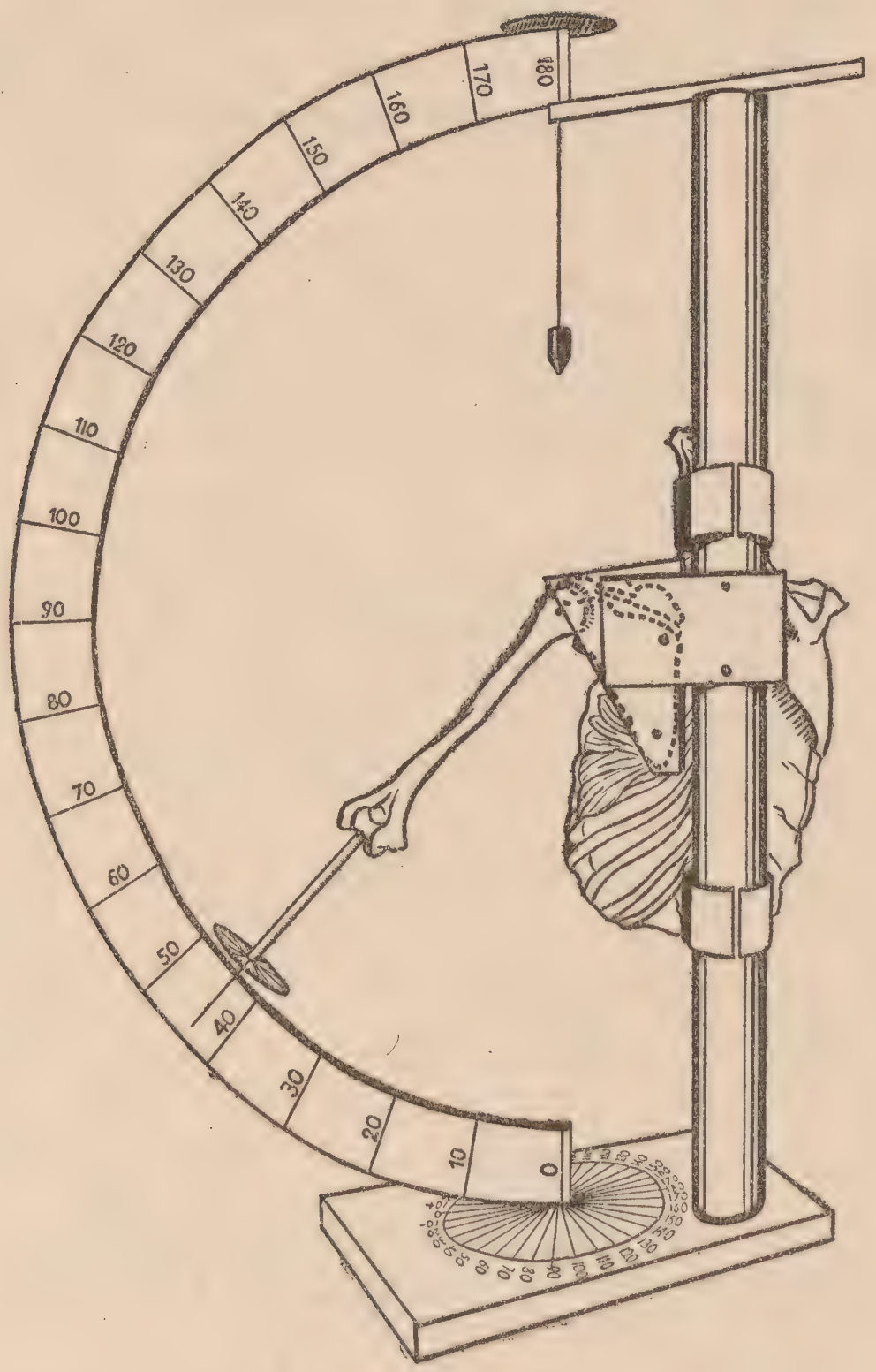


Bild 1. Präparat im Meßrahmengestell; linke Körperseite.

Auch bei der Muskeluntersuchung bestimmten wir zuerst die Verkürzung oder Dehnung der Muskeln bei der äußersten Hebung, also mit der Zwangskreiselung, dann aber auch bei der »reinen« Hebung ohne Kreiselung. Auf diese letztere Bestimmung kam es mir vor allem an, weil ihre Kenntnis mir »für den praktischen Gebrauch« doch besonders wünschenswert scheint und sie bisher noch nicht vorgenommen wurde.

Ösenbefestigung zur Verkürzungsmessung.

Zwecks Ermöglichung der Vergleichung unserer Befunde mit denen an anderen Präparaten lasse ich hier noch genaue Angaben über die Stellen, an denen wir die Ursprungs- und Ansatzöse für den Faden, der die Muskelzugrichtung wiedergibt, anbrachten, folgen.

	Faden-Ursprungsöse	Faden-Ansatzbefestigung
Biceps		
cpt. breve	Spitze des Schulterhakens	Ansatzsehne
» longum	an Ursprungssehne	an Ansatzsehne
Coracobrachialis	Spitze des Schulterhakens	Mitte der Crista medialis
Deltoides		
p. clavicularis	etwa 2.5 cm vom Schlüsselbeinende	Mitte der Tuberositas deltoidea
p. acromialis	Mitte des Acromion	
p. spinalis	mitten zwischen den beiden durch die Gräte gehenden Befestigungsschrauben, s. Bild 1.	
Infraspinatus		
p. superior	Rand d. Spina 2 cm v. med. Rand, unter der medialen Schraube, 2 cm lateral vom Deltoid. spinal.-Ursprung	Sehne am mittleren Feld des Tuberculum majus
p. media	Mitte des medialen Scapularandes	
p. inferior	daumenbreit über der Spitze, nahe am med. Rand	
Latissimus dorsi		
p. superior	dicht unter der Befestigungsschraube der Schulterblattspitze	6 cm unter d. Tub. minus
p. inferior	Daumenbreit unter und lateral v. d. Schulterblattspitze in 7. Rippe, Ösenloch etwa 2 cm v. d. Rippe entfernt	1 cm unter Tub. min. in Crista tuberculi minoris
Pectoralis major		
p. clavicularis	Mitte der medialen Hälfte d. Clavicula	Unt. Ende d. Crista tub. maj. 2 Fingerbreit oberhalb des Deltaansatzes
p. sternocostalis	Mitte des Brustbeines	Crista tuberc. majoris (Mitte)
p. abdominalis	auf der 6. Rippe	» » » 4 cm vom Tub. maj. entfernt
Subscapularis		
p. superior	med. Rand 1 cm oberhalb Spinawurzel	Tuberculum minus
p. media	med. Rand 1 cm unterhalb der mittleren Infraspinatus-Öse	
p. inferior	med. Rand 1 cm unterhalb der unteren Infraspin.-Öse	
p. lateralis	mitten zwischen Teres minor und Triceps im lateral. Schulterblattrand	medial neben dem ob. Latissim.-Ansatz, medial u. noch hinter d. Crista tub. minor.
Supraspinatus	Mitte des hinteren Randes der Obergrätengrube	Sehne
Teres major	wie oberer Latissimusteil	mitten zwischen beiden Latissim.-Ansatzösen
Teres minor	Schulterblattrand 2 Finger breit unter dem Gelenk	tief am unteren Feld des Tuberc. majus
Triceps cpt. long.	etwas unter d. Tub. infraglenoidalis	Sehne

Die Längsgrade des Kugelgradnetzes und die auf den verschiedenen Längsgraden der »Bewegungskugel« gefundenen Verkürzungs- und Dehnungswerte haben wir auf Millimeterpapier übertragen (s. Tafel II—VIII). In der Waagrechten (Abszisse) sind die Längengrade (in die Papierebene ausgebreitet) abzulesen, in der senkrechten Richtung (Ordinaten) sind die Verkürzungen und Verlängerungen eingetragen. Die Nullinie entspricht der Länge des

Muskels in der Grundstellung, wenn der Arm am Körper herabhängt. Nach oben von der Nullinie sind die Verkürzungen verzeichnet, die der Muskel bei der Erhebung des Armes auf dem betreffenden Längskreis erfährt, nach unten von der Nullinie die Verlängerung oder Dehnung, falls bei der Erhebung auf dem betreffenden Längskreis eine solche stattfindet. Auf der linken Seite der Tafeln sind die Längsgrade auf der Hinterseite der Bewegungskugel verzeichnet, in der Mitte die seitlichen und vorderen, rechts die medial liegenden Längskreise.

Aus dem Verlauf dieser Verkürzungs- bzw. Verlängerungslinien der einzelnen Muskeln können wir schon eine ganze Anzahl wichtiger Schlüsse auf die Leistungen der Muskeln ziehen:

1. sehen wir z. B. sofort, bei welchen Bewegungen auf der Bewegungskugel der betr. Muskel sich bei der Hebung des Gliedes von der Grundstellung aus verkürzt, bei welchen Hebungen er sich verlängert. Auf den »Kugelfeldern« der Millimetertafeln, wo die Muskellinie über der Nullinie liegt, verkürzt sich eben der Muskel bei der Erhebung von der Grundstellung aus, auf den Feldern, wo die Muskellinie unter der Nullinie läuft, dehnt sich der betr. Muskel bei der Erhebung des Armes aus der Grundstellung;

2. sehen wir aus der Linie, ob die Grundstellung eine »Mittelstellung« (wie z. B. beim Haken-Armmuskel, s. Tafel II 3) für den betr. Muskel ist; dann teilt die Nullinie die Verkürzungslinie in zwei gleiche Hälften, eine über, eine unter ihr. Läuft die Linie fast nur über der Nullinie, so ist in der Grundstellung der betr. Muskel nahe seiner Dehnungsgrenze (z. B. der Untergrätenmuskel [m. infraspinatus, s. Tafel IV 1—2]). Läuft die Leistungslinie aber fast ganz unter der Nullinie, dann ist der Muskel in der Grundstellung in seiner Wirkung schon erschöpft; so ist es beim breitesten Rückenmuskel (Latissimus dorsi), s. Tafel IV 4 u. V 1;

3. zeigt uns das Ansteigen der Linie sofort das Gebiet an, auf dem der Muskel Arbeit leisten kann;

4. der Gipfel der Linie ist natürlich die Stelle der Bewegungsbahn, an der der Muskel bei der Hebung von der Grundstellung aus die höchste Arbeit leisten kann;

5. die Verbindungslinie des tiefsten und des höchsten Punktes der Linie zeigt uns an, bei Beschreibung welcher Erhebungsbahn auf der Bewegungskugel der Muskel die meiste Arbeit leisten kann;

6. wenn man die Verkürzungslinien von mehreren Muskeln oder Muskelteilen auf demselben Netz aufzeichnet, erkennt man an dem Verlauf der Linien sofort, ob die beiden Muskeln Genossen (Synergeten, Socii) sind oder aber Gegenwirker (Antagonisten); das erstere ist der Fall, solange die Linien einander gleich laufen, das letztere, sowie sie gegeneinander laufen oder sich schneiden, s. Tafel III Bild 3.

Außerdem suchten wir bei jedem Muskel unabhängig von der Untersuchung der Höchsterhebungen auch die Stellung des Armes auf, bei der der betr. Muskel überhaupt am verkürztesten, und diejenige Stellung, bei der er überhaupt am gedehntesten ist. Bei einer Reihe von Muskeln

zeigte es sich allerdings, daß diese Stellung mit einer der von uns in der vorigen Arbeit gefundenen »Grenzhebungen« zusammenfiel. Bei anderen Muskeln wurde aber z. B. die größte Verkürzung dann erreicht, wenn man den Arm in eine mittlere Hebungstellung brachte, aber sehr stark kreiselte, bei den einen z. B. pronierte, bei den anderen z. B. supinierte.

Die größten Verkürzungen bzw. Verlängerungen zeigt folgende Zahlentafel:

Größte Verkürzung und Verlängerung aus der Grundstellung.

Muskelname	Größte Verkürzung				Größte Verlängerung				Unterschied
	Stellung				Stellung				
	Längskreis	Breitekreis	wahre Kreiselung	Verkürzung in cm	Längskreis	Breitekreis	wahre Kreiselung	Dehnung in cm	in cm
Biceps cpt. longum	M +40	P +94	30° Pr.	3.5	M −100	P 42	30° Sup.	0.9	4.4
Biceps cpt. breve	M +70	P 91	25° Pr.	3.9	M −80	P 60	25° Sup.	3.1	7.0
Coracobrachialis	M +80	P +80	25° Pr.	3.5	M −60	P 73	25° Sup.	3.7	7.2
Deltoides p. clavicularis	M +70	P 91	20° Pr.	5.9	M −90	P 50	—	2.4	8.3
Deltoides p. acromialis	M −40	P 92	10° Sup.	4.4	M +90	P 59	—	2.7	7.1
Deltoides p. spinalis	M −120	P 37	15° Sup.	2.9	M +80	P 80	—	7.6	10.5
Infraspinatus p. superior	M −40	P 24	100° Sup.	4.2	M −70	P 35	45° Pr.	1.5	5.7
Infraspinatus p. media	M −50	P 55	100° Sup.	4.3	M −60	P 50	55° Pr.	2.0	6.3
Infraspinatus p. inferior	M −20	P 94	100° Sup.	4.4	M +60	P 30	80° Pr.	2.0	6.4
Latissimus p. superior	M −130	P 31	15° Pr.	2.6	M +20	P 101	45° Sup.	11.0	13.6
Latissimus p. inferior	M 0	P 30	70° Pr.	2.0	M 0	P 95	50° Sup.	6.0	8.0
Pectoralis major p. clavicularis	M +90	P 73	35° Pr.	7.9	M −70	P 69	60° Sup.	4.5	12.4
Pectoralis major p. sternocost.	M +90	P 59	60° Pr.	2.7	M −70	P 61	90° Sup.	5.9	8.6
Pectoralis major p. abdominalis	M 0	P 20	55° Pr.	0.6	M −20	P 98	65° Sup.	6.2	8.1
Subscapularis p. superior	M +80	P 80	25° Pr.	1.5	M −70	P 69	60° Sup.	2.6	4.1
Subscapularis p. media	M +40	P 94	40° Pr.	2.0	M −30	P 89	95° Sup.	2.4	4.4
Subscapularis p. inferior	M −90	P 51	25° Pr.	2.2	M +90	P 60	30° Sup.	2.5	4.7
Subscapularis p. lateralis	M −130	P 29	25° Pr.	1.1	M −20	P 94	100° Sup.	5.0	6.1
Supraspinatus	M −40	P 88	75° Sup.	4.7	M +180	P 20	30° Pr.	1.1	5.8
Teres major	M −130	P 28	25° Pr.	2.5	M +20	P 105	60° Sup.	8.3	10.8
Teres minor	M −130	P 20	50° Sup.	0.9	M +10	P 55	65° Pr.	2.4	3.3
Triceps cpt. longum	M −130	P 31	15° Sup.	0.6	M +40	P 103	25° Sup.	6.2	6.8

Größtverkürzungen der Schultermuskeln.

Es scheint mir für die Fragen der praktischen Medizin ganz belangreich, die Muskeln bzw. Muskelteile nach der Größe ihrer Gesamtverkürzbarkeit anzuordnen.

Man erhält dann folgende Reihe:

1. Teres minor . . . . . 3.3 cm
2. Subscapularis superior . . . . . 4.1 »
3. Biceps caput longum . . . . . 4.4 »
4. Subscapularis medius . . . . . 4.4 »
5. Subscapularis inferior . . . . . 4.7 »
6. Infraspinatus superior . . . . . 5.7 »
7. Supraspinatus . . . . . 5.8 »
8. Subscapularis lateralis . . . . . 6.1 »

9.	Infraspinatus medius	6.3 cm
10.	Infraspinatus inferior	6.4 »
11.	Triceps caput longum	6.8 »
12.	Biceps caput breve	7.0 »
13.	Deltoides p. acromialis	7.1 »
14.	Coracobrachialis	7.2 »
15.	Latissimus pars inferior	8.0 »
16.	Pectoralis major p. abdominalis	8.1 »
17.	Deltoides p. clavicularis	8.3 »
18.	Pectoralis p. sternocostalis	8.6 »
19.	Deltoides p. spinalis	10.5 »
20.	Teres major	10.8 »
21.	Pectoralis p. clavicularis	12.4 »
22.	Latissimus dorsi p. inferior	13.6 »

Berechnung der größten Arbeitsleistung.

Aus den in vorstehender Zahlentafel verzeichneten Verkürzungswerten läßt sich, wie aus meinen früheren Arbeiten (s. R. Fick, Handbuch II. Bd. S. 308f.) hervorgeht, leicht für jeden Muskelteil seine Größtleistung in Kilogrammmetern berechnen, wenn wir die (früher von uns bestimmten) Querschnittmaße zu Hilfe nehmen. Wir verwendeten zur Arbeitsberechnung die seinerzeit mit Shiino bestimmten Mittelwerte der Querschnitte (s. Shiino a. a. O. S. 73).

Hat man die Verkürzungsgröße und den Querschnitt festgestellt, so braucht man für die Arbeitsberechnung nur noch die »mittlere Spannung« des Muskelquerschnitts zu kennen, die bei der größtmöglichen Verkürzung aus der gedehntesten Stellung in Frage kommt.

Da die »Spannungslinie«, die sog. »Verkürzungskurve« der freien Muskeln, die sie von größter Dehnung bis zur äußersten Verkürzung zeigen, ungefähr eine Gerade ist, so ist die »mittlere Spannung« des Muskels einfach das arithmetische Mittel aus der Dehnungsspannung, d. h. der Muskelkraft bei größter Dehnung und der Endspannung, die wir ohne allzu großen Fehler auf Null schätzen können.

Die Größe der Muskelkraft ist freilich keine feststehende Größe, sondern schwankt bei den verschiedenen Menschen je nach der Rasse, Veranlagung und Beruf, und beim selben Menschen schwankt sie vor allem je nach den verschiedenen Muskelgruppen: die Augen-, die Gesichts-, die Rumpf-, die Arm-, die Beinmuskeln scheinen durchaus nicht gleich kräftig zu sein, ja Bethe[1] fand Unterschiede bei demselben Muskel je nach der verschiedenen Stellung der Glieder. Vor allem aber kommt es auch, wie ich schon lange betonte, auf den Nervenzustand des Betreffenden an, ob der Mensch gut oder schlecht »aufgelegt« ist, wie der Laie sagt; bei Lust und Unlust, in der Begeisterung, in der Todesangst, im Wahnsinnsanfall ist die Kraft verschieden. Auch Ten Horn

[1] Siehe R. Fick, Übersicht über die Fragen der Gelenk- und Muskelmechanik. In: Ztschr. f. orthopäd. Chirurg. 51 Bd. S. 333f., 1929.

(s. Sauerbruch[1]) hat bei Kranken, denen Sauerbruch ein Glied abgesetzt und die Muskeln mit Zugseilen verbunden hatte, die Muskelkraft bei derselben Person an verschiedenen Tagen verschieden groß gefunden. Meiner Überzeugung nach dürfen wir aus den bisher bekannten Untersuchungen darüber annehmen, daß die Kraft des voll erregten Muskels für je 1 cm² wechselt von 5 bis 20 kg! Die Kraft des gedehnten Muskels kann man dabei wohl auf ungefähr 20 kg für je 1 cm² Querschnitt schätzen.

Ich habe vorgeschlagen, als »Muskelkrafteinheit«, ein Name der mir zweckmäßiger als der Name »absolute Muskelkraft« scheint, die Kraft, d. h. die Spannung, zu verstehen, die ein Muskel bei mittlerer Länge, aber stärkster Erregung, für je 1 cm² Querschnitt leisten kann und dafür als Wert das arithmetische Mittel aus der Anfangsspannung bei gedehnter Länge (20 kg) und der Endspannung (0 kg), also $\frac{20+0}{2} = 10$ kg, anzunehmen. Selbstverständlich muß man sich dabei stets bewußt bleiben, daß die auf Grund dieser Zahlen errechneten »Arbeitswerte« natürlich nur Annäherungswerte sind. Übrigens kommt es für die meisten Fragen der praktischen Medizin gar nicht

Größtleistung der Schultermuskeln beim Übergang aus der größten Dehnung in die größte Verkürzung

Muskelname		(1) Größte Verkürzung in m	(2) Größte Verlängerung in m	Summe beider (1+2) in m	Querschnitt in cm² × 10	Arbeitsmöglichkeit in kg/m	
Biceps brachii	cpt. longum	0.035	0.009	0.044	× 59	= 2.596	6.166
	cpt. breve	0.039	0.031	0.070	× 51	= 3.570	
Coracobrachialis		0.035	0.037	0.072	× 55	= 3.960	
Deltoides	p. clavicularis	0.059	0.024	0.083	× 67	= 5.561	26.746
	p. acromialis	0.044	0.027	0.071	× 220	= 15.620	
	p. spinalis	0.029	0.076	0.105	× 53	= 5.565	
Infraspinatus	oberer Teil	0.042	0.015	0.057	× 60	= 3.420	11.422
	mittlerer »	0.043	0.020	0.063	× 62	= 3.906	
	unterer »	0.044	0.020	0.064	× 64	= 4.096	
Latissimus dorsi	oberer Teil	0.026	0.110	0.136	× 42	= 5.712	8.912
	unterer »	0.020	0.060	0.080	× 40	= 3.200	
Pectoralis major	p. clavicularis	0.079	0.045	0.124	× 30	= 3.720	12.144
	p. sternocostalis	0.027	0.059	0.086	× 94	= 8.084	
	p. abdominalis	0.006	0.062	0.068	× 50	= 0.340	
Subscapularis	p. superior	0.015	0.026	0.041	× 50	= 2.050	8.690
	p. media	0.010	0.017	0.027	× 70	= 1.890	
	p. inferior	0.022	0.025	0.047	× 50	= 2.350	
	p. lateralis	0.010	0.050	0.060	× 40	= 2.400	
Supraspinatus		0.047	0.011	0.058	× 93	= 5.394	
Teres major		0.025	0.083	0.108	× 105	= 11.340	
Teres minor		0.009	0,024	0.133	× 40	= 1.560	
Triceps cpt. longum		0.006	0.062	0.068	× 150	= 10.200	

[1] Sauerbruch und Ten Horn, Die bewegliche künstliche Hand. II. Aufl. Springer 1929.

so wesentlich auf den absoluten Wert der Arbeitsleistung des einzelnen Muskels als auf das Verhältnis der Leistungsmöglichkeit der verschiedenen Muskeln einer Gliedmaße an.

Und jedenfalls ist die anatomische Ermittlung der einzelnen Faktoren des Arbeitswertes für jeden Muskel natürlich doch die grundlegende Vorbedingung für die Beurteilung der Muskelleistung beim Lebenden.

Die vorstehende Zahlentafel (s. S. 464) enthält die so gewonnenen Größtleistungen für die einzelnen Schultermuskeln bzw. ihre Teile.

Für die Bedürfnisse der praktischen Medizin ist es belangreich, die Muskeln nach ihrer Leistungsfähigkeit zu ordnen. Unsere Untersuchung ergibt folgende Reihe:

15.620	Deltoides acromialis	3.720	Pectoralis clavicularis
11.340	Teres major	3.570	Biceps brevis
10.200	Triceps	3.420	Infraspin. ob. Teil
8.084	Pectoralis sternocostalis	3.200	Latissimus unt. Teil
5.712	Latissimus ob. Teil	2.596	Biceps longus
5.565	Deltoides spinalis	2.400	Subscapularis lateralis
5.561	» clavicularis	2.350	» inferior
5.394	Supraspinatus	2.050	» superior
4.096	Infraspinatus unt. Teil	1.890	» medius
3.960	Coracobrachialis	1.560	Teres minor
3.906	Infraspinatus mittl. Teil	0.340	Pectoralis abdominalis

Bestimmung der Arbeitsleistung von der Grundstellung („Normalstellung") aus.

Wie ich in meiner früheren Arbeit mit Hrn. Roschdestwenski[1] näher ausgeführt habe, kann für die Muskelleistungen, die nicht aus der Stellung heraus erfolgen, wo der Muskel am gedehntesten ist (wie bei den Berechnungen der vorigen Zahlentafeln, s. S. 464 u. 465), sondern aus der Grundstellung heraus natürlich nicht dieselbe »mittlere Spannung« der Berechnung zugrunde gelegt werden, da in der Grundstellung im allgemeinen die Spannung schon nicht mehr die größtmögliche ist wie bei der »Dehnungsstellung«.

Man darf, wie ich a. a. O. gezeigt habe[2], annehmen, daß die Spannung in der Grundstellung etwa im selben Verhältnis abgenommen hat wie die Länge des Muskels, d. h. daß für den Muskel das Hookesche Gesetz gilt (s. S. 463).

Die »Grundspannung« ergibt sich also aus dem Verhältnis zwischen der »gedehntesten Länge« zur Länge in der Grundstellung, die wir kurz »Grundlänge« (Lg) nennen wollen. Wenn ein Muskel in der Grundstellung nur noch die Hälfte seiner gedehnten Länge (Ld) hat, so wird seine Spannung in der Grundstellung, seine »Grundspannung« (Sg) also auch nur die Hälfte seiner größten oder »Dehnungsspannung« (Sd) sein.

---

[1] J. Roschdestwenski und R. Fick, Über die Bewegungen im Hüftgelenk und die Arbeitsleistung der Hüftmuskeln. His' Archiv 1913.

[2] Vgl. auch A. Fick, Mechanische Arbeit und Wärmeentwicklung, Brockhaus 1882.

Man hat also:

$$\frac{\text{Grundstellungsspannung (Sg)}}{\text{Dehnungsspannung (Sd)}} = \frac{\text{Grundstellungslänge (Lg)}}{\text{Gedehnte Länge (Ld)}}$$

$$\text{oder } \frac{Sg}{Sd} = \frac{Lg}{Ld}; \quad Sg = \frac{Lg \times Sd}{Ld}.$$

Den Bruch $\frac{Lg}{Ld}$ können wir wohl am besten die »Spannungsverhältniszahl« für die Grundstellung nennen. Sie ist für die verschiedenen Muskeln natürlich sehr verschieden, wie folgende Zahlentafel zeigt:

Spannungsverhältniszahl und Spannung für die Armgrundstellung.

Muskelname	(1) Größte Verkürzung von der Grundstellung aus in cm	(2) Größte Dehnung von der Grundstellung aus in cm	Summe von (1)+(2) = gedehnte Länge in cm	Spannungs-Verhältniszahl für die Grundstellung (S-V. g.)	Spannung in der Grundstellung (Sg.) für je 1 cm² Querschnitt in kg
Biceps brachii { cpt. longum	3.5	0.9	4.4	3.5 : 4.4 = 0.8	20 × 0.8 = 16
Biceps brachii { cpt. breve	3.9	3.1	7.0	3.9 : 7.0 = 0.5	20 × 0.5 = 10
Coracobrachialis	3.5	3.7	7.2	3.5 : 7.2 = 0.5*)	20 × 0.5 = 10
Deltoides { p. clavicularis	5.9	2.4	8.3	5.9 : 8.3 = 0.7	20 × 0.7 = 14
Deltoides { p. acromialis	4.4	2.7	7.1	4.4 : 7.1 = 0.6	20 × 0.6 = 12
Deltoides { p. spinalis	2.9	7.6	10.5	2.9 : 10.5 = 0.3	20 × 0.3 = 6
Infraspinatus { p. superior	4.2	1.5	5.7	4.2 : 5.7 = 0.7	20 × 0.7 = 14
Infraspinatus { p. media	4.3	2.0	6.3	4.3 : 6.3 = 0.7	20 × 0.7 = 14
Infraspinatus { p. inferior	4.4	2.0	6.4	4.4 : 6.4 = 0.7	20 × 0.7 = 14
Latissimus dorsi { p. superior	2.6	11.0	13.6	2.6 : 13.6 = 0.2	20 × 0.2 = 4
Latissimus dorsi { p. inferior	2.0	6.0	8.0	2.0 : 8.0 = 0.25	20 × 0.25 = 5
Pectoralis major { p. clavicularis	7.9	4.5	12.4	7.9 : 12.4 = 0.6	20 × 0.6 = 12
Pectoralis major { p. sternocost.	2.7	5.9	8.6	2.7 : 8.6 = 0.3	20 × 0.3 = 6
Pectoralis major { p. abdominal.	0.6	6.2	6.8	0.6 : 6.8 = 0.09	20 × 0.09 = 1.8
Subscapularis { p. superior	1.5	2.6	4.1	1.5 : 4.1 = 0.4	20 × 0.4 = 8
Subscapularis { p. media	2.0	2.4	4.4	2.0 : 4.4 = 0.4	20 × 0.4 = 8
Subscapularis { p. inferior	2.2	2.5	4.7	2.2 : 4.7 = 0.5	20 × 0.5 = 10
Subscapularis { p. lateralis	1.0	5.0	6.0	1.0 : 6.0 = 0.2	20 × 0.2 = 4
Supraspinatus	4.7	1.1	5.8	4.7 : 5.8 = 0.8	20 × 0.8 = 16
Teres major	2.5	8.3	10.8	2.5 : 10.8 = 0.2	20 × 0.2 = 4
Teres minor	1.9	2.4	4.3	1.9 : 4.3 = 0.4	20 × 0.4 = 8
Triceps cpt. longum	0.6	6.2	6.8	0.6 : 6.8 = 0.09	20 × 0.09 = 1.8

*) genauer 0.486

Für den Unteren Teil des Breitesten Rückenmuskels ist nach vorstehender Tafel die »Spannungsverhältniszahl« z. B. 0.25, d. h. die Spannung in der Grundstellung ist auf $^1/_4$ seiner Spannung in der gedehntesten Stellung zu veranschlagen. Man hat also Grundstellungsspannung (Sg) = 20 × 0.25 = 5 kg für je 1 cm².

Mit Hilfe dieser »Spannungsverhältniszahl« für die Grundstellung kann man nun auch die Arbeitsleistung der Muskeln bei ihrer größten Ver-

kürzung von der Grundstellung aus sehr leicht berechnen, weil »die mittlere Spannung«, die für diese »Arbeitsstrecke« gilt, sich nach obigem äußerst einfach ergibt. Ebenso wie bei der Ganzarbeit (d. h. wenn sich der Muskel aus der größten Dehnung zur äußersten Verkürzung zusammenzieht [s. Zahlentafeln S. 464 u. 465]) die »mittlere Spannung« sich darstellt als das arithmetische Mittel aus der gedehntesten Spannung und der Endspannung, so auch hier für die »Teilarbeit« von der Grundstellung aus. Für die erstere, die Ganzarbeit, d. h. die Größtleistung, hat man: »mittlere Spannung« für je

$$1\ \text{cm}^2 = \frac{\text{Dehnungsspannung (Sd)} + \text{Endspannung (Sv)}}{2} = \frac{20\ \text{kg} + 0}{2} = 10\ \text{kg}.$$

Bei der größten Verkürzung aus der Grundstellung heraus hat man für die bei dieser »Teilarbeit« in Betracht kommende mittlere Spannung nach S. 465f. folgendes:

$$\text{mittlere Spannung für } 1\ \text{cm}^2 = \frac{\text{Grundstellungsspannung (Sg)} + \text{Endspannung (Sv)}}{2}$$

$$= \frac{20\ \text{kg (Sd)} \times \text{Spannungsverhältniszahl (S-V. g.)} + \text{Endspannung (Sv)}}{2}.$$

Nehmen wir als Beispiel wieder den Unteren Teil des Breitesten Rückenmuskels (m. Latissimus dorsi), so erhalten wir für seine Arbeit beim Übergang aus der Grundstellung in die verkürzteste Stellung folgende »mittlere Spannung« als arithmetisches Mittel aus der Anfangsspannung (d. h. hier der Grundstellungsspannung) und der Endstellungsspannung (d. h. hier der Spannung in der verkürztesten Lage): mittlere Spannung

$$\text{für je } 1\ \text{cm}^2 = \frac{20\ \text{kg (Sd)} \times 0.25\ \text{(S-V. g.)} + 0\ \text{(Sv)}}{2} = \frac{5}{2} = 2.5\ \text{kg}.$$

Die mittlere Spannung dieses Muskels von der Grundstellung aus bis zur Endverkürzung ist also nur eine sehr geringe, weil eben die Grundstellung des Armes für den Breitesten Rückenmuskel schon nahe seiner größten Verkürzung liegt (vgl. seine Verkürzungslinie auf Tafel IV 4 u. V 1 und S. 479).

Die Arbeitsleistung dieses Muskels z. B. bei der Hebung des Armes von der Grundstellung um 30° in der Schulterblattebene und Pronation um 70° (wie wir sie als »verkürzteste Stellung« gefunden haben, s. Zahlentafel auf S. 462 M 0, P 30, Pr 70°) beträgt daher 0.020 (Verkürzung in m) × 4.0 (Q. in cm^2) × 2.5 (mittlere Spannung in kg) = 0.20 kg/m.

Ähnlich vollzieht sich die Berechnung der Leistung der Muskeln aus der gedehntesten Stellung bis zur Grundstellung.

Bestimmung der Arbeitsleistung aus gedehntester Stellung bis zur Grundstellung.

Wenn von der »gedehntesten Stellung« aus die Bewegung nicht bis zur »verkürztesten Stellung« geführt wird, sondern nur bis zur Grundstellung, so ist für diese »Teilarbeit« natürlich die »mittlere Spannung« ebenso wie im zuletzt besprochenen Fall auch nicht auf 10 kg zu veran-

schlagen wie bei der Arbeit des Muskels bis zu seiner größten Verkürzung, bei der die Spannung nahezu auf Null sinkt. Hier ist sie vielmehr eine höhere. Die »mittlere Spannung« ist in diesem Fall nämlich natürlich wieder »das arithmetische Mittel aus der Anfangsspannung in der gedehntesten Stellung und der Spannung in der Endstellung«, die letztere ist diesmal aber die Grundstellung. Die Spannung in der »gedehntesten Stellung« (Sd) dürfen wir, wie mehrfach erwähnt, auf rund 20 kg veranschlagen, die Spannung in der Grundstellung, oder wie wir sagen können, die »Grundstellungsspannung« (Sg) ist aber, wie bemerkt, für jeden Muskel bzw. Muskelteil aus der Zahlentafel S. 466 zu ersehen. Sie ist ja nach S. 466 = Sd × S-V.g. = Dehnungsspannung × »Spannungsverhältniszahl für die Grundstellung«. Für die Arbeitsberechnung für diesen Teil der Leistungsstrecke der Muskeln haben wir also folgendes: Verkürzungsgröße (aus gedehntester Stellung bis zur Grundstellung) in m × Querschnitt in cm² × mittlerer Spannung $\left(\frac{\text{»Dehnungsspannung«} + \text{Grundstellungsspannung}}{2}\right)$ in kg = Arbeit in kg/m. Für den Unteren Teil des Breitesten Rückenmuskels ergibt sich z. B. folgende Arbeitsberechnung:

Er verkürzt sich von seiner größten Dehnung aus bis zur Grundstellung (s. Zahlentafel auf S. 464) um 6 cm = 0.060 m, sein Querschnitt ist 4 cm², seine »mittlere Spannung« auf dem Weg von der größten Dehnung bis zur Grundstellung ist $\frac{\text{Dehnungsspannung (Sd)} + \text{Grundstellungsspannung (Sg)}}{2} = \frac{20\,(\text{Sd}) + [0.25\,(\text{S-V.g.}) \times 20\,(\text{Sd})]}{2} = \frac{20 + 5}{2} = 12.5$ kg. Die Arbeitsleistung des Muskels bei der Bewegung des Armes aus der etwas über die Waagrechte in der Schulterblattebene gehobenen und um 50° supinierten Stellung des Armes (M ±0 P 95 Sup. 50° s. Zahlentafel S. 462) zur »Grundstellung«, ist also auf 0.060 (m) × 4.0 (cm²) × 12.5 (kg) = 3.000 kg/m zu veranschlagen.

Da der Arbeitswert des Unteren Teils des Breitesten Rückenmuskels für die Bewegung des Armes von der Grundstellung bis zur vollen Verkürzung 0.2 kg/m beträgt (s. S. 467), so erhält man als Summe der beiden Teilleistungen des Muskels 0.2 + 3.0 = 3.2 kg/m, also natürlich dieselbe Zahl, die die Berechnung der Arbeit bei größter Verkürzung des Muskels in einem Zug bei der Mittelspannung von 10 kg für je 1 cm² Querschnitt ergeben hat (s. Zahlentafel auf S. 464).

Bestimmung der Arbeitsgröße bei den größten Erhebungen ohne Grenzkreiselung von der Grundstellung aus.

Für die praktische Medizin scheint es mir, wie bemerkt, besonders belangreich zu sein, die Arbeit kennenzulernen, die die Muskeln bei den »reinen« Armhebungen in den Hauptrichtungen leisten können, d. h. ohne die Bewegung so weit zu treiben, daß eine Zwangskreiselung des Armes um seine Längsachse eintritt. — Da es sich bei diesen Bewegungen ebenso wie bei den oben besprochenen Teilbewegungen nicht um die Größtleistung des Muskels handelt,

bei der er sich von größter Dehnung aus bis zu größter Verkürzung zusammenzieht, wie bei den in der Tafel auf S. 462 angeführten Bewegungen und der Arbeitstafel auf S. 464, so kommt natürlich auch wieder als »mittlere Spannung« nicht einfach 10 kg für je 1 cm² Querschnitt in Betracht, sondern das arithmetische Mittel aus der Spannung in der Grundstellung und der Spannung in der betr. Endstellung (in der der Muskel aber nicht vollständig verkürzt ist). Nehmen wir zur Veranschaulichung der Berechnung als Beispiel den Haken-Armmuskel (m. Coracobrachialis).

Die Zahlentafel IX zeigt, daß er sich von der Grundstellung aus bei der »reinen« Armhebung auf dem Längskreis M ±0 (d. h. also in der Schulterblattebene) bis zum Breitekreis P 92 (also bis etwas über die Waagrechte) um 0.7 cm zusammenzieht. Es gilt nun zu berechnen, wie groß bei dieser unvollständigen Zusammenziehung die »mittlere Spannung« zu veranschlagen ist. Nach der Berechnung auf S. 466 beträgt die Spannung des Haken-Armmuskels (Coracobrachialis) in der Grundstellung rund (also Sg =) 0.5 × 20 kg = 10 kg. Die Spannung nach der reinen Erhebung auf dem Nullgrad, nennen wir sie die Restspannung (Sr), verhält sich aber zur größten Dehnungsspannung (Sd) wie der »Verkürzungsrest«, d. h. die Strecke, die dem Muskel nach der reinen Erhebung noch übrigbleibt zur ganzen Verkürzung, die er überhaupt ausführen kann; oder im Anschluß an die Darstellungsart der »Grundstellungsspannung« auf S. 465 f. können wir auch sagen: Der Spannungsrest (Sr) verhält sich zur Dehnungsspannung (Sd) wie die »Restlänge« (Lr) zur gedehntesten Länge (Ld).

Man hat also:

$$\frac{\text{Restspannung (Sr)}}{\text{Dehnungsspannung (Sd)}} = \frac{\text{Restlänge oder Verkürzungsrest (Lr)}}{\text{gedehnte Länge (Ld) oder Ganzverkürzungslänge}}$$

$$\text{oder Restspannung (Sr)} = \text{Dehnungsspannung (Sd)} \times \frac{\text{Restlänge (Lr)}}{\text{gedehnte Länge (Ld)}}.$$

Letzterer Bruch ist wieder die »Spannungsverhältniszahl« (s. S. 466), diesmal aber nicht für die Grundstellung (S-V. g.), sondern für die größte reine Erhebung (S-V. r).

Nehmen wir als Beispiel den Haken-Armmuskel (m. Coracobrachialis), so hat man für dessen »Restspannung« nach der reinen Erhebung auf dem Nullgrad (also in der Schulterblattebene) um 92° ohne Kreiselung folgendes:

$$\text{Restspannung (Sr) für je 1 cm}^2 = 20\ \text{kg}^{1)} \times \frac{7.2^{2)} - (3.7^{3)} + 0.7^{4)})}{7.2^{2)}}$$

$$= 20 \times \frac{2.8}{7.2} = 20 \times 0.39\ \text{kg}$$

$$= 7.8\ \text{kg}.$$

[1]) Dehnungsspannung. [2]) 7.2 = Dehnungslänge (s. Zahlentafel S. 466).
[3]) 3.7 = Verkürzung von der größten Dehnungs- bis zur Grundstellung (s. Zahlentafel S. 466) (s. Bild 2).
[4]) 0.7 = Verkürzung von der Grundstellung bis zu der in Frage stehenden Stellung (92° Erhebung auf dem Nullgrad ohne Kreiselung) (s. Bild 2).

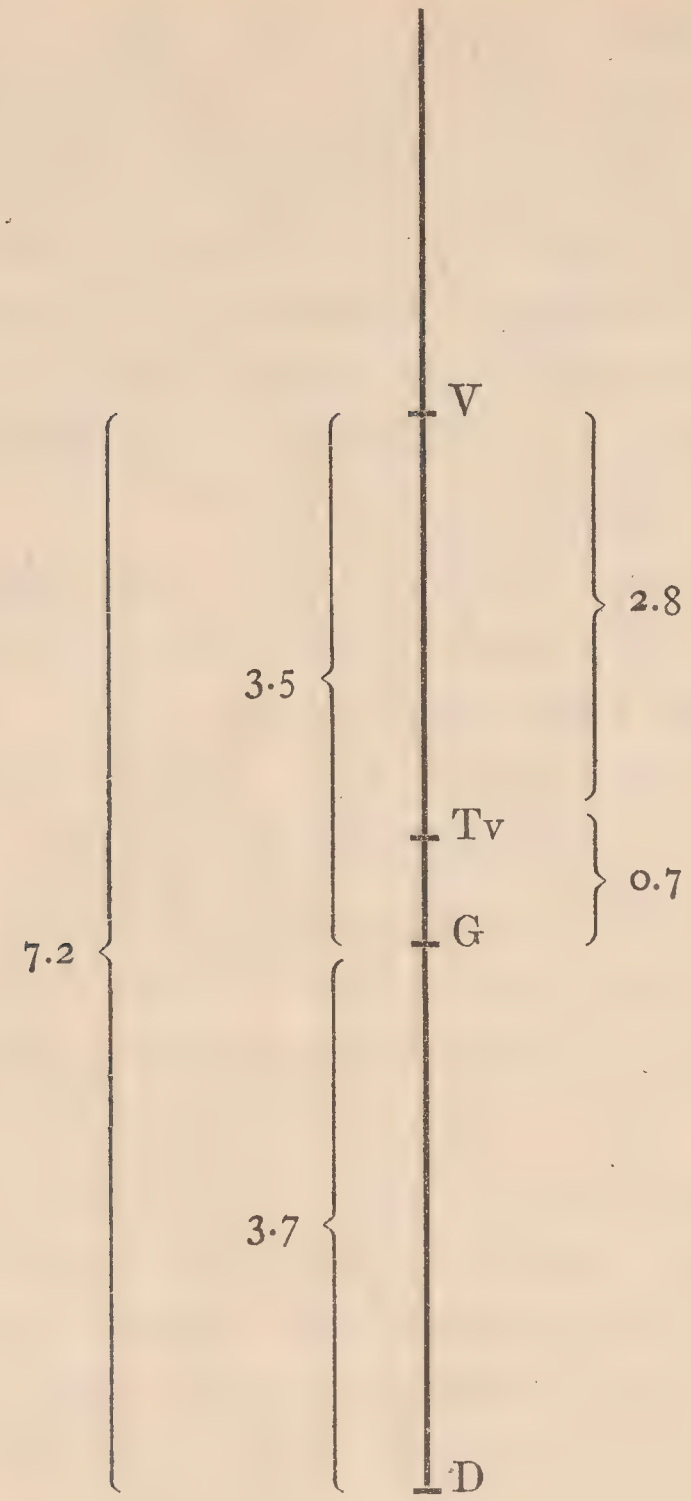


Bild 2. Längenverhältnisse des Haken-Armbeinmuskels (m. Coracobrachialis).

D	Muskelende bei	größter Dehnung.	DG = 3.7 cm = Lg = »Grundlänge«.
G	»	» der Grundstellung.	GTv = 0.7 cm = Verkürzung bei Seithebung aus der Grundstellung.
Tv	»	» » Teilverkürzung (bei Seithebung).	TvV = 2.8 cm = Lr = »Restlänge« = DV – (DG + GTv).
V	»	» » größten Verkürzung.	DV = 7.2 cm = Ld = »Dehnungslänge«.

Die »mittlere Spannung« für die in Rede stehende Teilarbeit des Haken-Armmuskels ist jetzt leicht zu berechnen, da sie natürlich wieder das arithmetische Mittel aus der Anfangs- und Endspannung ist. Bei unserer Teilarbeit ist sie daher das arithmetische Mittel aus der Grundstellungsspannung (Sg) und der »Restspannung« (Sr) (s. S. 469). Man hat also: Mittlere Spannung für

$$\text{je } 1\ \text{cm}^2 = \frac{\text{Grundstellungsspannung (Sg)} + \text{Restspannung (Sr)}}{2}$$

$$= \frac{10\ \text{kg (s. S. 466)} + 7.8\ \text{kg (s. S. 469)}}{2}$$

$$= \frac{17.8}{2} = 8.9\ \text{kg}.$$

Für den ganzen Haken-Armmuskel, dessen Querschnitt wir im Mittel 5.5 cm² fanden, ist daher die »mittlere Spannung« während der Teilarbeit von der Grundstellung bis zur Seithebung um 92° ohne Kreiselung 5.5 × 8.9 kg = 48.95 kg. Die Arbeit bei dieser Teilleistung beträgt daher:

Verkürzung × mittlere Spannung = 0.007 m × 48.95 kg = 0.343 kg/m.

Die Arbeit des Haken-Armmuskels (m. Coracobrachialis) bei der Vorhebung des Armes auf dem Längskreis M +90, d. h. also in einer zur Schulterblattebene senkrechten Ebene um 59°, berechnet sich in derselben Weise: Verkürzung × Querschnitt × mittlere Spannung = Arbeit (in kg/m). Alle Größen in Zahlen ausgedrückt, hat man für die Arbeitsleistung folgendes:

$$0.027\,^{1)} \times 5.5\,^{2)} \times \tfrac{1}{2}\left(10\,^{3)} + 20\,^{4)} \times \frac{7.2\,^{5)} - (3.7\,^{6)} + 2.7\,^{1)})^{7)}}{7.2\,^{5)}}\right)^{8)} \text{ kg/m.}$$

Die »mittlere Spannung« ist also $= \frac{1}{2}\left(10 + 20 \times \frac{0.8}{7.2}\right)$

$$= \tfrac{1}{2}\left(10 + \frac{16}{7.2}\right) = \frac{10 + 2.2}{2} = 6.1.$$

Die Arbeit bei der Vorhebung ist daher $= 0.027 \times 5.5 \times 6.1 = 0{,}906$ kg/m.

Die Arbeit des Haken-Armmuskels (m. Coracobrachialis) bei der Erhebung des Armes auf dem Längskreis M +180, also die Anziehung in der Schulterblattebene bis zum Breitekreis P 20 ohne Kreiselung, ist dieselbe wie auf dem Nullkreis, denn die Verkürzung beträgt auch hier nur 0.7 cm; die Arbeit ist daher auch $= 0.34$ kg/m. Seine Arbeit bei der Erhebung nach hinten auf dem Längskreis M −90, d. h. in der auf der Schulterblattebene senkrechtstehenden Ebene, die ohne Kreiselung bis zum Breitekreis P 50 geht, berechnet sich wie folgt:

Verkürzung × Querschnitt × Mittlere Spannung

$$0.022 \text{ m}^{9)} \times 5.5^{10)} \text{ cm}^2 \times \tfrac{1}{2}\left(10^{11)} + 20^{12)} \times \frac{7.2^{13)} - (3.7^{14)} + 2.2^{9)})}{7.2}\right) = \text{Arbeit}$$

in kg/m.

Die mittlere Spannung ist also $= \frac{1}{2}\left(10 + 20 \times \frac{0.13}{7.2}\right)$

$$= \tfrac{1}{2}\left(10 + \frac{2.6}{7.2}\right) = \frac{10 + 3.6}{2} = 6.8 \text{ kg.}$$

Die Arbeit bei der Anziehung ist daher $= 0.022 \times 5.5 \times 6.8 = 0.823$ kg/m.

---

[1]) Verkürzung bei der Vorhebung von der Grundstellung aus s. Tafel IX.
[2]) Querschnitt s. Zahlentafel S. 464.
[3]) Grundstellungsspannung für je 1 cm² Querschnitt s. Zahlentafel S. 466.
[4]) Dehnungsspannung s. Text S. 464.
[5]) Dehnungslänge s. Zahlentafel S. 464.
[6]) Verkürzung von der größten Dehnung bis zur Grundstellung s. Zahlentafel auf S. 464.
[7]) Teilverkürzung bei der Vorhebung.
[8]) Summe aus Grundspannung + Restspannung bei der betr. Erhebung; die Hälfte dieser Summe = Mittlere Spannung bei der in Rede stehenden Bewegung.
[9]) Verkürzung bei der Rückhebung von der Grundstellung aus s. Tafel X.
[10]) Querschnitt s. Zahlentafel S. 464.
[11]) Grundstellungsspannung für je 1 cm² s. Zahlentafel S. 466.
[12]) Dehnungsspannung s. Text S. 464.
[13]) Dehnungslänge s. Zahlentafel S. 464.
[14]) Verkürzung von der größten Dehnung bis zur Grundstellung s. Zahlentafel auf S. 464.

Bestimmung der Arbeitsgröße bei den „reinen“ Hebungen in den sog. „Hauptrichtungen“.

Für den Gebrauch in der praktischen Medizin sind wohl am allerbelangreichsten die Arbeitszahlen für die sog. »Hauptbewegungen« bei gewöhnlicher Haltung, das ist die Armerhebung nicht in der Schulterblattebene und der auf ihr senkrechten Ebene, sondern in der Stirnebene (»Frontalebene«) gerade nach der Seite oder brustwärts und in der Scheitelebene (»Sagittalebene«) gerade nach vorn oder gerade nach rückwärts.

Diese Bewegungen vollziehen sich, wie im ersten Teil der Arbeit auseinandergesetzt ist, da die Schulterblattebene bei gewöhnlicher Haltung nicht genau stirnrecht (»frontal«) im Körper steht, sondern um 30° nach vorn gedreht (s. I. Teil Bild 2 und 3) in den Ebenen der Längskreise M −30° (= Stirnebene), M +60 (= Scheitelebene) gerade nach vorn (reine Einwärtsbewegung war wegen des Anstoßens des Armes an die Brust unmöglich) und auf M −120 (gerade scheitelrecht nach hinten).

Das Präparat ergab folgende Werte:

Arbeitsleistung bei größter „reiner“ Seithebung (ohne Kreiselung) auf dem Längskreis M —30° (bis zum Breitekreis P 88°) aus der Grundstellung (nach der Arbeitsgröße geordnet).

Muskelname	Verkürzung aus der Grundstellung in m	× Querschnitt in cm²	× Mittlere Spannung für 1 cm² in kg	= Arbeitsleistung in kg/m
Deltoides acromialis	+0.040	22.0	6.2	+5.456
Supraspinatus	+0.022	9.3	12.3	+2.516
Deltoides clavicularis	+0.040	6.7	9.3	+2.492
Infraspinatus p. medialis	+0.013	6.2	11.7	+0.948
» p. inferior	+0.002	6.4	13.5	+0.173
» p. superior	+0.028	0.6	9.45	+0.159
Biceps caput longum	+0.001	5.9	10.7	+0.092
Subscapularis inferior	+0.001	5.0	9.4	+0.047
Summe der Arbeitsleistung der »Seitheber« =				+11.883
Pectoralis abdominalis	−0.045	0.5	7.9	−0.177
Subscapularis medius	−0.006	7.0	9.9	−0.416
» superior	−0.012	5.0	10.6	−0.636
Biceps cpt. breve	−0.012	5.1	12.3	−0.753
Coracobrachialis	−0.011	5.5	14.4	−0.792
Subscapularis lateralis	−0.027	4.0	8.2	−0.886
Teres minor	−0.021	4.0	12.1	−1.016
Deltoides spinalis	−0.024	6.7	8.05	−1.024
Pectoralis clavicularis	−0.024	3.0	14.3	−1.029
Latissimus inferior	−0.034	4.0	8.7	−1.183
Triceps cpt. longum	−0.046	9.4	8.7	−3.762
Latissimus superior	−0.090	4.2	10.5	−3.969
Pectoralis sternocostalis	−0.042	9.4	11.0	−4.343
Teres major	−0.068	10.5	10.6	−7.568
Summe der (negativen) Arbeitsleistung der »Anzieher« bei der Seithebung =				−27.555

Arbeitsleistung bei größter „reiner" Vorhebung (ohne Kreiselung) bis zum Breitekreis P 92° (auf dem Längskreis M +60°) aus der Grundstellung.

Muskelname	Verkürzung aus der Grundstellung in m	× Querschnitt in cm²	× Mittlere Spannung für 1 cm² in kg	= Arbeitsleistung in kg/m
Deltoides clavicularis	+0.051	6.7	7.95	+2.719
Biceps cpt. longum	+0.024	5.9	10.5	+1.924
Supraspinatus	+0.014	9.3	13.7	+1.784
Pectoralis clavicularis	+0.055	3.0	7.9	+1.303
Infraspinatus inferior	+0.017	6.4	11.2	+1.218
» medius	+0.015	6.2	11.45	+1.065
Biceps cpt. breve	+0.034	5.1	5.8	+1.006
Coracobrachialis	+0.033	5.5	5.27	+0.956
Subscapularis superior	+0.011	5.0	4.97	+0.273
» medius	+0.002	7.0	6.9	+0.097
Infraspinatus superior	+0.005	0.6	12.7	+0.038
Summe der Arbeitsleistung der »Vorheber«				+12.383
Pectoralis abdominalis	−0.036	0.5	6.5	−0.117
Subscapularis inferior	−0.003	5.0	10.3	−0.154
Pectoralis sternocostalis	−0.009	9.4	7.2	−0.609
Teres minor	−0.017	4.0	10.9	−0.741
Subscapularis lateralis	−0.026	4.0	8.0	−0.912
Latissimus inferior	−0.036	4.0	9.0	−1.296
Deltoides acromialis	−0.006	22.0	13.05	−1.723
» spinalis	−0.063	5.3	11.7	−3.907
Latissimus superior	−0.092	4.2	10.7	−4.134
Triceps cpt. longum	−0.050	9.4	9.2	−4.324
Teres major	−0.066	10.5	10.5	−7.276
Summe der (negativen) Arbeitsleistung der »Rückheber« bei der Vorhebung				−25.193

Arbeitsleistung bei größter „reiner" Rückhebung (ohne Kreiselung) bis zum Breitekreis P 30° (auf dem Längskreis M −120°) aus der Grundstellung.

Muskelname	Verkürzung aus der Grundstellung in m	× Querschnitt in cm²	× Mittlere Spannung für 1 cm² in kg	= Arbeitsleistung in kg/m
Deltoides acromialis	+0.008	22.0	11.0	+1.936
Teres major	+0.018	10.5	2.7	+0.510
Deltoides spinalis	+0.022	5.3	3.67	+0.428
Infraspin. inferior	+0.005	6.4	13.1	+0.419
Subscapul. inferior	+0.007	5.0	8.2	+0.287
Latissimus superior	+0.019	4.2	2.51	+0.200
Subscapul. medius	+0.002	7.0	6.9	+0.097
Latissimus inferior	+0.006	4.0	3.7	+0.088
Teres minor	+0.003	4.0	4.8	+0.058
Subscapul. lateralis	+0.005	4.0	2.83	+0.059
Triceps cpt. longum	+0.005	9.4	1.1	+0.049
Summe der Arbeitsleistung der »Rückheber« von der Grundstellung aus =				+4.131

Arbeitsleistung bei größter „reiner“ Rückhebung (ohne Kreiselung) bis zum Breitekreis P 30° (auf dem Längskreis M —120°) aus der Grundstellung.

Muskelname	Verkürzung aus der Grundstellung in m	× Querschnitt in cm²	× Mittlere Spannung für 1 cm² in kg	= Arbeitsleistung in kg/m
Pectoralis abdominalis	—0.004	0.5	1.58	—0.003
Infraspinatus superior	—0.004	0.6	15.05	—0.036
Subscapularis superior	—0.002	5.0	5.7	—0.057
Infraspin. medius	—0.001	6.2	14.0	—0.087
Biceps cpt. longum	—0.003	5.9	15.25	—0.237
Supraspinatus	—0.002	9.3	16.4	—0.305
Coracobrachialis	—0.009	5.5	11.1	—0.549
Biceps cpt. breve	—0.010	5.1	12.0	—0.612
Pectoralis clavicularis	—0.017	3.0	14.8	—0.683
» sternocostalis ...	—0.013	9.4	7.65	—0.935
Deltoides clavicularis	—0.013	6.7	15.7	—1.367
	Summe der negativen Arbeitsleistung der »Vorheber« von der Grundstellung aus bei der Rückhebung von der Grundstellung aus =			—4.871

Selbständige Kreiselbewegungen.

Wir untersuchten auch die Wirkung der Muskeln auf die Kreiselung, und zwar nicht nur in der Grundstellung, sondern auch in einigen anderen Stellungen, nämlich bei Erhebung des Armes um 30° nach hinten (also in der Stellung M –120 P 30), ferner bei Erhebung um 30° und um 60° in der auf der Schulterblattebene senkrechten Ebene nach hinten (M –90). Dann in der auch schräg seitwärts rückwärts stehenden Ebene des Längskreises M -60 bei Erhebung um 30° und um 60°. In der gerade seitlich (in der Stirnebene) verlaufenden Ebene M –30 maßen wir die Verkürzung der Muskeln bei den Kreiselungen in drei Erhebungsgraden, nämlich bei 30°, 60° und 90° Erhebung. In der Nullebene geschah die Messung bei 0°, 30°, 60° und 90° Erhebung, in der Ebene M +30°, also schräg vor-lateralwärts bei 30°, 60° und 90°. Ebenso verfuhren wir bei der Messung der Kreiselungsverkürzungen in der gerade nach vorn gerichteten Bewegungsebene (M +60). In der auf der Schulterblattebene nach vorn senkrecht stehenden Ebene M +90 maßen wir die Verkürzungen bei den Kreiselbewegungen des um 30° und um 60° erhobenen Armes. Die Tafel X zeigt die Messungsergebnisse, und zwar immer bei größter Kreiselung von der »Neutralstellung« (s.vorige Arbeit S. 62) aus.

Für die Kreiselung aus der Grundstellung heraus habe ich auch die Arbeitsleistung berechnet. Die Berechnung erfolgt in derselben Weise wie für die Hebungen, indem man zuerst die »Restspannung«, die dem Muskel nach der betr. Kreiselung in der Grundstellung noch verbleibt, berechnet, nach der Formel:

$$\frac{\text{Restspannung}}{\text{Dehnungsspannung}} = \frac{\text{Restlänge}}{\text{Dehnungslänge}}$$

oder

$$\text{Restspannung} = \text{Dehnungsspannung} \times \frac{\text{Restlänge}}{\text{Dehnungslänge}}.$$

Aus der Restspannung erhält man die Mittlere Spannung nach der Formel:

$$\text{Mittlere Spannung} = \frac{\text{Anfangsspannung} + \text{Restspannung}}{2}.$$

Die nächsten Zahlentafeln ergeben die gefundenen Werte der Größe nach geordnet.

Arbeitsleistung bei der größten Pronation aus der Grundstellung (Kreiselungsachse bleibt in der Polachse der „Bewegungskugel").

Muskelname	Verkürzung aus der Grundstellung in m	×	Mittlere Spannung für 1 cm² in kg	×	Querschnitt in cm²	=	Arbeitsleistung in kg/m
Biceps longus	+0.011		13.4		5.9		+0.956
Deltoides clavicularis	+0.008		13.1		6.7		+0.702
Subscapularis medius	+0.020		4.0		7.0		+0.560
Pectoralis sternocostalis	+0.012		4.7		9.4		+0.530
Subscapularis inferior	+0.017		5.1		5.0		+0.518
Teres major	+0.008		3.6		10.5		+0.302
Subscapularis superior	+0.015		4.0		5.0		+0.300
Supraspinatus	+0.002		15.8		9.3		+0.294
Pectoralis maj. clavicularis	+0.005		12.0		3.0		+0.180
Latissimus inferior	+0.008		4.0		4.0		+0.128
Subscapularis lateralis	+0.007		2.5		4.0		+0.070
Latissimus superior	+0.003		3.7		4.2		+0.046
Pectoralis abdominalis	+0.006		0.9		0.5		+0.003
	Summe der Arbeitsleistung der Pronatoren bei Pronation von der Grundstellung aus					=	+4.589
Infraspinatus superior	−0.010		16.1		0.6		−0.097
Biceps brevis	−0.002		10.8		5.1		−0.110
Triceps longus	−0.005		2.5		15.0		−0.187
Teres minor	−0.011		6.4		4.0		−0.282
Coracobrachialis	−0.005		10.7		5.5		−0.294
Deltoides spinalis	−0.008		6.5		6.0		−0.312
Infraspinatus medius	−0.009		15.4		6.2		−0.855
» inferior	−0.010		15.4		6.4		−0.986
Deltoides acromialis	−0.006		13.0		22.0		−1.716
	Summe der negativen Arbeitsleistung der Supinatoren bei der Pronation von der Grundstellung aus					=	−4.839

Arbeitsleistung bei der größten Supination aus der Grundstellung.

Muskelname	Verkürzung aus der Grundstellung in m	×	Mittlere Spannung für 1 cm² in kg	×	Querschnitt in cm²	=	Arbeitsleistung in kg/m
Supraspinatus	+0.018		13.0		9.3		+2.176
Infraspinatus inferior	+0.028		9.5		6.4		+1.763
» medius	+0.029		9.2		6.2		+1.653
Deltoides spinalis	+0.010		7.7		6.0		+0.462
Teres major	+0.008		3.6		10.5		+0.302
Deltoides clavicularis	+0.003		13.7		6.7		+0.284
Deltoides acromialis	+0.001		12.0		22.0		+0.264
Coracobrachialis	+0.005		9.2		5.5		+0.253
Teres minor	+0.019		4.0		4.0		+0.176
Infraspinatus superior	+0.030		9.1		0.6		+0.164
	Summe der Arbeitsleistung der Supinatoren bei der Supination aus der Grundstellung					=	+7.497

Arbeitsleistung bei der größten Supination aus der Grundstellung.

Muskelname	Verkürzung aus der Grundstellung in m	×	Mittlere Spannung für 1 cm² in kg	×	Querschnitt in cm²	=	Arbeitsleistung in kg/m
Triceps longus	±0.000		2.0		15.0		±0.000
Pectoralis abdominalis	−0.008		2.2		0.5		−0.008
Biceps brevis	−0.001		10.4		5.1		−0.053
Latissimus superior	−0.005		4.3		4.2		−0.090
» inferior	−0.007		5.9		4.0		−0.165
Biceps longus	−0.002		16.4		5.9		−0.193
Subscapularis lateralis	−0.012		5.9		4.0		−0.283
Pectoralis maj. clavicularis	−0.010		13.2		3.0		−0.396
Subscapularis inferior	−0.017		13.3		5.0		−1.130
Pectoralis sternocostalis	−0.019		10.6		9.4		−1.482
Subscapularis superior	−0.026		12.0		5.0		−1.560
» medius	−0.024		14.0		7.0		−2.352
Summe der negativen Arbeitsleistung der Pronatoren bei der Supination von der Grundstellung aus						=	−7.712

Übersicht über die Hauptleistungen der einzelnen Muskeln.

Zum Schluß führe ich kurz die Hauptmerkzeichen der Leistung der einzelnen Muskeln an.

Zweiköpfer, langer Kopf (m. biceps brachii, caput long.). Die Verkürzungslinie für seine Tätigkeit bei den Hebungen im Schultergelenk auf Tafel II 2 läßt erkennen, daß die Grundstellung des Armes für diesen Muskel fast eine Grenzstellung ist, da er in ihr fast am gedehntesten ist, wie der Umstand erkennen läßt, daß die Verkürzungslinie fast ganz über der Nullinie liegt. Nur vom Längskreis M −40 bzw. −70 ab kann der Muskel bei der also nach hinten erfolgenden Erhebung noch etwas, aber kaum mehr als $^1/_2$ cm, gedehnt werden. Der lange Kopf des Zweiköpfers ist also ein ausgesprochener Vorheber und Seitheber. Aus obenstehenden Zahlen und Tafel X ergibt sich, daß er aber auch ein deutlicher Pronator des Schultergelenkes ist, außer bei hinterer Seithebung, wo er auch zum Supinator wird (s. Tafel X). Ähnliches fand sich auch an dem mit Shino untersuchten Präparat beim Übergang von größter Supination in größte Pronation. Wir untersuchten die größte Kreiselung (s. oben) von der Neutralstellung aus. Da zeigte es sich, daß der lange Kopf auf dem Längengrad M −60 (P 30 und 60) und M −30 (P 30) sowohl pronieren als supinieren kann, d. h. also in der Neutralstellung vergleichsweise gedehnter ist als in der pronierten und in der supinierten Stellung bei diesen Erhebungen. Die größte Arbeitsleistung am Schultergelenk berechneten wir auf 2.596 kg/m. Sie erfolgt, wenn der Arm von hinten oben aus 30° Supination über die Waagrechte nach vorn in 30° Pronation gebracht wird.

Der kurze Kopf des Zweiköpfers (m. biceps brachii caput breve) zeigt eine ganz andere Verkürzungslinie (s. Tafel II 1). Für ihn ist die Grundstellung fast eine Mittelstellung, die Nullinie schneidet seine Verkürzungsbahn fast in der Mitte. Seine größte Verkürzung erfährt er bei der Vorhebung auf dem Längskreis M +70 (also um 10° nach medialwärts von der geraden, scheitel-

rechten Vorhebung) um 91° und 25° Pronation. Der stärksten Dehnung unterliegt er, wenn der Arm auf dem Längengrad −80 (also schräg nach hinten seitlich, fast senkrecht zur Schulterblattebene) um 60° gehoben und um 25° supiniert wird. Seine größte Leistungsfähigkeit beim Übergang aus letzterer in erstere Stellung berechneten wir auf 3.57 kg/m.

Bezüglich der Kreiselung verhielt sich der Muskel bei unserem Präparat auffällig, insofern er fast in allen untersuchten Erhebungslagen von der Neutralstellung aus sowohl durch Pronation als auch durch Supination gedehnt wurde. Er führte demnach den Arm in diesen Lagen aus pronierten oder supinierten Stellungen in die »Neutralstellung« (s. vorige Abhandlung S. 62).

Der Haken-Armmuskel (m. Coracobrachialis) hat eine ähnliche Verkürzungslinie wie der kurze Kopf des Zweiköpfers. Die Grundstellung des Armes ist für ihn fast die Mittelstellung, denn die Nullinie schneidet die Verkürzungslinie fast in der Mitte. Auf dem vorderen Teil der Bewegungskugel verkürzt er sich bei der Hebung des Armes aus der Grundstellung, auf der Hinterseite der Kugel wird er bei Erhebung des Armes aus der Grundstellung nach hinten gedehnt. Verkürzung und Dehnung betragen ungefähr 3 cm. Das Verhalten bei der Kreiselung fanden wir diesmal anders wie am Präparat Shinos und A. E. Fick-E. Webers, die fast gar keinen Einfluß des Muskels auf die Kreiselung feststellen konnten. Unser jetziges Präparat zeigte Verhältnisse, wie sie Winslow und Bichat fanden, nämlich deutliche supinatorische Wirkung, wenigstens aus pronierter Stellung heraus, wie die Messungszahlen der Tafel X ergeben. Wir sehen daraus z. B., daß der Muskel, wenn der Arm auf dem Längskreis M −60, also nach hinten seitlich um 30°, erhoben ist, bei Pronation um 12 mm gedehnt wird und sich bei Supination um 3 mm verkürzt. Aus pronierter Stellung kann er also den Arm zur vollen Supination führen und sich dabei um 15 mm verkürzen, also beträchtliche Arbeit leisten; ähnlich auch von anderen Ausgangsstellungen aus. Seine größte Arbeitsleistung berechneten wir auf 3.96 kg/m bei Bewegung des um 25° supinierten Armes von hinten hoch lateral nach vorn medialwärts und 25° Pronation (s. S. 464).

Dreieckmuskel (m. Deltoides).

Schon der alte Winslow erkannte, daß der Dreieckmuskel keine einheitliche Wirkung habe. A. E. Fick und E. Weber (1877) bestimmten dann genauer die verschiedene Bedeutung der drei Hauptteile, die sich in der Wirkung zum Teil widersprechen.

1. Der Hauptteil, der weit weniger Schwankungen in seiner Stärke unterworfen ist als der vordere und hintere, ist der »mittlere«, wenn man den anatomisch einheitlichen Muskel betrachtet, oder der »seitliche« wenn man von der Lage im Körper ausgeht, oder der Schultereckteil (pars acromiralis), wenn man seinen Ursprung ins Auge faßt. Er hat nach unserem Mittel einen Querschnitt von nicht weniger als 22 cm^2, was sich durch seine starke Fiederung erklärt. Er ist hauptsächlich ein Seitheber und Vorheber bis zum Längskreis M +50. Seine größte Verkürzungsgröße (4.4 cm)

lag bei unserem Präparat bei der Erhebung auf dem Längskreis M −40, also etwas nach hinten von der genauen (stirnrechten) Seithebung um 92° bei 10° Supination aus starker Rückhebung.

Auf die Kreiselung wirkt er nur wenig. Unser neues Präparat zeigt ähnliche Verhältnisse wie das von A. E. Fick und E. Weber, nämlich Vorwiegen der supinierenden Wirkung; nur bei waagerechter Erhebung nach vorn (auf M +30, M +60 und M +90) verkürzte er sich bei der Pronation, sonst fast überall nur von pronierter Stellung aus bis zur »Neutralstellung«. Pronatorische Wirkung bei vorwärts gehobenen Stellungen hat auch Shiino bereits beobachtet und die Verschiebung der Muskelzugrichtung gegenüber der Armlängsāchse bei der Vorhebung durch eine schematische Zeichnung klargemacht. Seine Arbeitsfähigkeit ist die größte von allen Schultermuskeln; sie beträgt 15.62 kg/m.

2. Der Schlüsselbeinteil (p. clavicularis) ist vor allem Vorheber. Bei unserem Präparat zeigte er die größte Verkürzung bei des Armes Vorhebung ohne Kreiselung auf dem Längskreis M +50, also fast gerade nach vorn. Schon A. E. Fick, E. Weber und Shiino wiesen nach, daß er bei der Seithebung zunächst gedehnt wird, daß er aber, wenn der Arm durch andere Kräfte etwa 60° seitwärts gehoben wird, sich bei weiterer Erhebung deutlich verkürzt. Shiino hat durch eine anschauliche Zeichnung es klargestellt, wie seine Zugrichtung bei der Armhebung über die Ab- und Anziehungsachse verschoben wird, so daß der Muskel aus einem »Anzieher« zu einem »Abzieher« wird. Shiino hat ferner an unserem Innsbrucker Material beobachtet, daß der Umfang des Schlüsselbeinteils des Deltamuskels sich manchmal so wenig weit medialwärts ausbreitet, daß die mittlere Zugrichtung des Muskels schon in der Grundstellung lateral von der Ab- und Anziehungsachse vorbeiläuft, so daß der Muskel also auch schon in der Grundstellung abziehend wirkt. Auch beim Berliner Material habe ich solche Fälle beobachtet.

Auf die Kreiselung wirkt der Muskel im wesentlichen pronatorisch. Nur in ganz wenigen Stellungen (s. Tafel X) fand ich eine ganz geringe Dehnung von 1 bis 2 mm bei der Pronation. In der Grundstellung wirkt er sowohl pronatorisch (8 mm Verkürzung) als supinatorisch (3 mm Verkürzung); bei ihr ist er also in der Neutralstellung vergleichsweise gedehnt.

3. Der Grätenteil (p. spinalis) ist Rückheber und wohl meist in den gesenkten Stellungen des Armes Anzieher, in rückwärts gehobenen Stellungen aber Abzieher und aus fast allen Stellungen Supinator. In ganz wenigen Stellungen fand ich pronatorische Wirkung, wie die Tafel X zeigt. Bei waagrechter Erhebung im Nullkreis und bei Erhebung von 60° im Längskreis M +30 wird er sowohl bei Pronation als bei Supination gedehnt, d. h. er ist in der Neutralstellung vergleichsweise verkürzt.

Der Schlüsselbein- und der Grätenteil haben nach unserem letzten Präparat fast genau dieselbe größte Arbeitsleistung, nämlich der erstere 5.561, der letztere 5.565 kg/m; bei Shiinos Präparat war die Leistung des Schlüsselbeinteils auch über 5 kg/m, die des Grätenteils aber nur etwa $3^1/_2$ kg/m. Der Schlüsselbeinteil vollführt seine Größtleistung, wenn der Arm gerade senkrecht zur Schulterblattebene um 50° nach hinten erhoben ist und von

dieser Stellung aus waagrecht nach vorn erhoben und dabei um 20° proniert wird. Der Grätenteil arbeitet am meisten von starker Vorhebung zur Rückhebung gerade nach hinten und 15° Supination.

Untergrätenmuskel (m. Infraspinatus).

Schon A. E. Fick und E. Weber betonten, daß die verschiedenen Teile des Muskels verschieden wirken. Der untere wirkt bei gesenkten Lagen des Armes anziehend, bei gehobenen aber abhebend, weil seine Zugrichtung in der Grundstellung unterhalb der Ab- bzw. Anziehungsachse verläuft, bei abgehobener Stellung aber sich als über die Achse verschoben erweist. Alle Teile wirken vorhebend und supinierend. Nur bei waagrechter Hebung auf dem Längskreis M +30 (also schräg vorwärts) fand ich unerwarteterweise, daß der obere Teil des Muskels sich bei der Pronation etwas verkürzte, bei der Supination dehnte. Bei letzterer Bewegung ging der Ansatz etwas nach unten, wodurch der Muskel gedehnt wurde. Die (punktierten) Verkürzungslinien (s. Linientafel IV) für die Grenzbewegungen, bei denen der Arm auf den seitlichen und hinteren Teilen der Kugel zwangsmässig zugleich stark supiniert ist, zeigen natürlich eine viel stärkere Verkürzung als die (ausgezogenen) Verkürzungslinien für die »reinen« Hebungen ohne Kreiselung. Die Verkürzungslinien für die Grenzbewegung mit der Zwangskreiselung lassen natürlich auch die starke Einsenkung bei der Grenzerhebung auf dem Längsgrad M −40 erkennen, bei der, wie in der vorigen Abhandlung besprochen wurde, die Zwangssupination auffällig gering ist gegenüber der Grenzbewegung auf den benachbarten Längskreisen. Die Größtleistung (3.42 kg/m) zeigt der obere Teil, wenn der Arm aus 45° Pronation und 35° Erhebung auf dem hinteren Längskreis M −70 in 100° Supination zum Breitekreis 24 auf dem Längskreis M −40 gesenkt wird. Der mittlere vollbringt sie (3.906 kg/m), wenn der Arm aus 45° Pronation und 50° Erhebung auf dem Längskreis M −60 in 100° Supination zu 55° auf dem Längskreis M −50 erhoben wird. Der untere Teil leistet die größte Arbeit (4.096 kg/m) aus 80° Pronation und 30° Erhebung auf dem gerade vornliegenden Längskreis M +60 in 100° Supination und über waagrechte Seithebung auf dem Längskreis M −20, also fast gerade nach der Seite. Er hat demnach die größte Leistung aller Teile des Untergrätenmuskels aufzuweisen, da er sowohl den größten Querschnitt als auch die größte Verkürzung zeigt.

Breitester Rückenmuskel (m. latissimus dorsi).

Die Verkürzungslinien der beiden Teile des Muskels lassen erkennen, daß er in der Grundstellung fast am verkürztesten ist; nur bei der Hebung auf den hinteren Längskreisen von M −100 bis M −130 kann wenigstens der obere Teil beträchtlichere Arbeit leisten. Bei der Erhebung auf allen anderen Längskreisen wird der Muskel aber gedehnt, am meisten bei der Erhebung gerade oder fast gerade nach der Seite. Der Muskel ist eben ein ausgesprochener Anzieher und ein Rückheber sowie ein starker Pronator aus supinierten Stellungen. Die Arbeitsleistung des oberen Teiles des Muskels

ist durch die starke Verkürzung bzw. Dehnung trotz des vergleichsweise geringen, nur 4.2 cm² betragenden Querschnittes eine sehr beträchtliche; sie beträgt 5.712 kg/m, wenn der Arm aus 45° Supination und Erhebung um 101° schräg vorwärts-seitwärts auf dem Längskreis M +20 in 20° Pronation auf dem hinten befindlichen Längskreis M −130 auf 31° gesenkt wird. Der untere Teil leistet die Größtarbeit von 3·2 kg/m, wenn der Arm in der Schulterblattebene (M ±0) aus 95° Erhebung und 50° Supination auf 30° gesenkt und um 70° proniert wird.

Großer Brustmuskel (m. Pectoralis major).

Alle drei Teile sind Anzieher des Armes. Auch bei waagrechter Bewegung des Armes auf den Breitekreisen, z. B. auf dem Äquator der Bewegungskugel, erleiden sie bei der Bewegung nach der Mittelebene des Körpers hin starke Verkürzung. Außerdem ist der Große Brustmuskel in allen Stellungen ausgesprochener Pronator. Die Verkürzungslinie des Schlüsselbeinteiles des Muskels erinnert in ihrem Verlauf außerordentlich an die des kurzen Kopfes des Zweiköpfers und an die des Haken-Armbeinmuskels. Auch sie wird von der Nullinie fast halbiert, d. h. die Grundstellung des Armes stellt für diese Muskeln ungefähr eine Mittelstellung dar. Die Größtleistung des Schlüsselbeinteils erfolgt, wenn der Arm auf dem hinteren Längskreis M −70 um 69° erhoben und um 60° supiniert war und aus dieser Stellung nach vorn auf den Längskreis M +90 (der also auf der Schulterblattebene senkrecht steht) gebracht wird und dabei noch um 4° (also bis auf P 73) gehoben und außerdem in 35° Pronation gedreht wird. Dabei verrichtet er eine Arbeit von 3.72 kg/m.

Die Verkürzungslinie des Hauptteils, d. h. des vom Brustbein und den Rippen entspringenden Mittelteils, hat einen ganz anderen Verlauf; man erkennt aus ihm, daß der Muskel fast bei allen Hebungen von der Grundstellung aus gedehnt wird, nur auf den medial vorwärts gerichteten Längskreisen von M +70 an kann er bei der Erhebung Arbeit leisten. Die größte Arbeit leistet der Hauptteil bei Vorhebung des Armes aus Supination um 90° auf den hinteren Längsgrad M −70 auf den genau nach vorn gerichteten Längskreis M +60, wenn der Arm zugleich vom Breitekreis P 61 auf P 59 gesenkt und um 60° proniert wird. Die Arbeit bei dieser Bewegung berechnet sich auf nicht weniger als 8.084 kg/m.

Noch vollständiger unter die Nullinie sinkt die Verkürzunglinie des Bauchteils des Muskels. Sie ähnelt sehr der des unteren Teils des Breitesten Rückenmuskels. Sie verläuft mit Ausnahme der Erhebung auf dem Längskreis M +180 ganz unter der Nullinie, d. h. der Bauchteil des Großen Brustmuskels wird bei allen Erhebungen von der Grundstellung aus gedehnt (mit Ausnahme der Erhebung auf M +180, wobei er sich um 3 mm verkürzt). Die stärkste Dehnung erfährt er bei Erhebung fast gerade seitlich (auf M −20). Von dieser Stellung aus verkürzt er sich natürlich bei Anziehung und bei Senkung des Armes, und wie bereits für den ganzen Muskel angegeben, bei Einwärtskreiselung (Pronation). Daß die (gestrichelte) Dehnungslinie der Be-

wegung mit der Grenzkreiselung auf den seitlichen Längskreisen wesentlich tiefer läuft als die Dehnungslinie bei »reiner« Seithebung, rührt natürlich von der Auswärtskreiselung her, die mit der Grenzhebung dort verbunden ist, denn durch die Auswärtskreiselung wird die Dehnung des einwärts kreiselnden Muskels natürlich noch vermehrt. Die Hauptleistung des Bauchteils (0.34 kg/m) geschieht bei Senkung des Armes aus Erhebung um 98° auf dem seitlichen Längskreis M −20 auf die Höhe des 20. Breitekreises im Nullängskreis, während der Arm gleichzeitig aus 65° Supination in 55° Pronation gedreht wird.

Vorderschulterblattmuskel (m. Subscapularis).

Die Wirkung des Muskels ist nur auf die Kreiselbewegung eindeutig und leicht zu übersehen. Alle seine Teile wirken natürlich einwärts kreiselnd (pronierend). Nur bei waagerechter Erhebung auf dem Nullkreis fand ich merkwürdigerweise eine allerdings nur sehr geringfügige, 3 mm betragende Verkürzung bei der Auswärtskreiselung (Supination). Auf die Vor- bzw. Rückhebung und die Ab- bzw. Anziehung wirken die verschiedenen Teile des Muskels verschieden und nicht leicht übersichtlich. Wir teilten den Muskel zur genaueren Untersuchung wie auch Shino, in 4 Teile ein; einen oberen, mittleren, unteren und »lateralen«, d. h. ganz randständigen, der Achselhöhle zunächstliegenden Teil. Die Verkürzungslinien der 4 Teile zeigen recht verschiedenes Aussehen, rechtfertigen also unsere Trennung. Das eine nur ist allen gemeinsam, daß die Verkürzungslinien für die Grenzbewegungen, bei denen mit der Hebung also eine Zwangskreiselung verbunden ist, auf den vorderen Längskreisen, wo die Grenzkreiselung eine Einwärtskreiselung (Pronation) ist, über der Linie für die reinen Erhebungen liegt. Das ist selbstverständlich, weil der Muskel eben vor allem ein Einwärtskreisler (Pronator) ist. Auf den hinteren Längskreisen, wo die Grenzhebungen mit einer Auswärtskreiselung (Supination) verbunden sind, liegt die Verkürzungslinie für diese Bewegungen natürlich unter der Linie für die »reinen« Hebungen, denn durch die Auswärtskreiselung wird der Muskel natürlich gedehnt oder seine Verkürzung vermindert.

Beim oberen Teil des Muskels geschieht die Hauptverkürzung bei der Erhebung nach vorn auf dem Längsgrad M +80 um 80° und Pronation um 25°, sie ist freilich auch da nur 1.5 cm; die stärkste Dehnung erfuhr der obere Teil bei Rückhebung auf dem Längsgrad M −70 um 69° und 60° Supination. Beim Übergang aus der ersteren in die letztere Stellung ist seine Arbeit auf 2.05 kg/m zu schätzen.

Der mittlere Teil des Muskels erfährt bei den Erhebungen von der Grundstellung aus nur sehr geringe, fast überall kaum 5 mm betragende Verkürzungen, wenn nicht besonders starke Pronationen gemacht werden. Wenn aber der um 94° auf dem Längskreis M +40 erhobene Arm um 40° proniert wird, verkürzt sich der Muskel um 2 cm. Die größte Dehnung (23 mm) erfuhr dieser Muskelteil bei waagrechter Erhebung nach der Seite auf dem Längskreis M −30 und 95° Supination. Beim Übergang aus ersterer in letztere Stellung berechneten wir seine Leistung auf 1.89 kg/m.

Etwas größere Ausschläge bei den meridianalen Erhebungen zeigt die Verkürzungslinie des unteren Teils des Muskels. Seine größte, immerhin doch 14 mm betragende Verkürzung dabei hatte der Muskel bei der Rückhebung des Armes gerade senkrecht zur Schulterblattebene (also auf dem Längskreis M −90), die stärkste Dehnung bei der Erhebung einwärts vorwärts auf dem Längskreis M +100, und zwar im Betrag von 15 mm. Wenn starke Kreiselungen ausgeführt werden, werden die Verkürzungen und Dehnungen aber noch größer. Die Größtleistung erfolgt bei der Rückführung des Armes von 60° Vorhebung auf dem vordersten Längskreis der Kugel (M +90) und 30° Supination nach hinten zum Längskreis M −90 und dem Breitekreis P 51 sowie 25° Pronation; die Arbeit beträgt dabei 2.35 kg/m.

Noch größere Ausschläge zeigt der »Seitliche Teil« des Muskels. Seine Wirkungslinie liegt aber fast ganz unter der Nullinie, d. h. bei fast allen Hebungen des Armes von der Grundstellung aus wird der Muskel gedehnt. Seine größte Dehnung zeigt sich bei Erhebung des Armes etwa gerade nach der Seite (auf dem Längskreis M −20). Bei dieser Bewegung wird er bei Hebung um 94° und Supination um 100° gerade 50 mm gedehnt. Bei Rückhebung auf dem Längskreis M −130 (also fast gerade nach hinten) verkürzt er sich bei Hebung um 29° und Pronation um 25° um 11 mm. Seine Größtarbeit beim Übergang aus der ersteren in die letztere Stellung beträgt 2.4 kg/m.

Obergrätenmuskel (m. supraspinatus).

Die Leistungslinie des Muskels liegt im wesentlichen über der Nullinie, wie das auch Shiino fand. Seine Hauptverkürzung findet er bei Vorhebung im Gebiet etwas vor der Schulterblattebene und bei Seit- und auch Rückhebung, wenn Auswärtskreiselung (Supination) damit verbunden ist, wie z. B. bei den Grenzhebungen. Daher läuft die gestrichelte Linie für die Grenzhebungen höher als die für die »reinen« Hebungen. Beim Heben nach vorn und einwärts wird seine Verkürzung vermehrt durch Einwärtskreiseln (Pronieren). Shiino hat an einer Strichzeichnung klargemacht, daß sich diese Tatsache leicht daraus erklärt, daß das obere Ende der Längsachse des Armes nach hinten wandert, wenn der Arm nach vorn gehoben wird. In diesem Fall läuft die Zugrichtung des Muskels vor der Längsachse des Armes vorbei, dreht den Arm also vorn herum mit dem kleineren Armhöcker nach einwärts (s. Bild 19 bei Shiino). Die größte Arbeit leistet er, wenn der Arm um 20° auf dem medialen Längskreis M +180 um 20° erhoben und um 30° proniert wurde und nun auf den hinten lateral liegenden Längskreis M −40 seitwärts geführt, auf 88° gehoben und um 75° supiniert wird. Die Arbeit beträgt dann 5.394 kg/m.

Großer Runder Muskel (m. Teres major).

Die Leistungslinie dieses Muskels entspricht im wesentlichen vollständig der des oberen Teils des Breitesten Rückenmuskels, nur daß der Dehnungsbetrag beim Runden Muskel etwas geringer ist. Er ist demnach auch ein

Rückheber und ein Anzieher aus seitlich gehobener Stellung und natürlich durchgehends ein Einwärtskreisler (Pronator). Shino betont mit Recht, daß er den seitlich gehobenen Arm auch sowohl nach hinten als nach vorn waagrecht, d. h. auf den Breitekreisen gegen die Mittellinie anziehen kann. Seine Größtleistung beträgt nicht weniger als 11.34 kg/m, wenn der Arm vom seitlich-vorn liegenden Längskreis M +20 und 105° Erhebung sowie 60° Supination nach hinten geführt wird, auf den Längskreis M −130 und bis zum Breitekreis P 28 gesenkt sowie in 25° Pronation gebracht wird.

Kleiner Runder Muskel (m. Teres minor).

Das Leistungsgebiet liegt fast ganz unter der Nullinie, d. h. der Muskel wird bei allen »reinen« Erhebungen von der Grundstellung aus gedehnt. Nur bei Rückhebung, etwa senkrecht zur Schulterblattebene (M −110 bis M −130), kann er sich etwas verkürzen. Auch wenn der Arm schon gehoben ist, liegt seine Zugrichtung unter der Abziehungsachse, so daß er den Arm von da aus nicht etwa weiterheben kann, wie es bei dem unteren Teil des Untergrätenmuskels der Fall ist. Mit dem Untergrätenmuskel hat er aber natürlich die auswärtskreiselnde (supinierende) Wirkung gemein. Seine größte Arbeit verrichtet er, wenn der Arm auf dem Längskreis M +10 seitwärts um 55° gehoben und 65° proniert wird und dann nach hinten auf dem Längsgrad M −130 auf 20° gesenkt und um 50° supiniert wird. Er leistet dabei 1.56 kg/m.

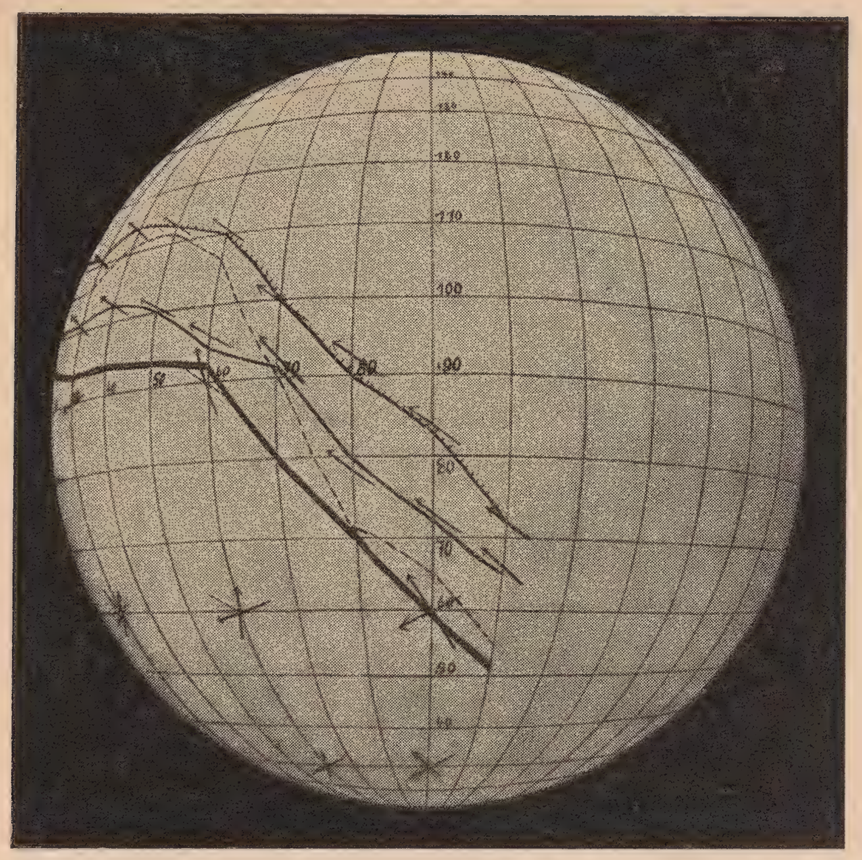
Langer Kopf des Dreiköpfers (cpt. long. m. Tricipitis).

Vergleichen wir die entsprechenden Tafeln, so sehen wir, daß dieser Muskel grundsätzlich dasselbe Wirkungsgebiet betr. der Armhebung und -anziehung hat wie der Lange Runde Muskel (Teres major) und der Breiteste Rückenmuskel, nur sind die Ausschläge, d. h. die Verkürzungen bzw. Dehnungen, etwas geringer. Er ist also wie diese ein Rückheber und Anzieher, ein starker Gegenwirker bei der Seithebung. Was die Kreiselungen betrifft, so fanden wir beim jetzigen Präparat die Wirkung nur sehr unbedeutend, wie es auch A. E. Fick und E. Weber gefunden hatten, während das Präparat Shinos eine deutlichere auswärts kreiselnde Wirkung des Muskels ergeben hatte. Bei unserem Präparat wird der Muskel in den meisten Stellungen sowohl durch Einwärts- als auch durch Auswärtskreiseln etwas gedehnt, ist also an den betreffenden Stellen der Bewegungskugel in der »Neutralstellung« am verkürztesten. Seine größte Leistung führt er aus, wenn der Arm auf dem Längskreis M +40 um 103° lateral vorwärts gehoben und um 23° supiniert war und von dieser Stellung aus nach hinten bis auf 31° gesenkt und um 15° supiniert wird. Seine Arbeitsleistung dabei berechneten wir auf 10.2 kg/m.

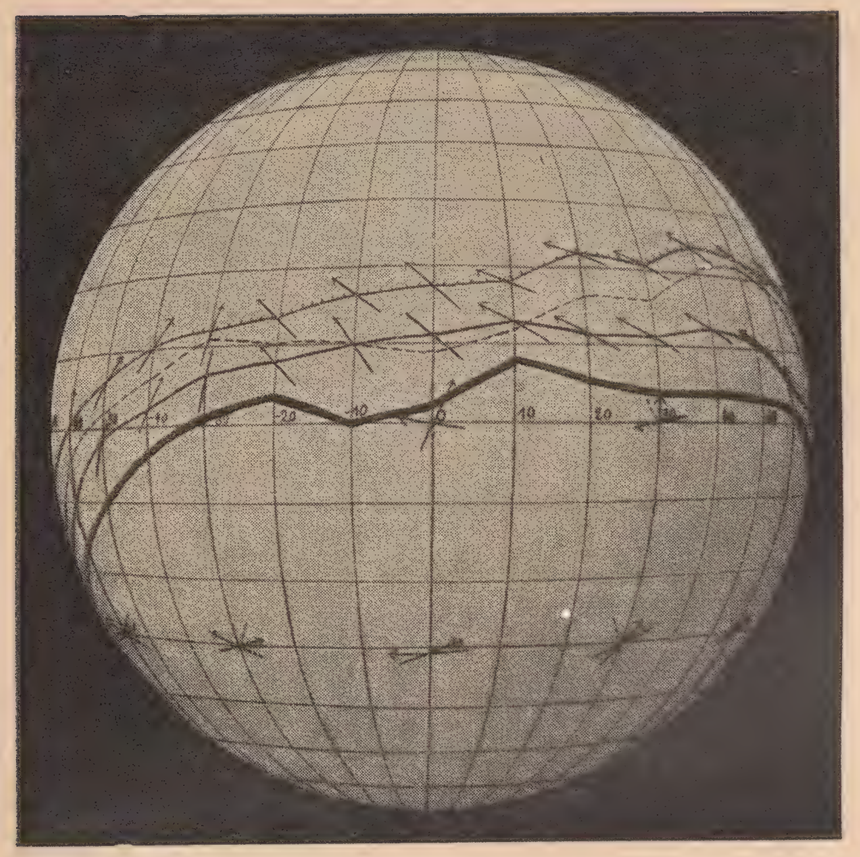
Lans (Tirol), Ansitz Heimkehr, Herbst 1929.

Ausgegeben am 19. Oktober.

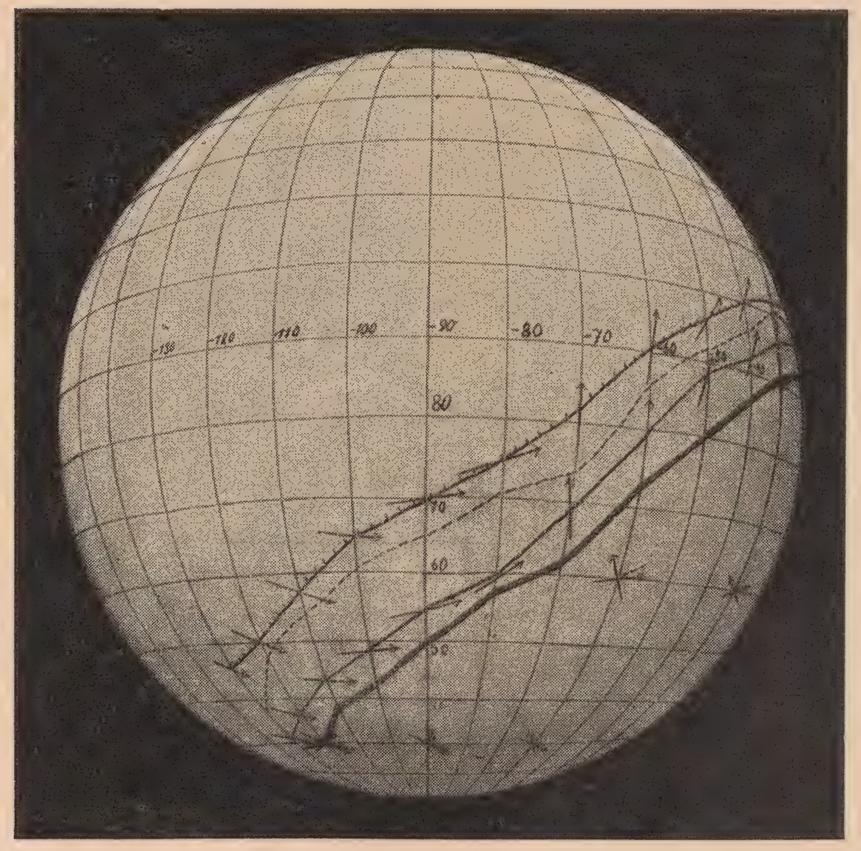
Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



Vorderansicht der Erhebungsbahn des Armes.



Seitenansicht der Erhebungsbahn des Armes.



Rückansicht der Erhebungsbahn des Armes.

Darstellung des Umfanges der selbständigen Kreiselungen in den mittleren Teilen des Bewegungsfeldes des Armes.

Blick auf die »Bewegungskugel« von lateral und unten.
Die Doppelpfeile auf dem 30., 60. und 90. Breitekreis entsprechen der äußersten Pro- bzw. Supinationsstellung der queren Ellbogenachse des Oberarmes.

Dicke ausgezogene Linie = Haut-Muskelpräparat ohne Grenzkreiselung. Punktierte Linie = Bänderpräparat mit Grenzkreiselung.
Dünne » » = » » mit » Gestrichelte » = » ohne »
Pfeile = Stellung der Ellbogenachse bei äußerster Hebung.

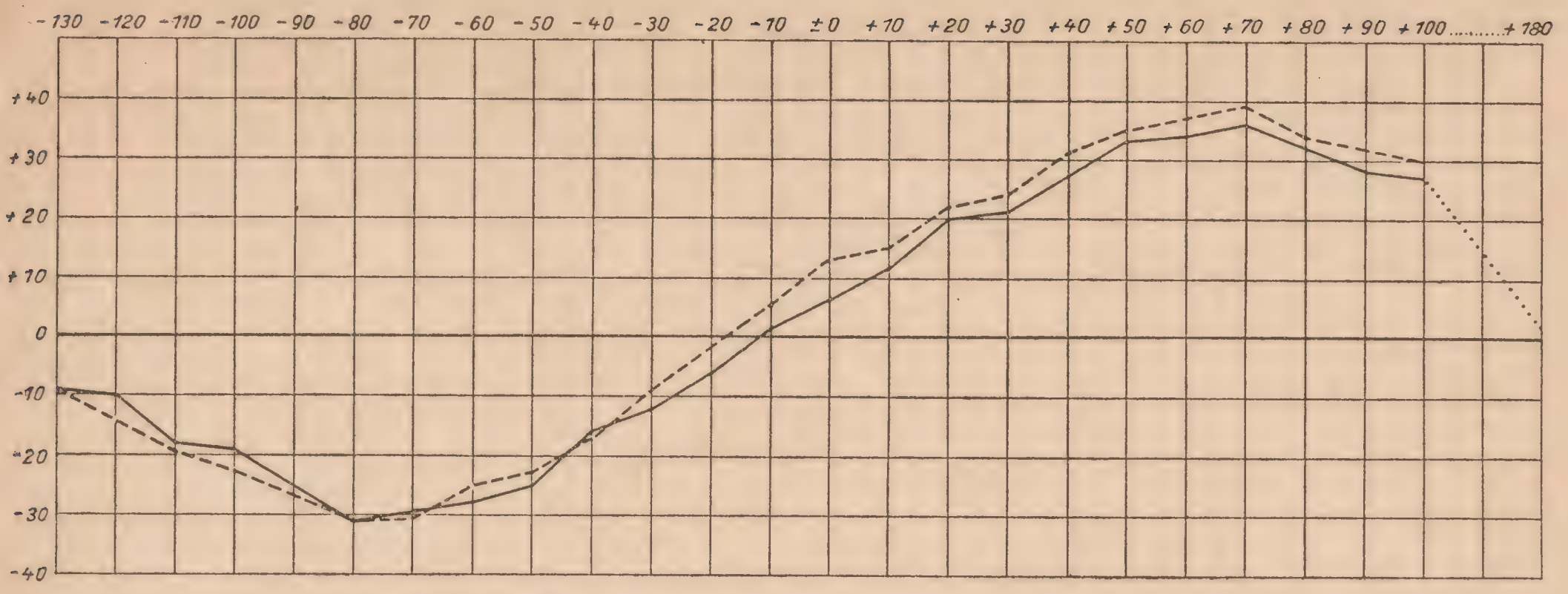


Bild 1. Verkürzungslinie des m. biceps, cpt. breve.

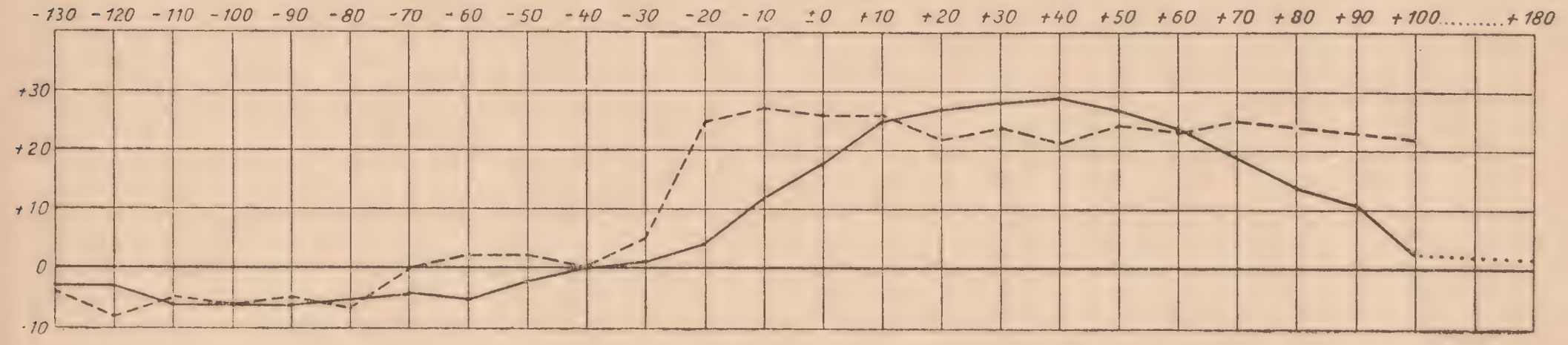


Bild 2. Verkürzungslinie des m. biceps, cpt. longum.

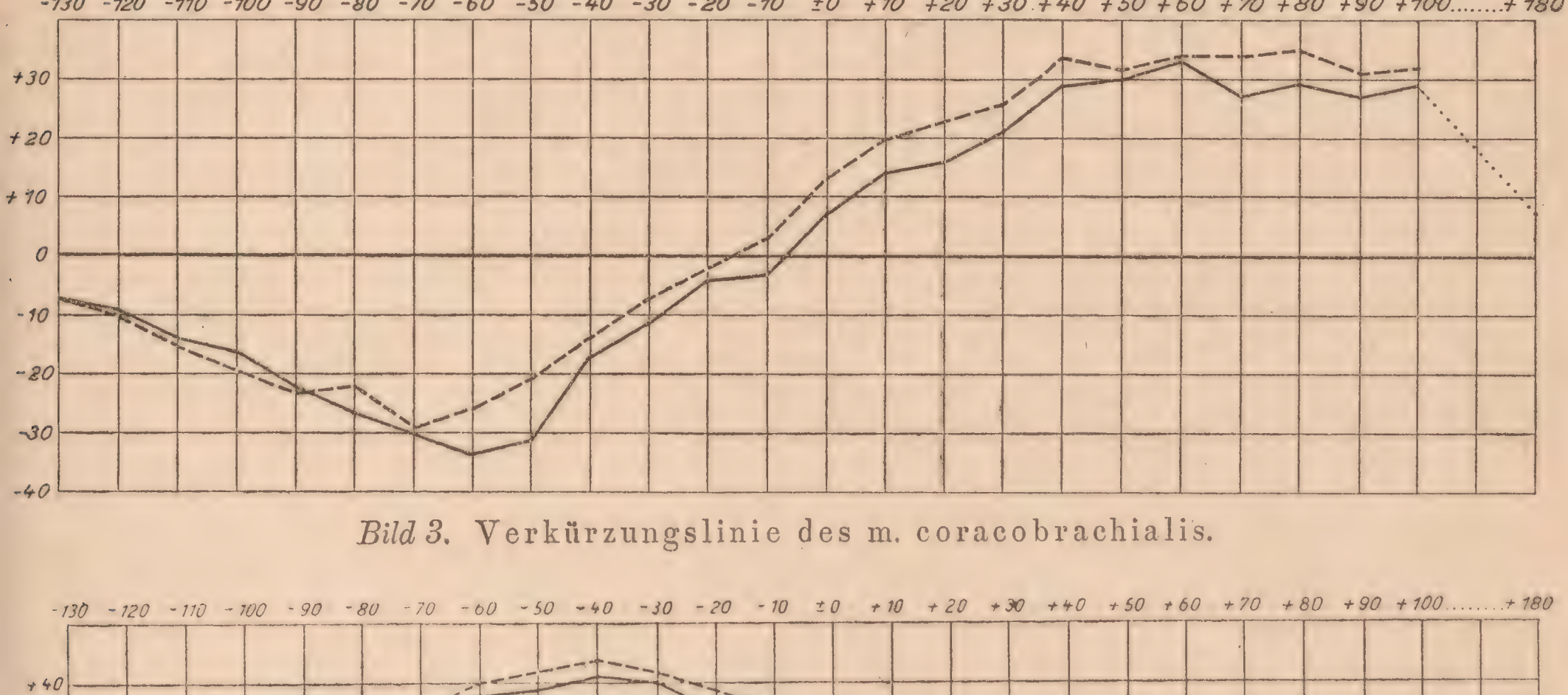


Bild 3. Verkürzungslinie des m. coracobrachialis.

Bild 4. Verkürzungslinie des m. deltoides, pars acromialis.

——— ohne Kreiselung.
- - - - - - mit Grenzkreiselung.

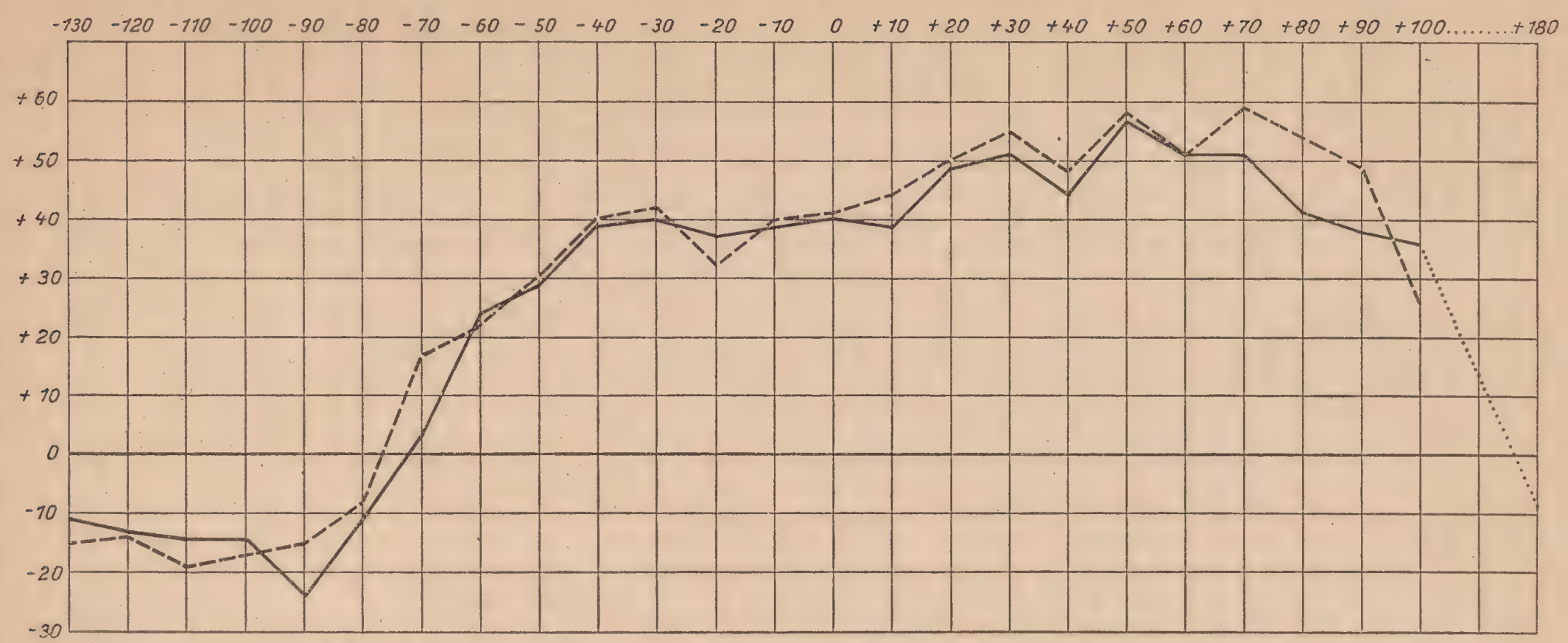


Bild 1. Verkürzungslinie des m. deltoides, pars clavicularis.

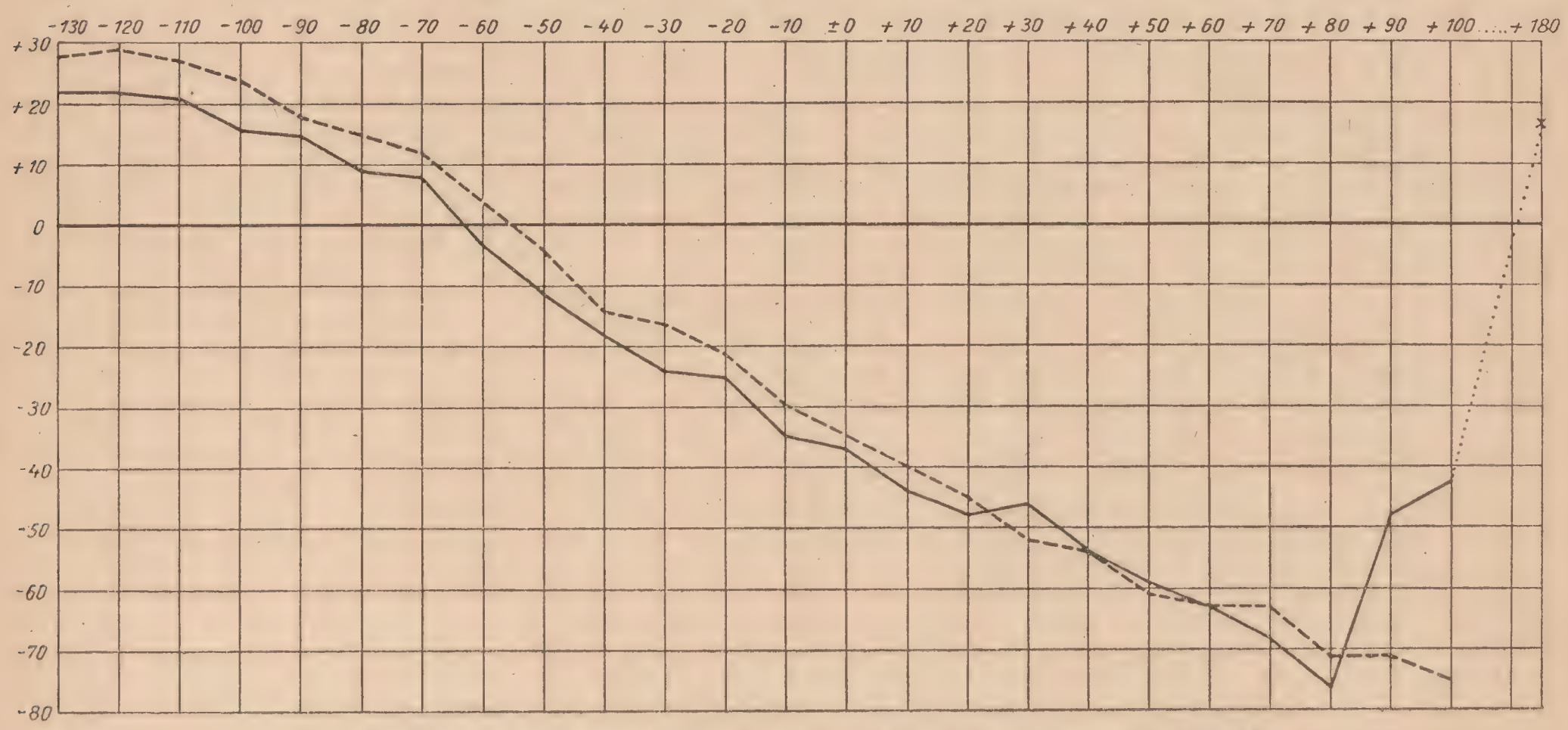


Bild 2. Verkürzungslinie des m. deltoides, pars spinalis.

——— ohne Kreiselung. - - - - - - - - - - mit Grenzkreiselung.

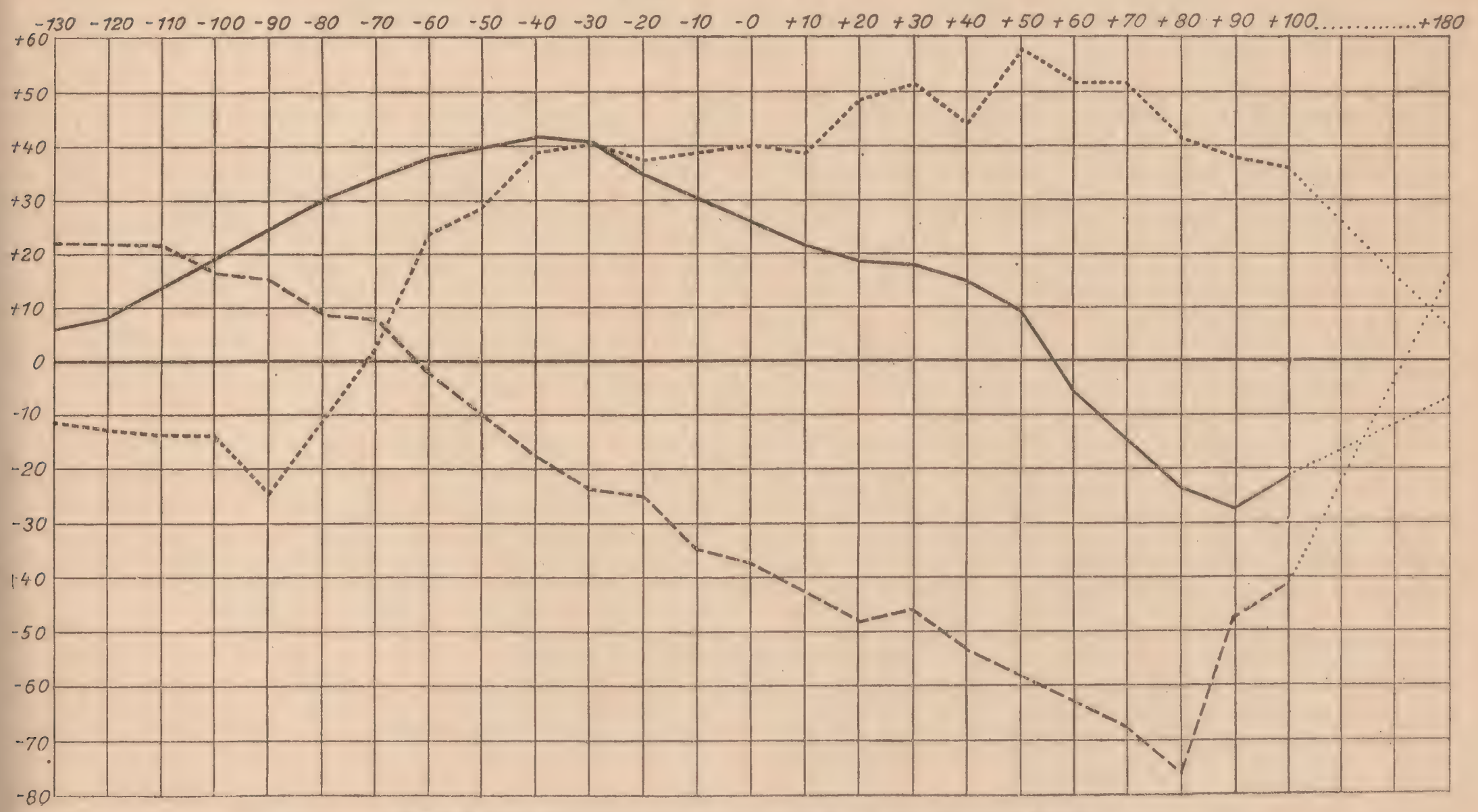


Bild 3. M. Deltoides (alle Teile auf einem Bild).

..... p. clavicularis. ——— acromialis. - - - - - - - - - - spinalis.

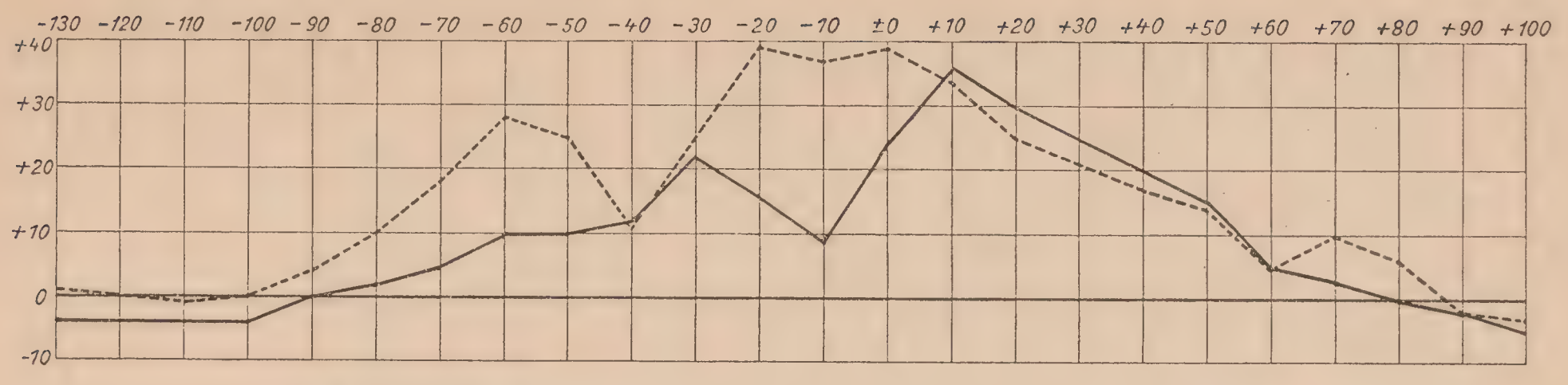


Bild 1. Verkürzungslinie des m. infraspinatus, I.

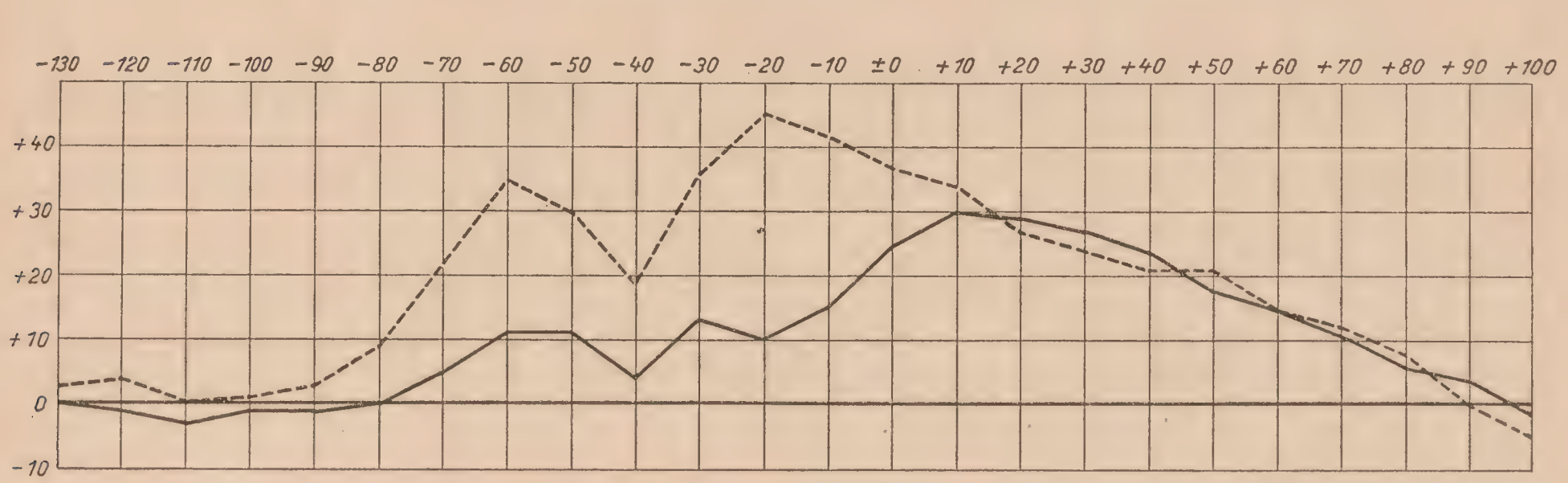


Bild 2. Verkürzungslinie des m. infraspinatus, II.

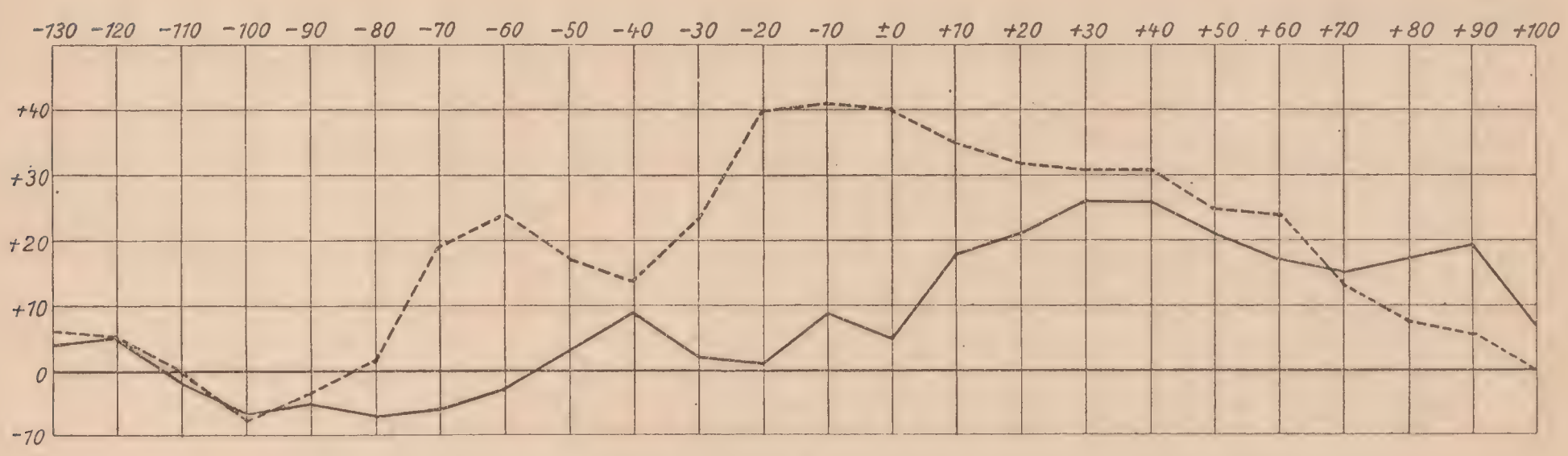


Bild 3. Verkürzungslinie des m. infraspinatus, III.

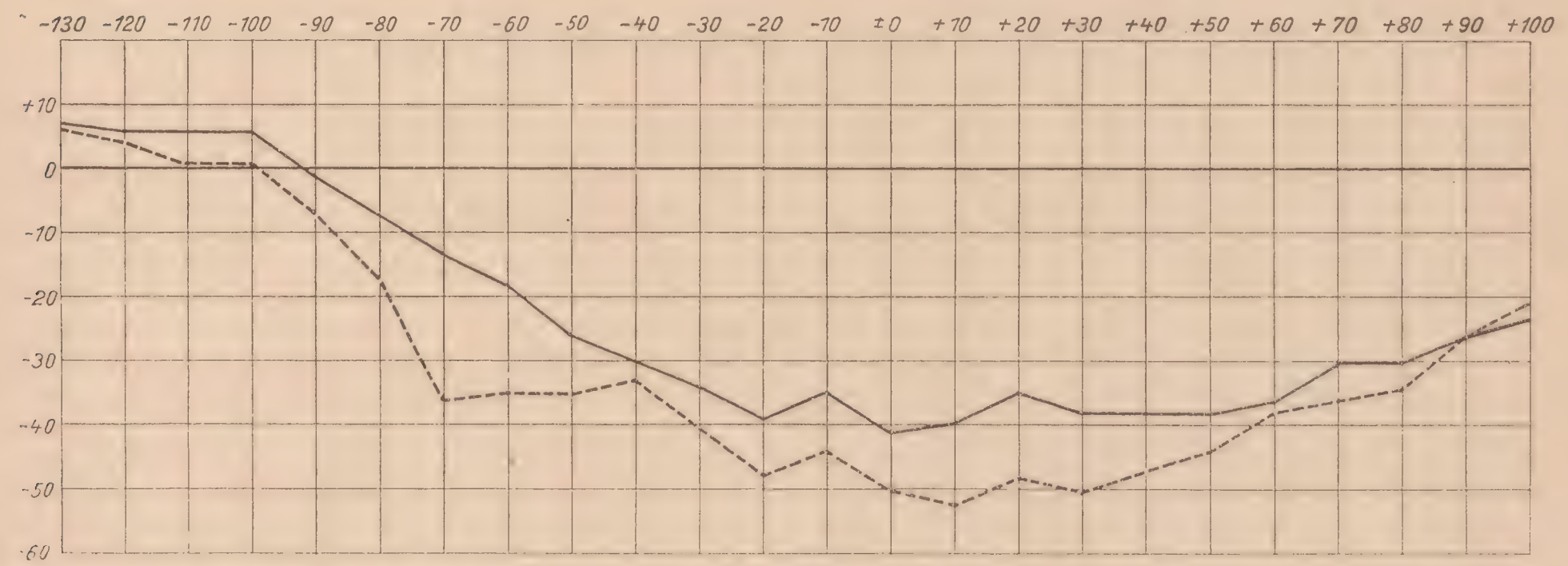


Bild 4. Verkürzungslinie des m. latissimus dorsi, pars inferior.

——— ohne Kreiselung.
····· mit Grenzkreiselung.

Bild 1. Verkürzungslinie des m. latissimus dorsi, pars superior.

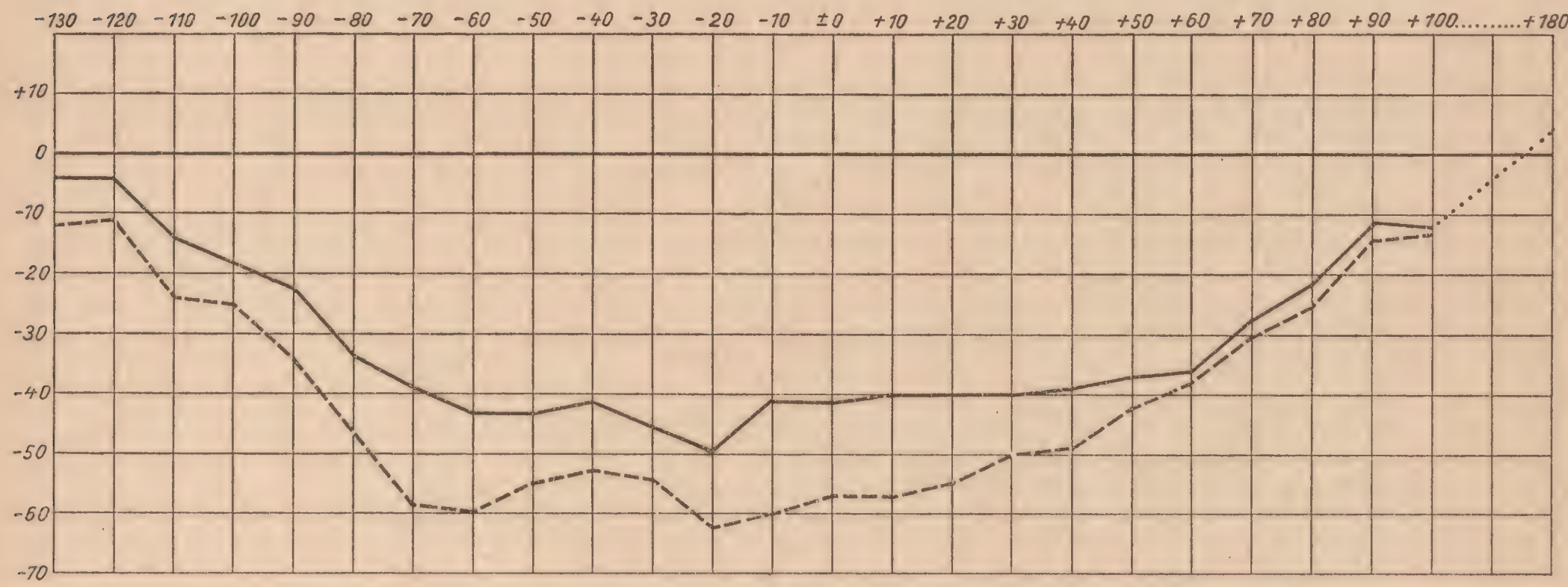


Bild 2. Verkürzungslinie des m. pectoralis mj., Bauchteil.

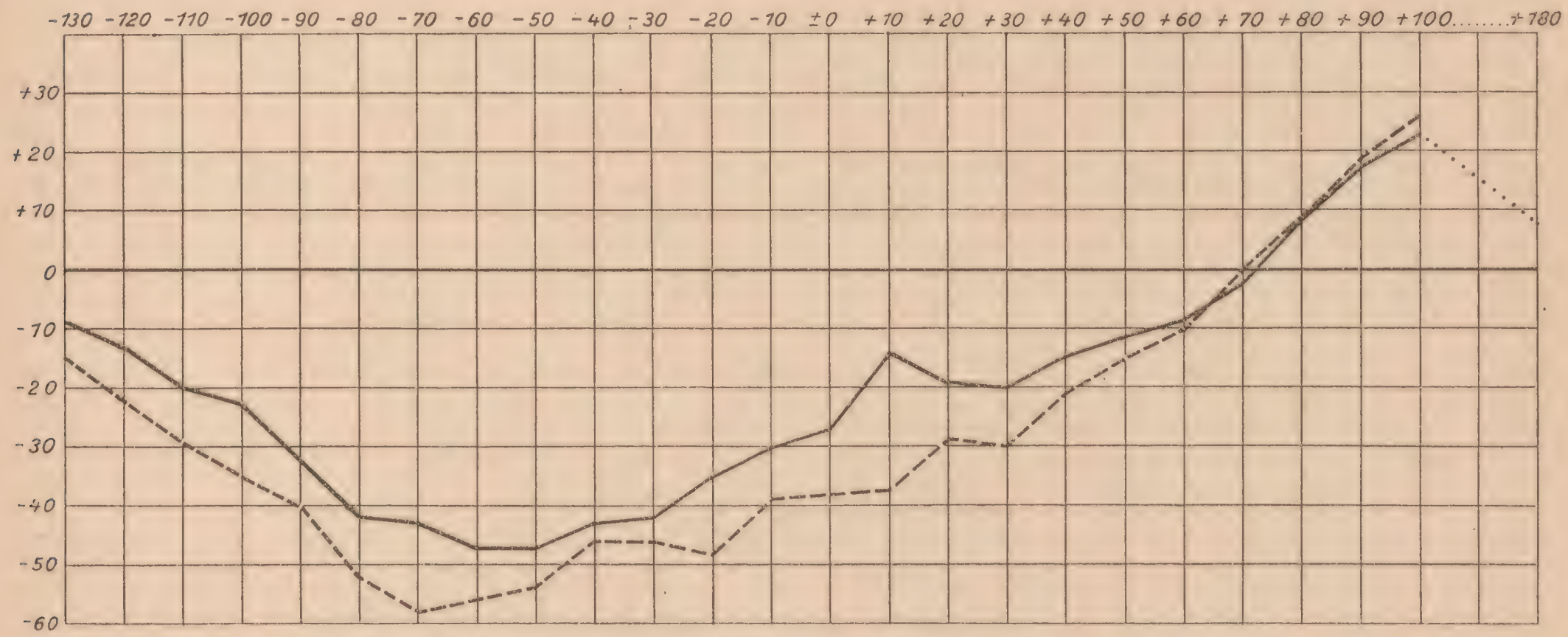


Bild 3. Verkürzungslinie des m. pectoralis mj., Brustteil.

——— ohne Kreiselung.
····· mit Grenzkreiselung.

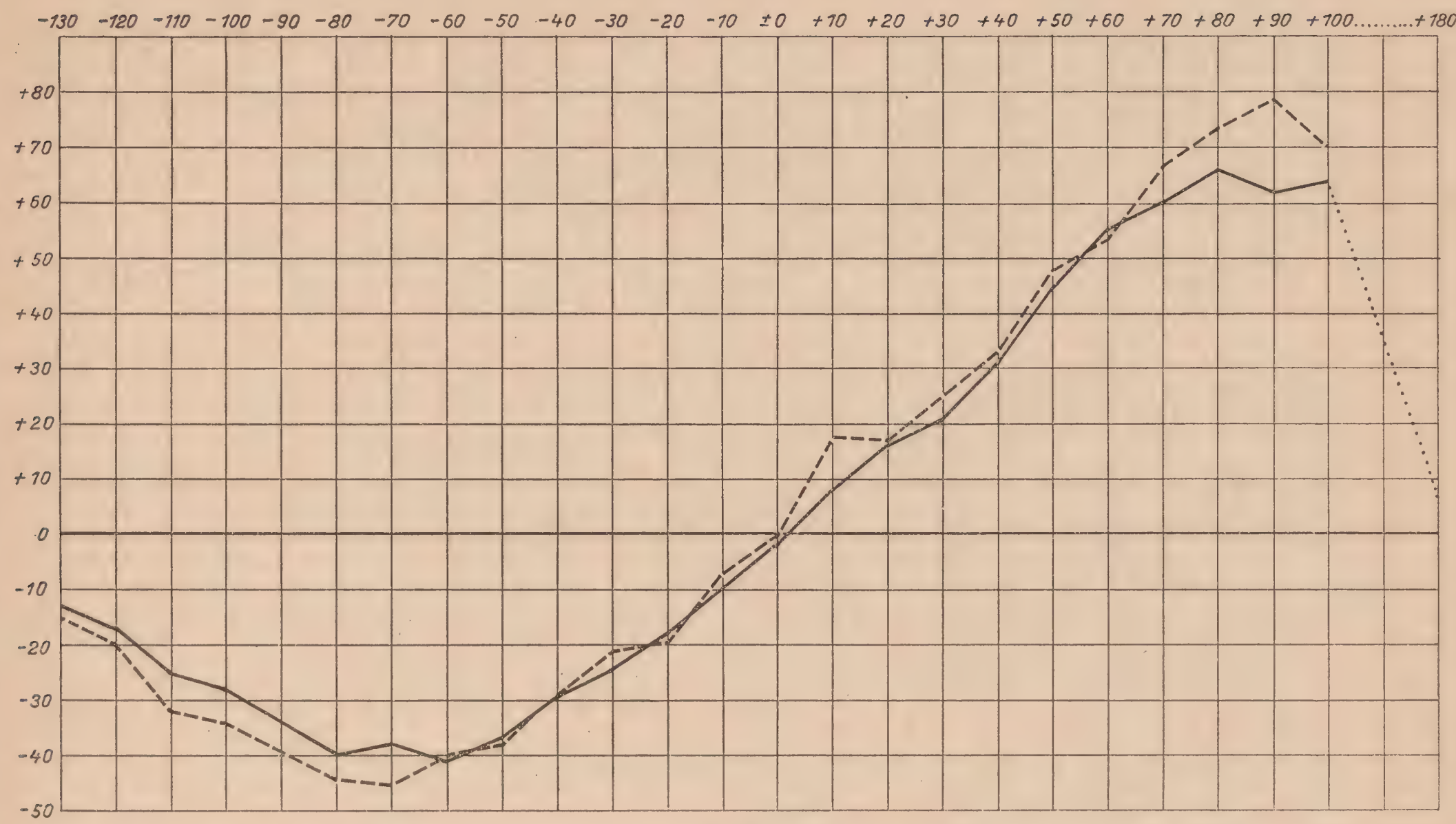


Bild 1. Verkürzungslinie des m. pectoralis mj., Schlüsselbeinteil.

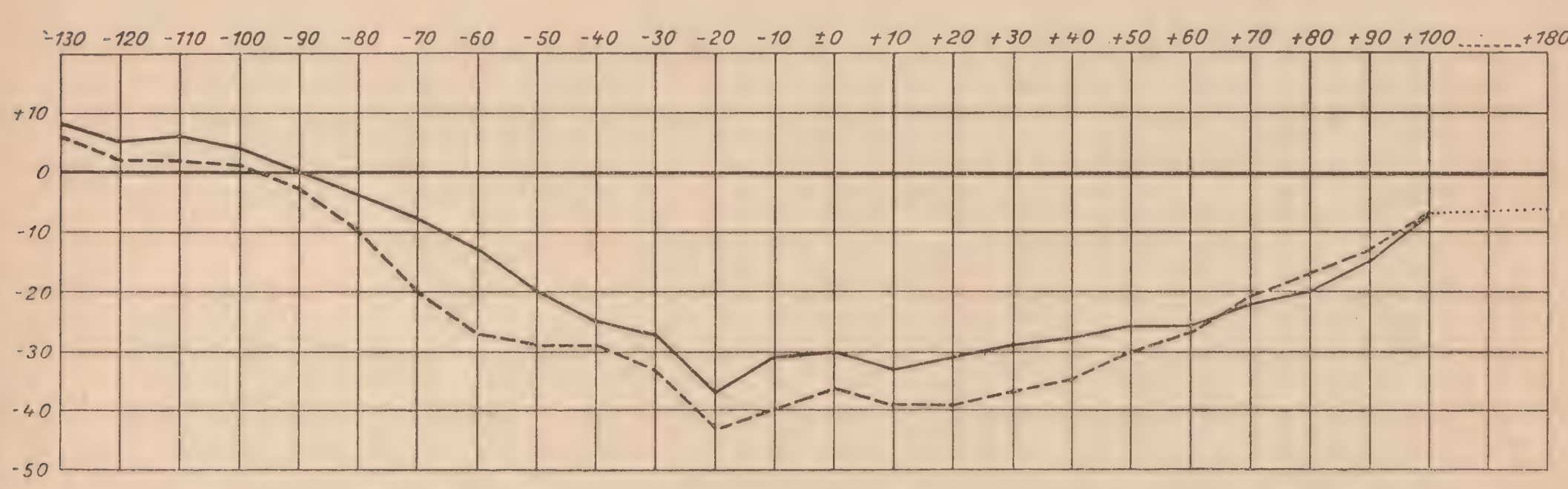


Bild 2. Verkürzungslinie des m. subscapularis, lateraler Teil.

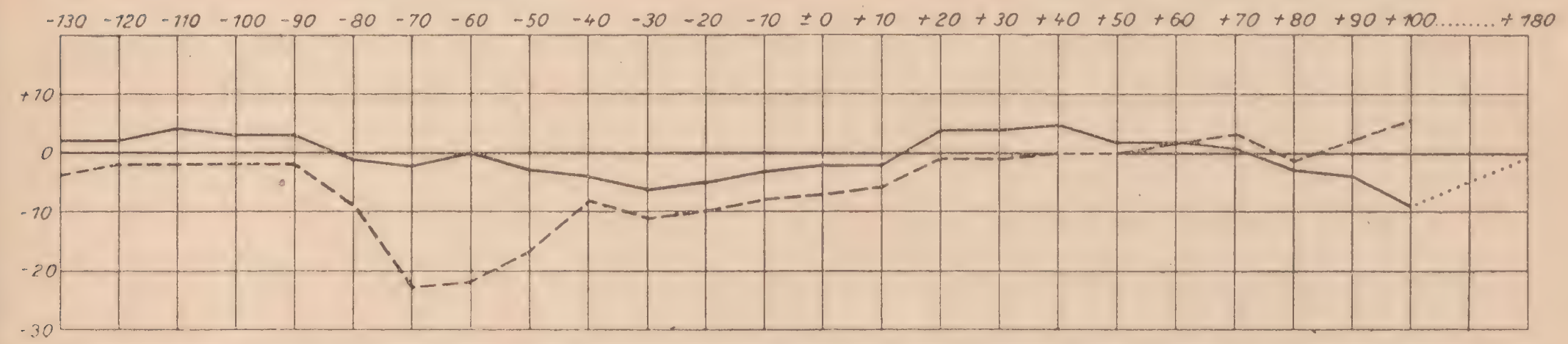


Bild 3. Verkürzungslinie des m. subscapularis, mittlerer Teil.

——— ohne Kreiselung.
..... mit Grenzkreiselung.

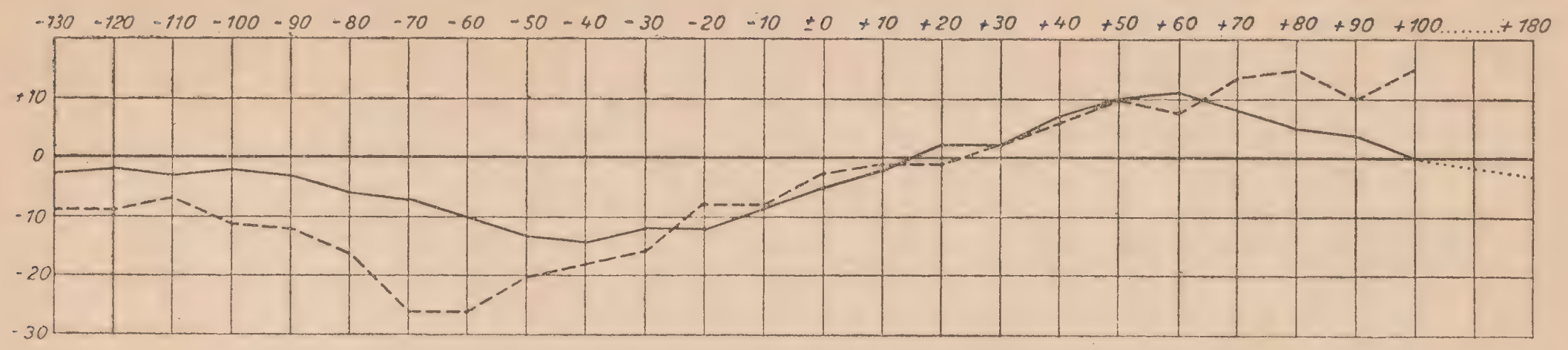


Bild 1. Verkürzungslinie des m. subscapularis, oberer Teil.

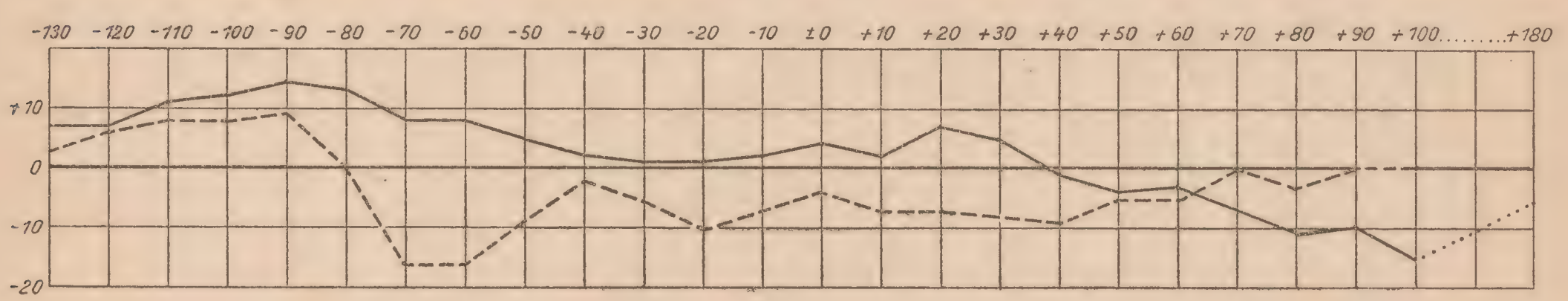


Bild 2. Verkürzungslinie des m. subscapularis, unterer Teil.

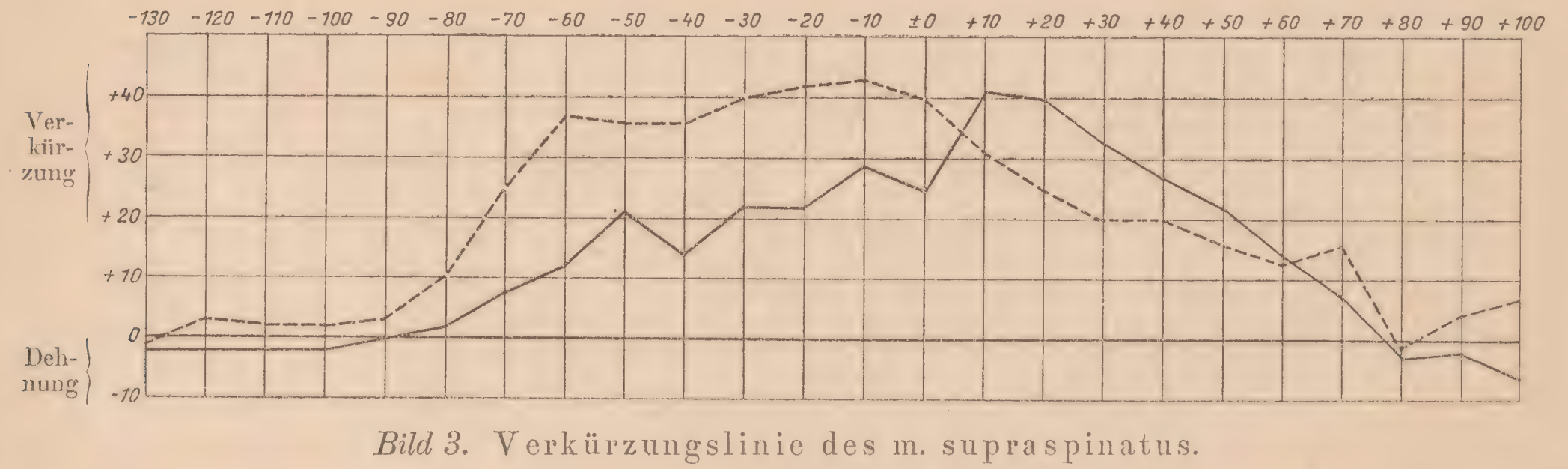


Bild 3. Verkürzungslinie des m. supraspinatus.

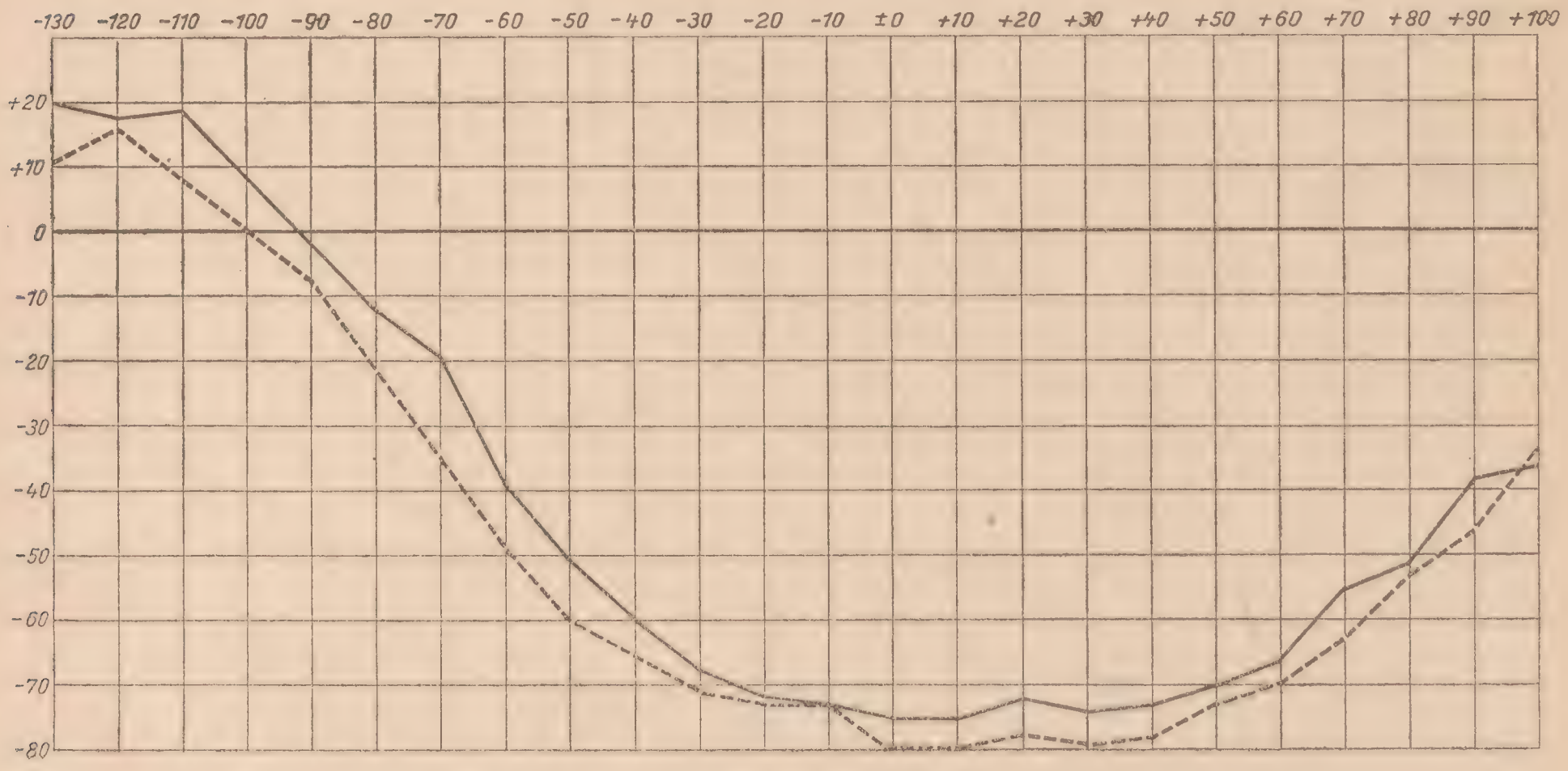


Bild 4. Verkürzungslinie des m. teres major.

——— ohne Kreiselung.
- - - - - - - - - - mit Grenzkreiselung.

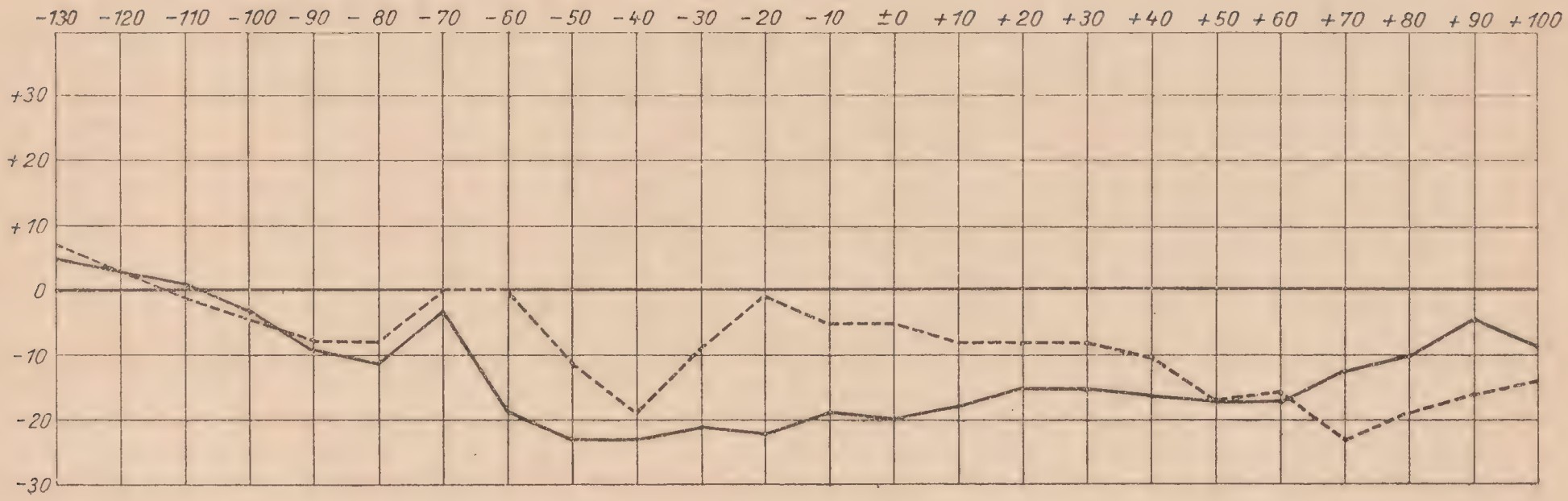


Bild 1. Verkürzungslinie des m. teres minor.

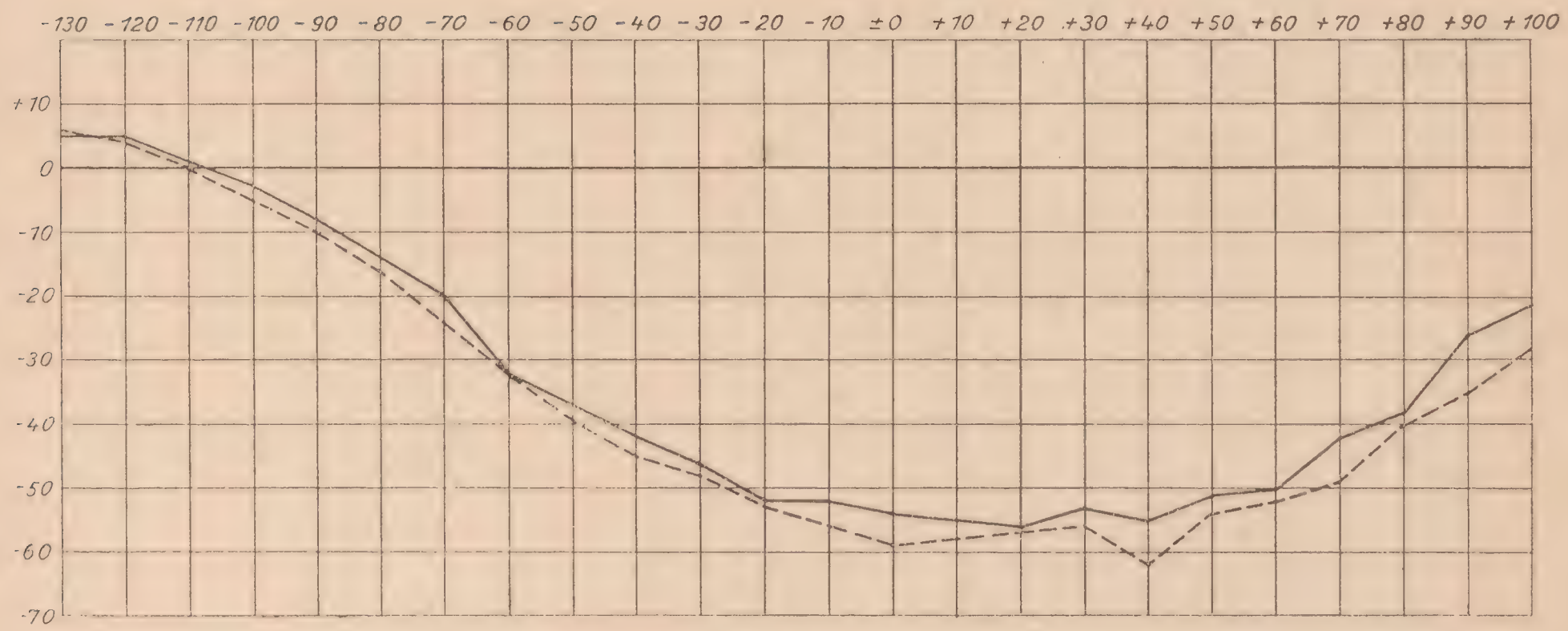


Bild 2. Verkürzungslinie des m. triceps, cpt. longum.

——— ohne Kreiselung.
. . . . . mit Grenzkreiselung.

Verkürzung bei größter Armerhebung auf den Längskreisen ohne und mit Grenzkreiselung.

M	P ohne	P mit	Biceps br.		Biceps lg.		Coracobr.		Deltoid. clavic.		Deltoid. acrom.		Deltoid. spin.		Infraspin. sup.		Infraspin. med.		Infraspin. inf.		Latissim. oberer Teil		Latissim. unterer Teil		Pector. clav.		Pector. stern.		Pector. abdom.		Subscap. ob.		Subscap. mittl.		Subscap. inf.		Subscap. lat.		Supraspinatus		Teres maj.		Teres min.		Triceps		M	P ohne	P mit
			ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit			
−130	29	31	−9	−9	−3	−4	−7	−7	−11	−15	+6	+8	+22	+28	−4	+1	0	+5	+4	+6	+26	+22	+7	+6	−13	−15	−9	−15	−4	−12	−3	−9	+2	−4	+7	+3	+8	+6	−2	−1	+20	+11	+5	+7	+5	+6	−130	29	31
−120	30	37	−10	−14	−3	−8	−9	−10	−13	−14	+8	+11	+22	+29	−4	±0	−1	+4	+5	+5	+19	+18	+6	+4	−17	−20	−13	−22	−4	−11	−2	−9	+2	−2	+7	+6	+5	+2	−2	+3	+18	+16	+3	+3	+5	+4	−120	30	37
−110	39	44	−18	−19	−6	−5	−14	−15	−14	−19	+14	+17	+21	+27	−4	−1	−3	0	−2	−1	+13	+8	+6	+1	−25	−32	−20	−29	−14	−24	−3	−7	+4	−2	+11	+8	+6	+2	−2	+2	+12	+9	+1	−1	+1	0	−110	39	44
−100	42	49	−19	−22	−6	−6	−16	−19	−14	−17	+19	+22	+16	+24	−4	±0	−1	+1	−7	−8	+4	−3	+6	+1	−28	−34	−23	−35	−18	−25	−2	−11	+3	−2	+12	+8	+4	+1	−2	+2	+8	+1	−3	−4	−3	−5	−100	42	49
−90	50	55	−25	−26	−6	−5	−22	−23	−24	−15	+24	+27	+15	+18	0	+4	−1	+3	−5	−4	−9	−15	−1	−7	−34	−39	−33	−40	−22	−34	−3	−12	+3	−2	+14	+9	0	−3	0	+3	−2	−7	−9	−8	−8	−10	−90	50	55
−80	58	60	−31	−31	−5	−6	−26	−22	−11	−8	+30	+30	+9	+15	+2	+10	0	+9	−7	+1	−25	−34	−7	−17	−40	−44	−42	−52	−34	−47	−6	−16	−1	−9	+13	0	−4	−10	+2	+10	−12	−21	−11	−8	−14	−16	−80	58	60
−70	61	69	−29	−30	−4	0	−30	−29	+3	+17	+34	+35	+8	+12	+5	+18	+5	+22	−6	+19	−38	−53	−13	−36	−38	−45	−43	−58	−39	−59	−7	−26	−2	−23	+8	−16	−8	−20	+8	+25	−19	−35	−3	0	−20	−24	−70	61	69
−60	73	80	−28	−25	−5	+2	−33	−26	+24	+22	+38	+40	−3	+4	+10	+28	+11	+35	−3	+24	−57	−66	−18	−35	−41	−40	−47	−56	−43	−60	−10	−26	0	−22	+8	−16	−13	−27	+12	+37	−39	−49	−19	0	−32	−32	−60	73	80
−50	80	89	−25	−23	−2	+2	−31	−21	+29	+30	+39	+42	−11	−4	+10	+25	+11	+30	+3	+17	−71	−80	−26	−35	−37	−38	−47	−54	−43	−55	−13	−20	−3	−17	+5	−9	−20	−29	+21	+36	−51	−60	−23	−11	−37	−39	−50	80	89
−40	87	92	−16	−17	0	0	−17	−14	+39	+40	+41	+44	−18	−14	+12	+11	+4	+19	+9	+14	−84	−87	−30	−33	−29	−29	−43	−46	−41	−53	−14	−18	−4	−8	+2	−2	−25	−29	+14	+36	−60	−65	−23	−19	−42	−45	−40	87	92
−30	91	96	−12	−9	+1	+5	−11	−7	+40	+42	+40	+42	−24	−16	+22	+25	+13	+36	+2	+23	−90	−93	−34	−40	−24	−21	−42	−46	−45	−54	−12	−16	−6	−11	+1	−5	−27	−33	+22	+40	−68	−71	−21	−9	−46	−48	−30	91	96
−20	94	98	−6	−2	+4	+25	−4	+2	+37	+32	+35	+39	−25	−21	+16	+39	+10	+45	−1	+40	−97	−101	−39	−48	−18	−19	−35	−48	−50	−62	−12	−8	−5	−10	+1	−10	−37	−43	+22	+42	−72	−73	−22	−1	−52	−53	−20	94	98
−10	90	100	+1	+5	+12	+27	−3	+3	+39	+40	+30	+36	−35	−30	+9	+37	+15	+42	+9	+41	−98	−102	−35	−44	−10	−7	−30	−39	−41	−60	−9	−8	−3	−8	+2	−7	−31	−40	+29	+43	−73	−73	−19	−5	−52	−56	−10	90	100
±0	92	101	+6	+13	+18	+26	+7	+13	+40	+41	+26	+35	−37	−35	+24	+39	+25	+37	+5	+40	−103	−105	−41	−50	−2	±0	−27	−38	−41	−57	−5	−3	−2	−7	+4	−4	−30	−36	+25	+40	−75	−80	−20	−5	−54	−59	±0	92	101
+10	97	103	+11	+15	+25	+26	+14	+20	+39	+44	+21	+28	−44	−40	+36	+34	+30	+34	+18	+35	−106	−109	−40	−52	+8	+18	−14	−37	−40	−57	−2	−1	−2	−6	+2	−7	−33	−39	+41	+31	−75	−80	−18	−8	−55	−58	+10	97	103
+20	95	101	+20	+22	+27	+22	+16	+23	+49	+50	+19	+29	−48	−45	+30	+25	+29	+27	+21	+32	−104	−110	−35	−48	+16	+17	−19	−29	−40	−55	+2	−1	+4	−1	+7	−7	−31	−39	+40	+25	−72	−78	−15	−8	−56	−57	+20	95	101
+30	94	101	+21	+24	+28	+24	+21	+26	+51	+55	+18	+22	−46	−52	+25	+21	+27	+24	+26	+31	−113	−105	−38	−50	+21	+25	−20	−30	−40	−50	+2	+2	+4	−1	+5	−8	−29	−37	+33	+20	−74	−79	−15	−8	−53	−56	+30	94	101
+40	94	103	+27	+31	+29	+21	+29	+34	+44	+48	+15	+16	−54	−54	+20	+17	+24	+21	+26	+31	−100	−104	−38	−47	+31	+33	−15	−21	−39	−49	+7	+6	+5	0	−1	−9	−28	−35	+27	+20	−73	−78	−16	−10	−55	−62	+40	94	103
+50	94	100	+33	+35	+27	+24	+30	+32	+57	+58	+9	+10	−59	−61	+15	+14	+18	+21	+21	+25	−96	−99	−38	−44	+45	+48	−11	−15	−37	−42	+10	+10	+2	0	−4	−5	−26	−30	+22	+16	−70	−73	−17	−17	−51	−54	+50	94	100
+60	92	94	+34	+37	+24	+23	+33	+34	+51	+51	−6	+2	−63	−63	+5	+5	+15	+15	+17	+24	−92	−93	−36	−38	+55	+52	−9	−10	−36	−38	+11	+8	+2	+1	−3	−5	−26	−27	+14	+13	−66	−70	−17	−16	−50	−52	+60	92	94
+70	80	91	+36	+39	+19	+25	+27	+34	+51	+59	−15	−4	−68	−63	+3	+10	+11	+12	+15	+13	−79	−85	−30	−36	+60	+67	−2	0	−27	−30	+8	+14	+1	+3	−7	0	−22	−21	−7	+16	−55	−63	−12	−23	−42	−49	+70	80	91
+80	72	80	+32	+36	+14	+24	+29	+35	+41	+54	−24	−16	−76	−71	0	+6	+6	+8	+17	+8	−64	−70	−30	−34	+66	+74	+9	+9	−21	−25	+5	+15	−3	−1	−11	−3	−20	−17	−3	−1	−51	−53	−10	−19	−38	−40	+80	72	80
+90	59	73	+28	+32	+11	+23	+27	+31	+38	+49	−27	−26	−48	−71	−2	−2	+4	0	+19	+6	−50	−60	−26	−26	+62	+79	+18	+19	−11	−14	+4	+10	−4	+2	−10	0	−15	−13	−2	+4	−38	−46	−4	−16	−26	−35	+90	59	73
+100	51	65	+27	+30	+3	+22	+29	+32	+36	+26	−21	−25	−42	−75	−5	−3	−5	−5	+6	0	−48	−48	−23	−21	+64	+70	+23	+26	−12	−13	0	+15	−9	+11	−15	0	−7	−7	−6	+7	−36	−35	−8	−14	−21	−28	+100	51	65
+180	20		+2		+2		+7		−9		−6		+16		−2		−1		+2		+23		+6		+6		+8		+3		+3		−1		−6		−6		−6		+19		+10		+1		+180	20	

Grundstellung.

M	P	Pect. stern.		Pect. unt.	
		P.	S.	P.	S.
−120	30	+3	−22	+1	−23
−90	30	+10	−29	+3	−33
	60	+1	−11	+2	−12
−60	30	+18	−23	+14	−27
	60	+2	−16	+8	−9
−30	30	+10	−28	+13	−21
	60	+4	−25	+9	−26
	90	0	−17	+1	−20
0	0	+12	−19	+6	−8
	30	+16	−23	+17	−17
	60	+16	−22	+13	−25
	90	+5	−18	+6	−17
+30	30	+8	−23	+12	−15
	60	+16	−20	+19	−12
	90	+5	−14	+4	−17
+60	30	+15	+18	+12	−5
	60	+19	−11	+18	−6
	90	+7	—	0	—
+90	30	+19	−10	+9	−3
	60	+10	−4	+10	−2

skeln.

Verkürzung bei größter Kreiselung aus der Grundstellung.

M	P	Pron.	Sup.	Biceps brev.		Biceps lg.		Coracobrach.		Deltoid. clav.		Deltoid. acr.		Deltoid. spin.		Infraspin. sup.		Infraspin. med.		Infraspin. inf.		Latiss. ob.		Latiss. unt.		Pectoralis		Pect. stern.		Pect. unt.		Subscap. ob.		Subscap. mitt.		Subscap. unt.		Subscap. lat.		Supra. spin.		Teres maj.		Teres min.		Triceps	
				P.	S.	P.	S.	P.	S.	Pr.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	clavic.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.	P.	S.
−120	30	15	65	−2	−2	+5	−4	−2	+2	−3	−8	−4	+3	−5	+9	−5	+26	−4	+25	−5	+20	0	−10	+4	−13	+4	−7	+3	−22	+1	−23	+4	−24	+5	−25	+6	−24	+2	−12	−1	+8	+4	−10	0	+8	−1	−1
−90	30	40	90	−8	−7	+7	+3	−9	−2	+1	−7	−5	−3	−5	+11	−11	+32	−12	+36	−7	+21	−4	−14	+6	−20	0	−13	+10	−29	+3	−33	+8	−34	+14	−36	+15	−30	+3	−19	−5	+29	+7	−15	−6	+21	−6	−4
	60	5	40	−1	+1	+1	−2	0	+4	+1	0	−3	0	−1	+4	−4	+12	−2	+13	−2	+4	+1	−5	+2	−12	+2	−2	+1	−11	+2	−12	0	−19	0	−18	0	−15	0	−6	−4	+11	0	−10	−1	+5	−3	+1
−60	30	55	85	−10	−9	+9	+9	−12	+3	−2	−8	−6	−6	−10	+2	−13	+32	−14	+34	−12	+32	+4	−13	+11	−19	+3	−5	+18	−23	+14	−27	+11	−28	+17	−34	+20	−27	0	−19	−5	+19	+6	−15	−9	+25	−6	−2
	60	25	90	−2	+6	+1	+14	−7	+6	+1	−7	−2	−2	−1	+11	−9	+34	−11	+33	−5	+24	+1	−10	+5	−23	+2	0	+2	−16	+8	−9	+6	−21	+4	−32	+7	−35	+2	−18	−10	+32	+4	−12	−5	+28	−1	+4
−30	30	65	85	−12	−2	+1	+2	−10	+4	+4	−3	−7	0	−9	+5	−12	+29	−12	+32	−13	+36	+3	−13	+14	−22	+2	−8	+10	−28	+13	−21	+11	−24	+20	−28	+20	−35	+2	−18	−5	+20	+7	−14	−15	+24	−7	−3
	60	45	95	−9	0	−2	+11	−11	+4	+3	−10	−5	−4	−2	+6	−11	+29	−13	+36	−16	+35	+2	−13	+14	−15	+7	0	+4	−25	+9	−26	+7	−11	+10	−26	+12	−34	+2	−20	−10	+21	+9	−8	−13	+26	−4	0
	90	5	95	−1	+3	0	+20	−2	+3	0	−7	0	−2	−1	0	−2	+21	−2	+25	−3	+27	+1	−5	+2	−17	+1	−6	0	−17	+1	−20	0	0	0	−10	+1	−19	0	−17	−2	+28	+2	−4	−5	+25	−1	−6
0	0	55	65	−2	−1	+11	−2	−5	+5	+8	+3	−6	+1	−8	+10	−10	+30	−9	+29	−10	+28	+3	−5	+8	−7	+5	−10	+12	−19	+6	−8	+15	−26	+20	−24	+17	−17	+7	−12	+2	+18	+8	−8	−11	+19	−5	0
	30	70	85	−9	−6	+1	−5	−12	+2	+3	−4	−7	−2	−6	+4	−10	+26	−11	+20	−10	+38	+5	−11	+20	−13	+4	−8	+16	−23	+17	−17	+9	−28	+20	−30	+15	−35	+1	−18	+2	+19	+6	−15	−19	+26	−5	−1
	60	65	95	−4	+2	−8	−2	−10	+4	+3	−5	−7	−2	−6	0	−11	+13	−14	+26	−10	+32	+4	−7	+15	−20	+6	−11	+16	−22	+13	−25	+2	−17	+7	−25	+13	+28	−1	−22	−12	+6	+6	−9	−22	+25	0	+3
	90	25	85	−3	+3	−11	−6	−3	+6	+1	−3	−3	+1	−1	−3	−3	+3	−6	+15	−10	+16	+1	−4	+6	−18	+2	−7	+5	−18	+6	−17	0	+3	+2	−12	0	−21	0	−14	0	+2	+3	−4	−8	+19	0	+2
+30	30	70	75	−4	−1	0	−11	−3	+5	−2	−4	−5	−4	−9	+2	−10	+23	−10	+28	−15	+14	+3	−12	+14	−11	+5	−12	+8	−23	+12	−15	+12	−25	+18	−26	+20	−30	0	−17	+8	+19	+3	−15	−20	+23	−7	−1
	60	65	80	−3	−3	−6	−17	−4	+3	+1	−2	−5	0	−5	−2	−3	+10	−7	+15	−10	+22	−1	−13	+16	−12	0	−13	+16	−20	+19	−12	0	−20	+12	−24	+15	−26	+6	−14	+5	+3	+6	−9	−21	+23	−6	−2
	90	30	65	−1	−2	−3	−13	−2	+5	0	−2	+2	−3	+3	−3	+3	−4	0	+1	−4	+9	0	−5	+7	−16	+7	−13	+5	−14	+4	−17	+1	−8	+1	−13	+2	−22	+7	−10	+6	−10	+2	−5	−6	+13	+1	−3
+60	30	65	60	−5	−2	+11	−21	−7	+1	+4	−7	−8	−3	−13	+2	−5	+18	−10	+22	−14	+25	0	−15	+4	−7	+7	−15	+15	+18	+12	−5	+14	−27	+19	−22	+22	−21	+2	−15	+6	+14	+6	−14	−19	+20	−7	−2
	60	65	55	−6	−7	+9	−13	−5	+2	−1	−7	−6	−4	−17	−10	0	+9	−2	+16	−3	+15	+2	−11	+11	−9	+8	−8	+19	−11	+18	−6	+6	−22	−13	−19	+17	−20	+8	−16	+4	+3	+3	−12	−23	+17	−5	−3
	90	40	0	−2	−	+6	−	−1	−	+4	−	+9	−	+3	0	+11	0	+4	0	0	0	+3	−	+9	0	+6	−	+7	−	0	−	+7	−	+8	−	+10	−	+3	−	+10	0	+8	0	−9	0	+2	−
+90	30	60	45	−3	0	+13	−11	−7	0	+4	−5	−3	0	−11	+1	−2	+24	−7	+20	−11	+22	+10	−4	+12	−2	+8	−10	+19	−10	+9	−3	+22	−19	+23	−19	+18	−13	+10	−10	+8	+11	+10	−1	−16	+13	−7	−3
	60	60	30	0	−5	+20	−8	−4	−2	+6	−8	+3	−3	−7	−8	−2	+9	−8	+10	−12	+14	+8	−8	+10	−3	+10	−9	+10	−4	+10	−2	+18	−13	+20	−15	+15	−13	+13	−6	+10	+5	+10	−4	−16	+12	−2	0

1929 XXIV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Library of Congress
MAY 8 1930
Smithsonian Deposit

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 17. Oktober. (S. 485)

Adresse an Hrn. Heinrich Finke zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. August 1929. (S. 488)

Adresse an Hrn. Rudolf Thurneysen zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 17. September 1929. (S. 490)

Johnsen: Über den β-Salmiak und verwandte Kristallarten. (Mitteilung aus der Sitzung der phys.-math. Klasse vom 11. Juli.) (S. 492)

MIT TAFEL XI

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XXIV. Gesamtsitzung. 17. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

1. Hr. Meinecke sprach aus Anlaß des von R. Hübner veröffentlichten Briefwechsels J. G. Droysens über Fragen der deutschen Geschichtschreibung und insbesondere über die Entstehung der Droysenschen Konzeption des Hellenismus. (Ersch. später.)

2. Hr. Lüders überreichte eine Arbeit des korrespondierenden Mitgliedes Hrn. Hermann Jacobi in Bonn »Über das ursprüngliche Yogasystem«. (Ersch. später.)

Ausgehend von der Erwägung, daß Yoga und Sānkhya ursprünglich als gleichberechtigte Philosopheme nebeneinander standen, schließlich aber das Yogasūtra Patanjalis, unsere älteste Quelle, seine Abhängigkeit vom Sānkhya unumwunden zugibt, wird versucht, diejenigen Yogalehren im Sūtra, welche nicht aus dem Sānkhya stammen, festzustellen und sie als Bestandteile des ursprünglichen Yoga in Anspruch zu nehmen. So werden die Grundzüge des Systems, des praktischen Yoga und der vom Sānkhya unbeeinflußten Metaphysik desselben in je einem Abschnitt nachgewiesen. Nebenbei ergibt sich, daß Patanjali großzügig sich aneignete, was er in indischen Religionen, auch heterodoxen, Wertvolles fand. Sein Verhältnis zum Buddhismus wird im letzten Abschnitt eingehend dargelegt.

3. Hr. Sachau übersandte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. Josef Schacht in Freiburg i. Br.: »Aus Kairiner Bibliotheken (II)«. (Abh.)

Die vorliegende Abhandlung behandelt die Literatur der großen Rechtsgründer wie Abû Ḥanîfa, Schaibâni und anderer.

4. Hr. Heymann überreichte seinen Aufsatz »Wechselzeichnung der Sparkassen« (Sonderabdruck, Berlin und Leipzig 1929).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Exner-Ewarten in Wien übersandte sein Werk »Karten der atmosphärischen Zirkulation auf der nördlichen Halbkugel vom 1. Jänner bis 31. März 1910« (Wien 1929) sowie Sonderabdrucke seiner Arbeiten »Zur Theorie der Fallgeschwindigkeit von Regentropfen« (Leipzig 1929) und »Gravitationswellen in der Atmosphäre« (Wien 1929).

6. Vorgelegt wurden von Hrn. Marcks der 23. Bd. der »Urkunden und Aktenstücke zur Geschichte des Kurfürsten Friedrich Wilhelm von Brandenburg« (Berlin und Leipzig 1929) und der 4. Bd. des »Deutschen Biographischen Jahrbuchs«: »Das Jahr 1929« (Berlin und Leipzig 1929); von Hrn. Lüders der 33. Bd. der »Deutschen Texte des Mittelalters«: »Johann Hartliebs Über-

setzung des Dialogus Miraculorum von Caesarius von Heisterbach«, hrsg. von Karl Drescher † (Berlin 1929), die 21. Lief. des »Rheinischen Wörterbuches«, bearbeitet und herausgegeben von Josef Müller (Berlin und Bonn 1929) und die 3. Lief. des 2. Bandes des »Hessen-Nassauischen Wörterbuches« (Marburg 1929); von Hrn. Guthnick der 11. Bd. der »Geschichte des Fixsternhimmels« (Karlsruhe 1929); von Hrn. Hesse die 11. Lief. des »Nomenclator animalium generum et subgenerum« (Berlin 1929); von Hrn. Bieberbach der 4. Bd. von »Leopold Kroneckers Werken« (Leipzig und Berlin 1929).

7. Hr. Stutz überreichte das 109. und 110. Heft der von ihm herausgegebenen »Kirchenrechtlichen Abhandlungen«: »Die Landdekanate des Bistums Konstanz im Mittelalter« von Dr. Joseph Ahlhaus (Stuttgart 1929) und das 4. Heft der »Veröffentlichungen der Historischen Kommission für die Provinz Brandenburg und die Reichshauptstadt Berlin«: »Die brandenburgischen Kirchenvisitations-Abschiede und -Register des XVI. und XVII. Jahrhunderts«, 1. Bd.: Die Prignitz, hrsg. von Victor Herold (Berlin 1929); Hr. Johnsen das 2. Heft der von ihm herausgegebenen »Forschungen zur Kristallkunde«: »'Gedrillte' Kristalle« von Prof. Dr. F. Bernauer (Berlin 1929).

8. Vorgelegt wurde der 9. Faszikel des 6. Bandes des »Thesaurus linguae latinae (Leipzig 1929).

9. Vorgelegt wurden ferner folgende von der Akademie unterstützte Werke: »Opuscula Ichneumonologica«, hrsg. von Prof. Dr. Otto Schmiedeknecht, Suppl.-Band, Fasc. 6 (Blankenburg i. Th.); Albert Leitzmann: »Wilhelm von Humboldts Briefe an Gottfried Hermann« (Weimar 1929); Wilhelm Lorey: »Johann Heinrich Lambert« (Sonderabdruck, Göttingen 1929);

10. weiter die mit Benutzung des Archivs der Akademie veröffentlichte Schrift von Friedrich Stock »Zur Vorgeschichte der Berliner Museen, Urkunden von 1766—1807« (Sonderabdruck 1929).

11. Hr. Heymann überreichte die unter seiner Mitwirkung erschienene Festgabe der juristischen Fakultäten zum 50jährigen Bestehen des Reichsgerichts: »Die Reichsgerichtspraxis im deutschen Rechtsleben« (6 Bände, Berlin und Leipzig 1929).

12. Vorgelegt wurde endlich die Festschrift der Reichsdruckerei »50 Jahre Reichsdruckerei, 1879—1929« (Berlin 1929).

13. Die Wiener Akademie übersandte ein Exemplar der anläßlich des 70. Geburtstages von Oswald Redlich geprägten Medaille.

14. Das korrespondierende Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hr. Heinrich Finke in Freiburg i. B. hat am 7. August sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm aus diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

15. Das korrespondierende Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hr. Rudolf Thurneysen in Bonn hat am 17. September sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm aus diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

16. Die Akademie hat zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse:

6000 ℛℳ zur Fortführung des »Nomenclator« für 1929,

400 ℛℳ für Hrn. Prof. Pappenheim in Berlin als Zuschuß zu den Kosten seiner Reise zur Fortsetzung seiner Untersuchungen an Salmoniden der Alpengewässer,

450 ℛℳ für Forschungen des Hrn. Oberlandesgerichtsrats Paul Blüthgen in Naumburg a. S. über die *Apiden*-Gattungen,

200 ℛℳ für die Fortführung der »Opuscula Ichneumonologica« des Hrn. Prof. Dr. Otto Schmiedeknecht in Blankenburg i. Thür.;

durch ihre philosophisch-historische Klasse:

4000 ℛℳ für die Arbeiten des Hrn. Dr. Stein für die »Militärgeschichte der römischen Kaiserzeit«,

1000 ℛℳ für die Herausgabe der »Mittelalterlichen Bibliothekskataloge«.

Die Akademie hat am 8. Oktober das auswärtige Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Max Lehmann in Göttingen durch den Tod verloren.

Die Akademie hat am 4. August das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Karl Frhr. Auer von Welsbach in Schloß Welsbach und am 15. September das korrespondierende Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Rudolf Eugen Geyer in Wien durch den Tod verloren.

Adresse an Hrn. Heinrich Finke zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. August 1929.

Hochverehrter Herr Kollege!

Ihr goldenes Doktorjubiläum wird ein Tag sein, an dem die Summe Ihres wissenschaftlichen Wirkens allen denen, die von ihm befruchtet sind, vor Augen treten wird. Die Preußische Akademie der Wissenschaften, die Sie seit sieben Jahren zu den Ihren zählen darf, dankt Ihnen von Herzen nicht nur für das, was Sie in kaum übersehbarer Fülle den geschichtlichen Wissenschaften gaben, sondern auch für das, was Sie waren und sind. Denn eine ursprüngliche und eigengewachsene Persönlichkeit steht hinter Ihrem Werke — durch harte, aber von innerem Feuer durchglühte Jugend gestählt, selbstsicher ihren Weg erkämpfend, dem öffentlichen Leben früh verbunden und fortan immer auch in der Klausur der Archive den großen Fragen der Zeit, der Kultur, des Vaterlandes zugewandt. Gerade das Nichtnormale Ihres Bildungsganges, das Sie in Ihren Lebenserinnerungen reizvoll schildern, hat Sie vor bloßer Schulmäßigkeit des Betriebes bewahrt und Sie elastisch und aufgeschlossen gestimmt, so daß die kräftige westfälische Wurzel Ihres Lebens einen Baum tragen konnte, dessen Zweige sich schließlich über die ganze deutsche und südeuropäische Welt ausdehnen konnten. Man möchte hinzufügen, daß man auch den Vogelgesang von Kunst und Dichtung aus ihnen vernimmt. Denn man spürt es, daß Sie in den Katakomben Roms ebenso zu Hause sind, wie in der christlich-deutschen Kunst des neunzehnten Jahrhunderts, die Ihnen für Ihr persönlichstes Leben so viel bedeutet, und den Geheimnissen der Divina Commedia treten Sie ebenso empfänglich gegenüber wie den verschlungenen Gedanken der deutschen Romantiker. So hat die eigentümliche und farbenreiche Kultur und Wissenschaft der katholischen Welt, der Sie mit innerster Treue anhängen, in Ihnen einen Vertreter gefunden, dessen schöpferisches Wirken von der Wissenschaft schlechthin anerkannt wird. Denn die Quellen, die Sie erschlossen, und die kritischen Forschungen. die Sie daran knüpften, haben unser Bild vom späteren Mittelalter und seinen geistigen und insbesondere religiösen Kämpfen derart ungeahnt bereichert, daß man eben nur erst begonnen hat, die von Ihnen geförderten Schätze auszuwerten. Von Ihren Arbeiten für das Westfälische Urkundenbuch und für die Papsturkunden Westfalens an über die grundlegende Edition der Konstanzer Konzilsakten bis zu den epochemachenden Funden im Kronarchiv von Barcelona, den Acta Aragonensia mit den anschließenden Forschungen über Papst Bonifaz VIII. und den Templerorden ging der Weg, den Ihre Wünschelrute durch die Archive

Europas fand. Den Scheltnamen des bœuf d'archives, den der Franzose während des Krieges Ihnen zuwarf, durften Sie lächelnd sich zum Ehrennamen umwandeln. Denn Sie waren sich mit Recht bewußt, daß Ihr unerhörter archivalischer Fleiß von einem wissenschaftlichen Erkenntniswillen getrieben ward, der alles Quellenwissen sofort in lebendigste geschichtliche Anschauung umsetzt, letzten Endes aber große gemütbewegende universale Fragen sich beantworten will. Menschen und Dinge der Vergangenheit verstehen Sie aus wenigen bunten Mosaiksteinchen der Vergangenheit zu erraten. Lebensvolle Bilder von mittelalterlichem Menschentum und Geisteskultur formten Sie sich durch ein Zusammenwirken von Gelehrsamkeit, Kritik und Phantasie. Als Sie die Verhandlungen des Konstanzer Konzils studierten, kam Ihre einstige Tätigkeit als Stenograph des Reichstags dem Verständnis der Hergänge zustatten. Sie mußten einmal, so erzählen Sie, die Feder hinlegen, als Sie Bismarcks erschütternde Rede im Reichstag zu fixieren hatten. Zwiespältige Gefühle erfüllten Sie damals ihm gegenüber, Überwältigung durch den Anblick geschichtlicher Größe und Schmerz über das, was er Ihrer Kirche angetan hatte. Aber das Bedürfnis, dieser und anderer Zwiespältigkeit Herr zu werden, der Wille zur Objektivität wurde der Leitstern für Ihr geschichtliches Denken. So hat auch die große, für Sie zugleich wissenschaftliche und weltanschauliche Frage: »Wie ist die Reformation möglich geworden?«, die das geistige Band eines großen Teils Ihrer Forschungen bildet, von Ihnen Beantwortungen gefunden, die uns das seelische Ringen der damaligen Menschen unverhüllt vor Augen führen. Wer könnte heute hoffen, in der Deutung der Ursachen der Reformation allgemeine Zustimmung zu finden? Das ideale Ziel, vom Boden verschiedener Weltanschauungen aus ein allgemein gültiges Bild davon zu gewinnen, mag wohl unerreichbar sein. Aber menschlich und geschichtlich sich gegenseitig zu verstehen, ist hier wie überhaupt der reale Gewinn historischen Forschens und Denkens, zu dem Sie wahrlich beigetragen haben. Vaterland und Kirche, Leben und Wissenschaft strebten Sie stets warmherzig und wurzelfest zu vereinigen. Möchten Sie an Ihrem Lebensabend empfinden, daß dieses Streben herzlich verstanden worden ist. Möchten Ihnen noch reiche Früchte Ihrer Arbeit reifen.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Adresse an Hrn. Rudolf Thurneysen zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 17. September 1929.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Ein freundliches Geschick, dem wir Dank schulden, vergönnt heute Ihnen und uns, die fünfzigste Wiederkehr des Tages festlich zu begehen, der Sie einst durch die Promotion in die Reihe der der Wissenschaft in selbständiger Forschung dienenden Arbeiter eingegliedert hat. Nur wenige Jahre später gelang Ihnen auf dem Gebiete der irischen Sprachgeschichte, deren anerkannter Meister Sie heute sind, eine Entdeckung von so fundamentaler Bedeutung, daß sie den Entdecker aus dieser unabsehbaren Reihe mit einem Schlage weithin sichtbar heraushob und seinen Namen unlöslich mit der Geschichte der keltischen Philologie verknüpfte: Die Feststellung der nur in ihren Wirkungen erkennbaren altirischen Betonungsgesetze, deren glückliche Wiederentdeckung durch Sie und Heinrich Zimmer das anscheinend unentwirrbare Chaos der irischen Laute und Formen in strenge Ordnung und durchsichtige Gesetzmäßigkeit verwandelte. Die neugewonnene Erkenntnis stellte die Wissenschaft vor die unausweichliche Aufgabe einer völligen Neugestaltung der altirischen Grammatik. In vorbildlicher Klarheit und Präzision und mit unbestechlicher Urteilsschärfe haben Sie selbst durch Ihr »Handbuch des Altirischen« diese Aufgabe gelöst. In Ihrer Arbeit verwächst der Philologe, der die Tatsachen der Überlieferung beobachtend aufnimmt und durch methodische Interpretation verstehen lehrt, mit dem die vorgeschichtlichen Zusammenhänge aufdeckenden Sprachforscher zu einer organischen Einheit, aus der Ihrer persönlichen Art, die Dinge aufzufassen und darzustellen, eine besondere Kraft des Überzeugens zuzuströmen scheint.

Bei der sprachlichen Form des irischen Schrifttums hat Ihre Forschung nicht haltgemacht. Je länger je mehr strebte sie darüber hinaus zu den auch für die gemeineuropäische Literatur- und Geistesgeschichte bedeutsamen Inhalten, die in ihr aufbewahrt, aber zugleich auch verborgen sind. Auch hier haben Sie, mehr angelockt als abgeschreckt durch die verwirrende Fülle des zum Teil noch in den Bibliotheken vergrabenen Stoffes, eine zentrale Aufgabe ergriffen im vollen Bewußtsein ihrer zeitgemäßen Dringlichkeit und sie zur Hälfte schon erfolgreich bewältigt: die Inventarisation der »altirischen Helden- und Königssage«, durch die Sie nun auch dem Außenstehenden einen Zugang zu den Gebilden irischer Sage und Fabulierlust eröffnet haben. Mit den Mitteln philologischer Kritik, die gleichmäßig Sprache und Inhalt vor ihr Forum zieht, erstreben Sie die methodische Sonderung der übereinanderge-

lagerten Schichten verschiedener Herkunft, die Aufhellung der zwischen den geschriebenen Texten bestehenden Abhängigkeitsverhältnisse, die Scheidung echten und papierenen Sagenguts und legen den Grund zu einer wirklichen Geschichte der irischen Literatur, indem Sie praktisch Ernst machen mit der grundsätzlichen Forderung, daß das Einzelne nur aus dem Zusammenhange des Ganzen gedeutet werden darf.

Mit bewundernswerter Spannkraft des Geistes haben Sie sich noch in den allerletzten Jahren, angeregt durch persönliche Berührung mit dem allzufrüh der Wissenschaft entrissenen Juristen Partsch, ein ganz neues, von wenigen erst betretenes Arbeitsgebiet hinzuerobert, die Durchforschung der irischen Rechtsquellen, zu deren Deutung Sie nun die ganze Summe der ein langes, arbeitsreiches Leben hindurch aufgespeicherten Fähigkeiten philologischer und linguistischer Interpretation mit glücklichem Erfolge einzusetzen vermögen.

Wir wissen nicht, welche Ziele dem jüngsten Beutezuge gesteckt sind, den Sie von neuem in die Bibliotheken Irlands unternommen haben. Aber mag Ihre Fahrt dem Abschluß des großen Sagenbuches dienen sollen oder der Fortsetzung Ihrer rechtsgeschichtlichen Studien: wir freuen uns, sie als Zeichen ungebrochener Schaffenskraft deuten zu dürfen, und erhoffen von ihr eine Bereicherung Ihres Lebenswerkes um neue, wertvolle Früchte.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Über den β-Salmiak und verwandte Kristallarten.

Von A. Johnsen.

(Vorgetragen am 11. Juli 1929 [s. oben S. 270].)

Mit Taf. XI und einer Textfigur.

Inhalt: I. *β*-Salmiak und *α*-Sylvin; II. Verzerrte Kristalle von *β*-Salmiak; III. Kristallonomisches; IV. Habitus und Struktur; V. *β*-Salmiak und *α*-Salmiak; VI. Sylvin-Struktur (*α*) und CsCl-Struktur (*β*); VII. Isomorphie der kubischen Haloïdsalze von NH_4 mit denen von K, Rb, Cs.

I. *β*-Salmiak und *α*-Sylvin.

Schon in seiner ersten Veröffentlichung über Isomorphie im Jahre 1821 hat Eilh. Mitscherlich ein K-Salz und ein NH_4-Salz als isomorph gekennzeichnet, nämlich die tetragonalen Kristalle von KH_2PO_4 und $NH_4H_2PO_4$. Seitdem wurden viele Angaben über Isomorphie analoger K- und NH_4-Verbindungen gemacht. Darunter befanden sich auch der gewöhnliche Salmiak und der natürliche Sylvin; ihre Isomorphie wurde noch wahrscheinlicher, als G. Tschermak 1882 den Salmiak und R. Brauns 1886 den Sylvin in die pentagonikositetraedrische Symmetrieklasse *O* verwiesen, die schon 1821 von Friedr. Mohs[1] vorausgesagt und dann von J. Fr. Chr. Hessel 1830 als möglich abgeleitet, aber bis 1882 noch nicht verwirklicht gefunden war.

Dazu kam noch eine seltsame Eigentümlichkeit, die beiden Salzen gemeinsam scheint; man fand nämlich von den in der Klasse *O* möglichen Rechtsformen und Linksformen sowohl am KCl als auch am NH_4Cl nur die einen; daß es am KCl nur rechte, am NH_4Cl nur linke Pentagonikositetraeder waren, mußte allerdings auffallen.

Es zeigten sich dann Unterschiede der Kohäsion, besonders in der Spaltbarkeit und den Translationsrichtungen. Endlich brachte die Röntgenometrie zwei Überraschungen. Die eine war die, daß die Anordnung der Ionen im KCl und auch im NH_4Cl der Klasse O^h und nicht der Klasse *O* entsprach; doch ließ sich natürlich die Struktursymmetrie der morphologischen Klasse *O* dadurch anpassen, daß man dem einzelnen Ion eine hinreichend niedrige Symmetrie beilegte, ähnlich wie man ja auch bei Rotkupfererz und andern Kristallarten verfuhr. Die andre Überraschung war die, daß sich die Strukturen

[1] Friedr. Mohs, Die Charaktere der Klassen usw. des naturhistorischen Mineralsystems. 2. Aufl., Dresden 1821, S. 42, 43 und Taf. II, Fig. 24.

vom Sylvin und vom gewöhnlichen Salmiak als grundverschieden erwiesen; der Salmiak hat nicht Sylvin-Struktur, sondern CsCl-Struktur.

Die Beziehungen zwischen KCl und NH_4Cl erfahren endlich eine gewisse Modifizierung dadurch, daß B. GOSSNER 1903 und R. C. WALLACE 1910 eine reversible Umwandlung des gewöhnlichen β-Salmiak in einen α-Salmiak beschrieben und daß dieser α-Salmiak Sylvin-Struktur besitzt.

So liegt es nahe, eine Isomorphie zwischen Sylvin und α-NH_4Cl anzunehmen, und ebenso zwischen β-NH_4Cl und CsCl. Das soll im letzten Abschnitt (VII) erörtert werden.

II. Verzerrte Kristalle von β-Salmiak.

Kristalle von β-NH_4Cl, die nach einer vierzähligen oder einer dreizähligen Achse gestreckt sind, wurden schon öfters beobachtet; ich komme darauf im Abschnitt IV zurück.

Kürzlich erhielten[1] wir Salmiakkristalle, die in Richtung einer vierzähligen Achse A_4 bis zu 1 m lang sind. Sie entstanden in großen Behältern durch Abkühlung einer wäßrigen Lösung von etwa 85° bis auf Zimmertemperatur ungefähr in einer Woche; die Mutterlauge enthielt außer NH_4Cl etwas HCl sowie MgCa-Pectinat und Araban, das sind zwei in Lösung optisch-aktive Stoffe mit asymmetrischem C-Atom. Manche Kristalle waren an dem Boden und den Wänden des Gefäßes oder an andern Individuen mit einem Ende von A_4 [001] angewachsen, andre lagen frei auf dem Boden; nicht selten wuchs ein Kristall erst gestreckt ∥[001] und dann gestreckt ∥[100] weiter, zuweilen noch später ∥[010]. Manche Individuen glichen einem tetragonalen Trapezoeder, andre erschienen polar und sahen nach der Wulfenitklasse aus, weil die vier oberen Flächen den vier unteren der Lage nach nicht gleichwertig und insbesondere von andrer Steilheit waren; nur die steileren Flächen waren manchmal in der Anzahl 8 trapezoedrisch verteilt und nur sie waren reflexgoniometrisch meßbar, aber nicht an den Mittelkanten, sondern nur an den Polkanten sowie über die Polecke hinüber, weil sie nach den Mittelkanten hin streifig und krumm wurden.

Setzen wir den gemessenen Poleckenwinkel $(hkl)\,\widehat{(}\,\bar{h}\bar{k}l) = 2\zeta$, so ist $\zeta = (hkl)\,\widehat{(}001)$ die Poldistanz. Zur Indizierung von (hkl) fehlt noch das Azimut $[(hkl), (001)\,\widehat{]}\,[010] = \delta$; aus ζ nebst dem ebenfalls gemessenen Polkantenwinkel $(hkl)\,\widehat{(}\,k\bar{h}l) = \psi$ läßt sich δ nicht berechnen, weil ζ und ψ einfach durch die Gleichung $\cos\psi = \cos^2\zeta$ verbunden sind; andrerseits ist die Messung von $(hkl)\,\widehat{(}\,h\bar{k}\bar{l})$, die zur Berechnung von $\measuredangle\,\delta$ führen würde, wegen der erwähnten Beschaffenheit der Mittelkanten nicht tunlich; sonstige Flächen sind nicht vorhanden, insonderheit ist die Lage von (100) und (010) unbekannt. Wegen dieses Mangels an morphologischen Daten muß man

[1] Wir verdanken sie der Freundlichkeit der Chemischen Fabrik Groß-Weißandt in Weißand (Anhalt); ihr sowie dem Chemiker Hrn. Dr. SEIDLER schulde ich auch die obigen Angaben über die Kristallisationsbedingungen.

nach physikalischen Vektoren suchen, um das Azimut δ und hiermit h, k, l zu berechnen. Da eine deutliche Spaltbarkeit am β-Salmiak fehlt, benutzte ich die bekannten Translationen mit $T \parallel (011)$ und $t \parallel [100]$ oder $T \parallel (101)$ und $t \parallel [010]$, indem ich (001) nebst $(00\bar{1})$ anschliff und mit einem Nadelstich auf (001) die doppelbrechenden Translationsspuren $\parallel [100]$ und $\parallel [010]$ hervorrief; sodann wurde u. d. M. das gesuchte Azimut $\delta = 23°5' \pm 24'$ gefunden. Unsere Tafel zeigt das Photo der Fläche (001) mit den doppelbrechenden Streifen $\parallel [100]$ und [010] und dem quadratischen Umriß, der durch die vier Flächen (hkl), $(k\bar{h}l)$, $(\bar{h}\bar{k}l)$ und $(\bar{k}hl)$ gegeben wird; hieraus ist zu entnehmen, daß $h > k$. Aus

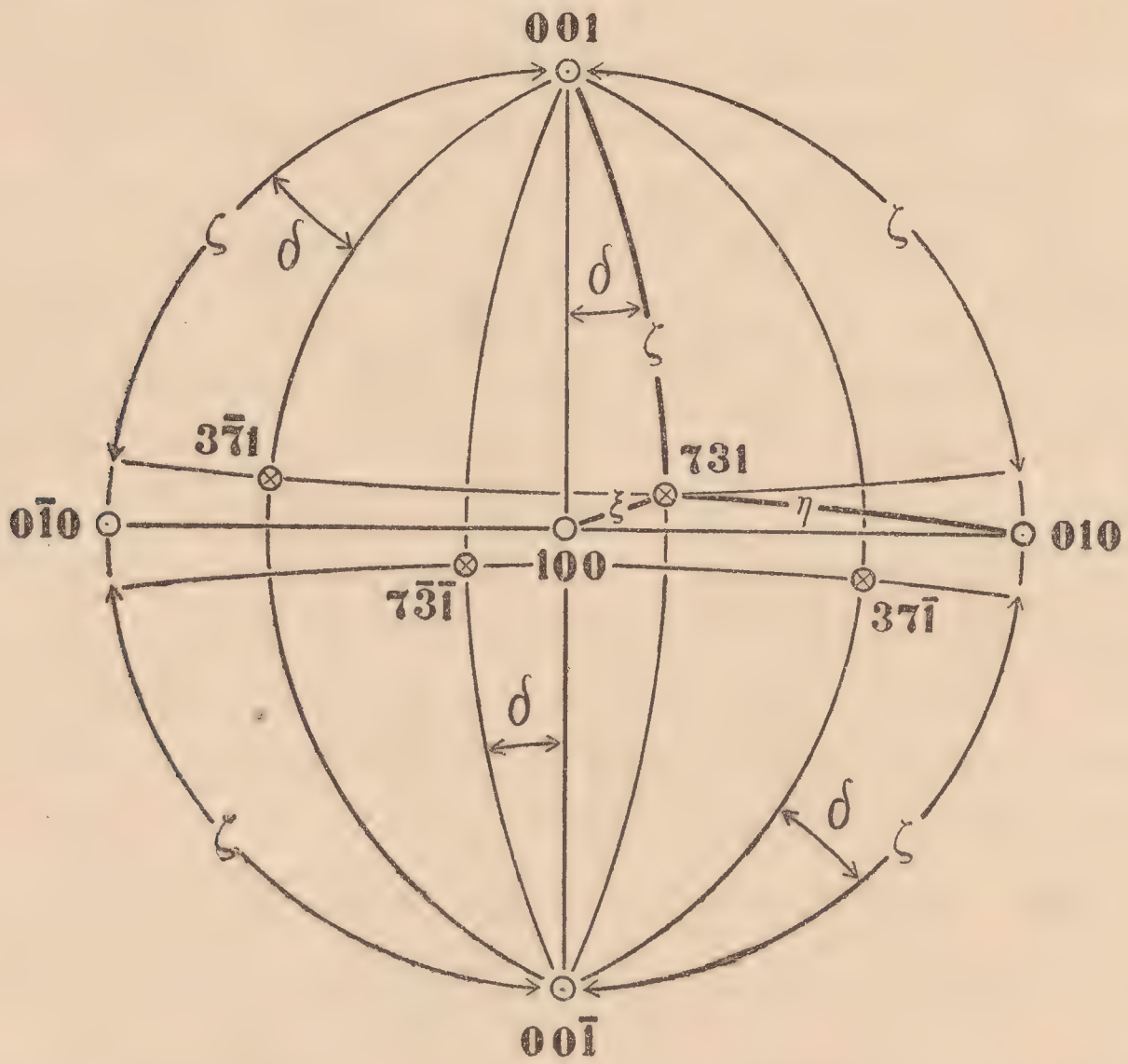
$$(1) \qquad \cos\delta : \sin\delta = h : k$$

finden wir bereits $h : k = 7 : 3$.

Da das Reflexgoniometer $\measuredangle\, 2\zeta = 165° 16' \pm 30'$, also $\zeta = 82° 38' \pm 15'$ lieferte, erhalten wir aus

$$(2) \qquad \cos\delta : \sin\delta : \operatorname{ctg}\zeta = h : k : l$$

die Indizes $h = 7$, $k = 3$, $l = 1$.



β-Salmiak, verzerrte Form $\{731\}l$, stereographisch projiziert auf (100).

Man kann auch die stereographische Projektion der Textfigur benutzen, indem man mittels ζ und δ die Position von (hkl) konstruiert und auf dem Wulffschen Netz etwa die drei Winkel

$$\xi = (100)\widehat{(hkl)}, \quad \eta = (010)\widehat{(hkl)}, \quad \zeta = (001)\widehat{(hkl)}$$

abliest; aus

$$(3) \qquad \cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = h : k : l$$

findet man dann wieder $h = 7$, $k = 3$, $l = 1$.

Die Tabelle I gibt Auskunft über die Differenz zwischen den empirisch gefundenen Winkelwerten und den aus $(hkl) = (731)$ berechneten; zur Berechnung dienten folgende Formeln:

$$(4)\quad \begin{cases} \operatorname{ctg}\delta = \dfrac{h}{k}; \\ \cos\xi = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}, \quad \cos\eta = \dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}, \quad \cos\zeta = \dfrac{l}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}; \\ \cos\psi = \cos^2\zeta. \end{cases}$$

Tabelle I.

$(731):(\bar{7}\bar{3}1) = 2\zeta$		$(731):(3\bar{7}1) = \psi$		$[3\bar{7}0]:[010] = \delta$	
berechn.	gem. m. d. Reflexgon.	berechn.	gem. m. d. Reflexgon.	berechn.	gem. u. d. Mikrosk.
165° 2′	165° 16′ ± 30′	89° 2′	88° 18′ ± 51′	23° 12′	23° 5′ ± 24′
$(731):(100) = \xi$		$(731):(010) = \eta$		$(731):(001) = \zeta$	
berechn.	stereograph. ermittelt	berechn.	stereograph. ermittelt	berechn.	stereograph. ermittelt
24° 19′	24° ± 1/2°	67° 1′	67° ± 1/2°	82° 31′	82 1/2° ± 1/2°

Wie gesagt, gestatteten unsere tetragonal-trapezoedrisch erscheinenden Kristalle an den auf- und absteigenden Mittelkanten keine genaueren Winkelmessungen mit dem Reflexgoniometer. Aus den beiden Formeln

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\widehat{(hkl)\,(\bar{k}h\bar{l})} = \dfrac{2hk - l^2}{h^2+k^2+l^2} \\ \cos\widehat{(hkl)\,(h\bar{k}\bar{l})} = \dfrac{h^2 - k^2 - l^2}{h^2+k^2+l^2} \end{cases}$$

berechnen sich die beiden Winkel

$$\widehat{(731)\,(37\bar{1})} = 45°\,59' \text{ und } \widehat{(731)\,(7\bar{3}\bar{1})} = 48°\,37'.$$

Setzt man ferner

$$[(hkl), (kh\bar{l})] = [\bar{l}, l, h-k] \text{ und } [(hkl), (h\bar{k}\bar{l})] = [0\bar{l}k],$$

so ist

$$(6)\quad \begin{cases} \cos^2\widehat{[001]\,[\bar{l}, l, h-k]} = \dfrac{h^2+k^2-2hk}{h^2+k^2-2hk+2l^2} \\ \cos^2\widehat{[001]\,[0\bar{l}k]} = \dfrac{k^2}{k^2+l^2}. \end{cases}$$

Hieraus folgt $\widehat{[001]\,[\bar{1}14]} = 19°\,28'$ und $\widehat{[001]\,[0\bar{1}3]} = 18°\,26'$.

Setzt man die Längen der auf- und absteigenden Kanten gleich $L[\bar{l}, l, h-k]$ und $L[o\bar{l}k]$, so ergibt sich

$$L[\bar{1}14] : L[o\bar{1}3] = 95 : 94 .$$

Die beiden Längen sind also sehr wenig verschieden und ebenso auch die soeben angeführten Winkel; für $\delta = \frac{45^\circ}{2}$ würden diese Unterschiede gleich Null, was irrationalen Flächen vom ungefähren Symbol $(5m, 2m, n)$ entspräche.

Ganz allgemein gilt für tetragonale Trapezoeder folgendes. Die steilere der beiden auf- und absteigenden Mittelkanten ist stets die kürzere, und der ihr anliegende äußere Flächenwinkel ist stets größer als der an der anderen Kante; der Zusammenhang mit den Flächenindizes h, k, l ist durch die Beziehungen (7) festgelegt

$$(7) \qquad (hk\bar{l})\,\widehat{(}\,(kh\bar{l}) \lesseqgtr (hk\bar{l})\,\widehat{(}\,(h\bar{k}\bar{l}), \text{ wenn } h^2 \lesseqgtr k^2 + 2hk .$$

Für (731) ist $h^2 < k^2 + 2hk$; also ist die vorn von rechts unten nach links oben verlaufende Kante $[o\bar{1}3]$ die kürzere und die von links unten nach rechts oben verlaufende $[\bar{1}14]$ die längere.

III. Kristallonomisches.

Wie schon erwähnt, war an unsern β-Salmiakkristallen reflexgoniometrisch nur die Poldistanz von (hkl), also $\measuredangle\,\zeta = (001)\,\widehat{(}\,(hkl)$ meßbar, nicht aber das Azimut $\delta = [010]\,\widehat{[}\,[\bar{k}ho]$.

Nun muß zwar bei geographischen Ortsangaben außer der Breite $(90-\zeta)$ auch die Länge δ angegeben werden; dagegen wird bei Kristallen die Lage eines kristallonomischen Flächenpols durch das Rationalitätsgesetz eingeschränkt, und daher wäre es denkbar, daß die bloße Angabe von ζ genügen könnte, d. h. daß ein bestimmter $\measuredangle\,\zeta$ vielleicht nur in einer einzigen der unendlich vielen Zonen $[\bar{k}ho]$ möglich wäre; dann würde δ durch ζ bestimmt sein. Aus

$$(8) \qquad \cos\delta = \frac{h\,\mathrm{ctg}\,\zeta}{l}$$

ersieht man, daß der Zusammenhang zwischen ζ und δ nicht eindeutig ist, weil man aus ζ nicht den Wert $\frac{h}{l}$ abzuleiten vermag, denn die Beziehung von $\measuredangle\,\zeta$ zu den Indizes von (hkl) ist

$$(9) \qquad \mathrm{tg}^2\,\zeta = \frac{h^2 + k^2}{l^2} .$$

Der Zusammenhang zwischen ζ und h, k, l ist also nicht eindeutig; zunächst verrät der rechtsseitige Ausdruck von (9), daß ζ sich bei Vertauschung

von h und k nicht ändert, d. h. ein bestimmter $\measuredangle\zeta$ gestattet keine Unterscheidung von linkem Pentagonikositetraeder (hkl) und rechtem (khl). Auch abgesehen von der Reihenfolge dieser Indizes bzw. ihren Vorzeichen gehorchen einem gegebenen ζ, selbst wenn es absolut genau bekannt ist, viele verschiedene Tripel h, k, l, was sich ebenfalls aus (9) ersehen läßt.

In unserem Fall z. B. ist $h = 7$, $k = 3$, $l = 1$, also $\mathrm{tg}^2\,\zeta = 58$; läßt man h, k, l wachsen, so gelangt man zunächst zu dem Tripel $h = 37$, $k = 9$, $l = 5$, das ebenfalls die Bedingung (9) für $\mathrm{tg}^2\,\zeta = 58$ befriedigt, usw. Dabei ist jedoch (731) bei weitem einfacher und somit wahrscheinlicher als das nächste Symbol (37, 9, 5) und erst recht wahrscheinlicher als die folgenden, noch viel höher indizierten Symbole (hkl), soweit sie der Gleichung $\frac{h^2+k^2}{l^2} = 58$ gehorchen.

In unserm Fall, d. h. für $\mathrm{tg}^2\,\zeta = 58$ kommt $h = 0$ (oder $k = 0$) nicht in Frage, weil dann $\mathrm{tg}^2\,\zeta = \left(\frac{k}{l}\right)^2$ sein müßte; 58 ist aber nicht das Quadrat einer rationalen Zahl. Ebenso ist $h = k$ ausgeschlossen, weil dann $\mathrm{tg}^2\,\zeta = 2\left(\frac{h}{l}\right)^2$, also $\frac{\mathrm{tg}^2\,\zeta}{2} = \left(\frac{h}{l}\right)^2$ sein müßte, was für $\frac{\mathrm{tg}^2\,\zeta}{2} = \frac{58}{2} = 29$ nicht stimmt.

Somit ergibt sich, daß im allgemeinen aus der alleinigen Messung der Poldistanz $\zeta = (001)\widehat{(hkl)}$, wenigstens wenn sie auf etwa $\pm 1'$ genau ist, die absoluten Werte von h, k, l zwar nicht eindeutig, aber doch mit großer Wahrscheinlichkeit richtig berechnet werden können, so daß nur die Entscheidung zwischen rechtem und linkem Pentagonikositetraeder noch aussteht. In der kubischen Holoedrie würde obendrein auch noch diese Zweideutigkeit fortfallen.

IV. Habitus und Struktur.

GROTH, LIEBISCH und BECKENKAMP haben die rechten Pentagonikositetraeder und die linken umgekehrt definiert wie MOHS, TSCHERMAK, BECKE und NIGGLI. Wir wollen uns der ersten Gruppe anschließen; dann können wir so formulieren:

$$(10)\qquad \begin{cases} l > k > h > 0, \text{ rechtes } (hkl) \\ h > k > l > 0, \text{ linkes } (hkl). \end{cases}$$

Somit gehört das oben abgeleitete Symbol (731) zu einem linken $\{hkl\}$; auch das andere, weniger steile $(h'k'\bar{l}')$, das ich, wie schon erwähnt, öfters an einem Kristallende gegenüber (731) am andern als tetragonale Pyramide beobachten, aber nicht genau genug messen konnte, gehört zu den linken Formen.

Das alleinige Auftreten von linken $\{hkl\}$ an allen 15 untersuchten Salmiakkristallen ist deswegen von Interesse, weil man in der Literatur für den β-Salmiak ebenfalls nur linke $\{hkl\}$ verzeichnet findet, nämlich $\{321\}$, $\{875\}$, $\{874\}$ und $\{943\}$.

Die Sachlage ist aber verwickelter, als sie zunächst erscheint. Wir haben nämlich beim β-NH_4Cl wegen seiner Symmetrieklasse *O* von vornherein ebenso wie etwa bei Quarz, Bittersalz und ähnlichen Kristallarten nicht nur entgegengesetztgeformte Kristalle, d. h. rechtsgeformte und linksgeformte zu unterscheiden, sondern auch entgegengesetztstruierte, d. h. rechtsstruierte und linksstruierte. Entgegengesetzte Strukturen wie bei Quarz, Bittersalz usw. haben sich aber beim β-NH_4Cl bisher empirisch nicht feststellen lassen, weder röntgenometrisch noch auf Grund von optischem Drehungsvermögen; an Individuen von 20 cm Länge konnte ich bei Na-Licht in unserm Landolt-Lippichschen Halbschattenapparat keine optische Drehung erkennen; freilich waren die Kristalle bei dieser Länge merklich trübe. Andere physikalische Eigenschaften, die in der Klasse *O* eine Unterscheidung entgegengesetzter Strukturen zuließen, sind bisher nicht bekannt.

Nun sind von vornherein zwei Fälle möglich.

Fall I. Beide Strukturen sind ungleich stabil und somit ungleich wahrscheinlich. Das erscheint durchaus möglich, zumal angesichts der Tatsache, daß z. B. bei Bittersalz und einigen anderen hierher gehörenden Kristallarten die eine Struktur viel häufiger beobachtet worden ist als die entgegengesetzte. Der β-Salmiak böte dann ein Extrem dieses Verhaltens dar, indem er die eine der beiden Strukturen überhaupt nicht ausbilden würde. Die von ihm ausgebildete Struktur könnte dann unter zwei verschiedenen Kristallisationsbedingungen zwei entgegengesetzte Formen liefern. Zwei solche entgegengesetztgeformte Kristalle würden aber, weil gleichstruiert, auf gleichartigen Flächen im allgemeinen kongruente Ätzfiguren erhalten, wenn man sie unter gleichen Bedingungen ätzte[1].

Fall II. Beide Strukturen sind gleich stabil und somit gleich wahrscheinlich. Zwei entgegengesetztstruierte Kristalle müßten unter den gleichen Kristallisationsbedingungen, also z. B. nebeneinander in einer Mutterlauge wachsend, im allgemeinen entgegengesetzte Formen liefern. Sie könnten aber beide, unter zwei verschiedenen Bedingungen wachsend, eine und dieselbe Form aufweisen, so daß die entgegengesetzte Form nicht auftreten würde; zwei solche Individuen würden jedoch im allgemeinen, wenn man sie beide unter gleichen Bedingungen ätzte, entgegengesetzte Ätzfiguren erhalten.

Hiernach scheint beim β-Salmiak der Fall I vorzuliegen, denn die von mir untersuchten 15 Kristalle waren in der gleichen Mutterlauge gewachsen und doch sämtlich links geformt. Nun wird zwar bei Bittersalz und ähnlichen Kristallarten durch eine mit asymmetrischem C-Atom ausgestattete organische Verbindung in der Mutterlauge oft die eine der beiden entgegengesetzten Strukturen begünstigt, und die Mutterlauge unsrer Kristalle enthielt,

[1] Der Vorteil der Ätzmethode bei der Symmetriebestimmung von Mineralien liegt gegenüber der Betrachtung gewachsener Formen in folgenden Punkten: man kann alle Kristalle, auch solche, die sich nicht züchten lassen, ätzen; ferner kann man die Ätzbedingungen genau festlegen, während die Wachstumsbedingungen natürlicher Kristalle mehr oder weniger unbekannt sind und ihr Wachstum oft nicht künstlich zu verwirklichen ist; endlich kann man die Ätzbedingungen planmäßig und stetig variieren. — Solche planmäßige und stetige Variation der Bedingungen eines Vorganges bedeutet den Hauptzweck und Hauptwert aller Experimentalforschung.

wie schon erwähnt, tatsächlich solche organischen Verbindungen. Aber die in der Literatur beschriebenen β-Salmiakkristalle zeigten recht verschiedene Flächenindizes (321, 875, 874, 943), wozu jetzt noch {731} kommt, waren also unter mehreren verschiedenen Bedingungen entstanden; trotzdem sind sie sämtlich linksgeformt gewesen. Es ist unwahrscheinlich, daß dergleichen durch verschiedenartige Kristallisationsbedingungen verursacht wird, es müßte denn sein, daß in allen diesen verschiedenen Fällen eine und dieselbe unbekannte Verunreinigung der Mutterlauge, und zwar trotz minimaler Menge eine und dieselbe der beiden entgegengesetzten Strukturen durchgesetzt hätte, daß also Fall I nur vorgetäuscht würde.

Was die Verzerrung unsrer Salmiakkristalle betrifft, so waren sie offenbar ursprünglich mit einem Ende von [001] angewachsen; hierdurch wurden die an und für sich gleichwertigen Flächen (731), (317) und (173) des absolut positiven Oktanten drei verschiedenen Wachstumsbedingungen unterworfen; so konnte es geschehen, daß von drei Flächen des Oktanten sich nur eine ausbildete, nämlich (731), was für die 8 Oktanten ein achtflächiges, tetragonales Trapezoeder ergibt. Nach zufälligem Abbrechen regenerierte sich das abgebrochene Ende, wodurch sich der Kristall nach der kinematischen Theorie zunächst polar ausbilden mußte; der Endkörper des Wachstums aber wird diese Polarität nicht mehr zeigen.

Dagegen würden bei einem Ikositetraeder $\{hhl\}$ offenbar in jedem Oktanten die 2 steileren der 3 Flächen gleiche Neigung zur Achse [001] haben, und es wäre nicht einzusehen, warum nur eine von ihnen sich ausbilden sollte; die Folge ist eine ditetragonale Bipyramide, wie sie schon 1828 von MARX an verzerrten Salmiakkristallen beschrieben wurde. Daher dürfte die Deutung von C. FR. NAUMANN[1], der am Salmiak tetragonale Trapezoeder für verzerrte Ikositetraeder {311} und {522} erklärte, unrichtig sein[2]; übrigens bemerkte NAUMANN selbst die Ungenauigkeit seiner Messungen und die Fraglichkeit seiner Deutung.

V. β-Salmiak und α-Salmiak.

Es ist bekannt, daß der gewöhnliche Salmiak, den wir β-Salmiak genannt haben, sich bei + 184.3° reversibel in eine andere Kristallart umwandelt, die α-Salmiak heißen möge. Der β-Salmiak hat CsCl-Struktur mit dem Würfelgitter Γ_c, der α-Salmiak hat Sylvinstruktur mit dem flächenzentrierten Würfelgitter Γ_c', weshalb wir die Symbole seiner Konstanten mit einem Strich versehen wollen. Man fand[3] $a_\omega = 3.86$ Å bei + 20° und $a_\omega' = 6.53$ Å bei + 250°.

Wir wollen diese beiden Gitterkonstanten, um sie besser vergleichbar zu machen, auf die Umwandlungstemperatur $t_u = + 184.3°$ zu reduzieren versuchen. FIZEAU fand am β-NH_4Cl bei + 40° den linearen thermischen Aus-

[1] C. Fr. NAUMANN, Journ. f. prakt. Chem. **50**, S. 11, 1850.

[2] Die flachste Fläche, nämlich (113) bzw. (225) kam wegen der Winkelwerte nicht in Frage; sie würde natürlich einen Achtflächner ergeben, aber nicht von trapezoedrischer, sondern von bipyramidaler Form.

[3] Diese und alle folgenden Gitterkonstanten sind dem »Strukturbericht 1913—1926« von P. P. EWALD und C. HERMANN entnommen (Leipzig 1927, Akad. Verlagsges.).

dehnungskoeffizienten $c = +0.0_4625$. Diesen Wert wenden wir, da c' vom α-NH_4Cl unbekannt ist, auch auf dieses an; wofern nur, der Regel entsprechend, $c' > 0$, werden wir hierdurch besser vergleichbare Gitterkonstanten erhalten. Es ergibt sich für t_u dann $a_\omega = 3.90$ Å und $a'_\omega = 6.50$ Å. Benennen wir den kleinsten Abstand von Anion und Kation in den beiden Strukturen mit d und d', so ist

$$(11) \qquad \begin{cases} d = \dfrac{a_\omega \sqrt{3}}{2} \\ d' = \dfrac{a'_\omega}{2}; \end{cases}$$

somit berechnet sich $d = 3.38$ Å und $d' = 3.25$ Å. Der kleinste Abstand erfährt durch die Umwandlung von β-NH_4Cl in α-NH_4Cl eine Längenänderung um k %, wo

$$(12) \qquad k = \frac{a'_\omega - a_\omega \sqrt{3}}{a_\omega \sqrt{3}} \cdot 100$$

Aus (12) folgt eine Kontraktion um 3.8 %.

Die prozentuale Änderung K des Volumens beträgt für den gleichen Vorgang

$$(13) \qquad K = \frac{a'^3_\omega - 4\,a^3_\omega}{4\,a^3_\omega} \cdot 100,$$

was eine Volumenvergrößerung um 15.7 % ergibt. Die flächenzentrierte Struktur Γ'_c des α-NH_4Cl hat also eine kleinere Dichte als die Würfelstruktur Γ_c des β-NH_4Cl; das ist kein Widerspruch zur Lehre von der dichtesten Packung, denn Γ'_c stellt im allgemeinen nur dann die dichteste Packung dar, wenn ein einziges Gitter vorliegt und nicht eine Mehrheit ineinandergestellter Gitter. Daß trotz der Ausdehnung der kleinste Ionenabstand eine Kontraktion erfährt, hängt damit zusammen, daß $d \parallel [111]$ liegt und $d' \parallel [100]$. Die Dichte ρ' von α-NH_4Cl ergibt sich aus ρ von β-NH_4Cl auf Grund der Gleichungen

$$(14) \qquad \begin{cases} \rho' = \dfrac{4\,a^3_\omega\,\rho}{a'^3_\omega} \text{ oder} \\ \rho' = \dfrac{100\,\rho}{K + 100}. \end{cases}$$

Aus der bei Zimmertemperatur bestimmten Salmiakdichte 1.532 und dem genannten Ausdehnungskoeffizienten c findet man für t_u den Wert $\rho = 1.487$ und hieraus mittels (14) $\rho' = 1.285$. Tabelle II gibt eine Übersicht der obigen Konstanten.

Tabelle II

Substanz	t_u	a_ω in Å	a'_ω in A	k	K	ρ	ρ'
NH_4Cl	+ 184.3°	3.90	6.50	− 3.8	+ 15.7	1.487	1.285

Eine analoge Umwandlung wie NH_4Cl erleidet NH_4Br bei + 137.8° und NH_4J bei — 17.6°. Die Strukturen von β-NH_4Br und α-NH_4Br sowie von β-NH_4J und α-NH_4J sind alle bekannt und denen von Salmiak analog, aber die thermischen Ausdehnungskoeffizienten sind bisher nicht bestimmt worden, so daß Reduktionen auf t_u nicht gut möglich sind; die ohne Reduktion berechneten Werte von k und K ergaben mit denen von NH_4Cl nicht die nach dem Periodischen System zu erwartende Reihenfolge, so daß sie hier nicht mitgeteilt werden sollen.

Die von B. GOSSNER[1] und R. C. WALLACE[2] bei der Umwandlung von β-NH_4Cl in α-NH_4Cl beobachtete Trübung bleibt bei der folgenden Abkühlung und Rückumwandlung erhalten und beruht nach meinen Beobachtungen darauf, daß die α-Kristalle nicht etwa homoaxial, sondern als unregelmäßiges Aggregat den ursprünglichen β-Kristall paramorphosieren und ebenso wohl bei der Rückumwandlung jeder der vielen winzigen α-Kristalle durch ein Aggregat von β-Kristallen paramorphosiert wird, so daß man durch wiederholtes Erhitzen über + 184.3° und Abkühlen ein immer feineres Korn bis hinab zu etwa molekularer Größenordnung erhalten könnte (Spaltungen und Translationen waren an NH_4Cl, NH_4Br und NH_4J wegen der Aggregatbildung weder nach der Umwandlung noch nach der Rückumwandlung zu erzielen). Diese Umwandlungseffekte sind ja wegen der großen Volumenänderungen und wegen der Verschiedenheit der Gitter Γ_c und Γ_c' von vornherein zu erwarten. Die gleichen Beobachtungen machte ich auch an NH_4Br bei $t_u = + 137.8°$ und an NH_4J bei $t_u = - 17.6°$.

VI. Sylvin-Struktur (α) und CsCl-Struktur (β).

Es wurde schon oben daran erinnert, daß die α-Kristallarten von NH_4Cl, NH_4Br und NH_4J die Sylvin-Struktur, die β-Kristallarten die CsCl-Struktur besitzen. Bei dichtester Packung wird in der Sylvin-Struktur jedes Ion von sechs entgegengesetzt geladenen Ionen berührt, in der CsCl-Struktur dagegen von acht. Hierzu muß das Längenverhältnis der beiderlei Ionenradien r und R den folgenden Bedingungen gehorchen:

$$(15)\qquad \begin{cases} (\alpha)\ \text{Sylvin-Struktur:}\quad 1 > \dfrac{r}{R} > \sqrt{2} - 1\,, \\ (\beta)\ \text{CsCl-Struktur:}\quad 1 > \dfrac{r}{R} > \sqrt{3} - 1\,. \end{cases}$$

Aus (15) folgt: wenn ein Radienverhältnis $\frac{r}{R}$ der Bedingung (β) genügt, so genügt es auch der Bedingung (α), während das Umgekehrte nicht zu gelten braucht. Nimmt man für die Anionen $\bar{F}$, $\overline{Cl}$, $\overline{Br}$ und $\bar{J}$ die empirischen Radien $R = 1.33$, 1.81, 1.96, 2.20 Å von V. M. GOLDSCHMIDT[3] oder die theo-

[1] B. GOSSNER, Z. f. Krist. **38**, 128, 1903.
[2] R. C. WALLACE, Zentralbl. f. Min. usw. 1910, 33.
[3] V. M. GOLDSCHMIDT, Geochem. Verteilungsges. VII, S. 20. Oslo 1926.

retischen von L. Pauling, die um weniger als 3 Prozent gegen die ersteren differieren, so folgen aus den bei Zimmertemperatur ermittelten Gitterkonstanten von β-NH_4Cl und β-NH_4Br und der bei etwa $-30°$ ermittelten Gitterkonstante von β-NH_4J für den Radius von $\overset{+}{N}H_4$ die Werte $r = 1.53$, 1.55, 1.58, im Mittel also 1.55 ± 0.03 Å. Daraus läßt sich berechnen, daß die Radien r und R der drei β-Kristallarten sämtlich der CsCl-Bedingung (β) und somit auch der Sylvin-Bedingung (α) genügen.

Übrigens liegt der genannte Mittelwert 1.55 Å des NH_4-Kations zwischen den betreffenden Werten von Rb und Cs, nämlich 1.49 und 1.65 Å, wie ja auch sonst öfters die Kristallkonstanten von NH_4-Salzen zwischen denen der analogen Rb- und Cs-Verbindungen gefunden wurden.

Ferner läßt sich berechnen, daß die α-Kristallarten KF, KCl, KBr, KJ, RbF, RbCl RbBr und RbJ hinsichtlich ihrer Ionenradien r und R alle bis auf KBr, KJ und RbJ nicht nur der Sylvin-Bedingung (α), sondern auch der CsCl-Bedingung (β) gehorchen. Die Quotienten $\frac{r}{R}$ von α-KBr, α-KJ und α-RbJ würden nach (15) bei einer Umwandlung in die β-Kristallarten eine Vergrößerung um mindestens 7% bzw. 22% bzw. 7% erfahren, wenn die relativ dichteste Packung entstände. Bekanntlich hat P. W. Bridgman[1] α-RbCl, α-RbBr und α-RbJ durch einen allseitigen Druck von etwa 5000 kg/cm² in eine andere Kristallart übergeführt, die nach L. Pauling[2] vielleicht als β-Kristallart angesprochen werden darf.

VII. Isomorphie der kubischen Haloïdsalze von NH_4 mit denen von K, Rb, Cs.

Während NH_4Cl, NH_4Br, NH_4J sowohl α-Kristalle als auch β-Kristalle liefern, sind bei KCl, KBr, KJ nur α-Kristalle bekannt, bei CsCl, CsBr, CsJ nur β-Kristalle, bei RbCl, RbBr, RbJ α-Kristalle und vielleicht[3] auch β-Kristalle; CsF tritt nur in α-Kristallen auf; eine in der Literatur anzutreffende Angabe über β-RbF mit $a_\omega = 3.66$ Å dürfte unrichtig sein, weil diese Gitterkonstante, wenn man den Radius von $\bar{F}$ mit V. M. Goldschmidt gleich 1.33 Å setzt, für $\overset{+}{R}b$ den Radius 1.84 Å ergeben würde.

Es fragt sich nun, ob die α-Kristalle und die β-Kristalle der drei Ammoniumsalze mit denen analoger Alkalisalze isomorph sind. Die Tabelle III enthält die Gitterkonstanten der β-Kristalle von NH_4Cl, CsCl, NH_4Br, CsBr, NH_4J, CsJ und ihre Differenzen; diese Konstanten beziehen sich bei NH_4J auf etwa $-30°$, bei den übrigen Salzen auf Zimmertemperatur. Der regelmäßige Gang ist sehr ausgeprägt.

Die Tabelle IV enthält die Gitterkonstanten der α-Kristalle von KCl, NH_4Cl, RbCl, KBr, NH_4Br, RbBr, KJ, NH_4J, RbJ; diese Konstanten be-

[1] P. W. Bridgman, Z. f. Krist. **67**, 363, 1928. [2] L. Pauling, ebenda **69**, 35, 1928.
[3] Vgl. die Bemerkung des vorigen Abschnittes über Bridgmans und Paulings Ergebnisse.

ziehen sich bei den K- und Rb-Salzen sowie bei NH_4J auf Zimmertemperatur, bei NH_4Cl und NH_4Br auf + 250°. Legt man den thermischen Ausdehnungen die Größenordnung derjenigen des gewöhnlichen Salmiaks[1] bei, so ergibt sich für ähnliche Temperaturen, daß die Gitterkonstante des NH_4-Salzes überall zwischen denen der analogen K- und Rb-Verbindungen liegt.

Tabelle III.

β-Kristallart	Gitterkonstante a_ω in Å	Differenz in %
NH_4Cl	3.86	+ 6.1
CsCl	4.11	
NH_4Br	4.05	+ 5.6
CsBr	4.29	
NH_4J	4.37	+ 4.2
CsJ	4.56	

Tabelle IV.

α-Kristallart	Gitterkonstante a'_ω in Å
KCl	6.28
NH_4Cl	6.53
RbCl	6.53
KBr	6.59
NH_4Br	6.90
RbBr	6.85
KJ	7.05
NH_4J	7.24
RbJ	7.33

Eine Spaltbarkeit, insonderheit nach {100}, fehlt den β-Kristallarten von NH_4Cl, NH_4Br und CsCl[2]; β-NH_4J soll noch untersucht werden und ebenso α-NH_4J, das nach {100} spalten dürfte, falls es nicht zu weich ist.

Die Translationen verlaufen nach $T = (011)$ mit $t = [100]$ in den β-Kristallen von NH_4Cl, NH_4Br, CsCl; β-NH_4J konnte noch nicht untersucht werden. Sie verlaufen dagegen nach $T = (011)$ mit $t = [0\bar{1}1]$ in den α-Kristallen von NH_4J, KCl, KBr, KJ, RbCl, in denen von NH_4Cl, NH_4Br, RbBr und RbJ sind sie noch nicht geprüft.

Preßt man einen Würfel von Sylvin $\perp$ (001), so entsteht Doppelbrechung mit c in der Druckrichtung [001]; das gleiche gilt für alle untersuchten α-Kristallarten, nämlich KBr, KJ, RbCl und NH_4J, während die β-Kristallarten von NH_4Cl, NH_4Br und CsCl a statt c entwickeln.

Alles das besagt Isomorphie der α-Kristallarten von Alkali und Ammonium sowie auch ihrer β-Kristallarten.

---

[1] Vgl. Abschnitt V.

[2] Die von P. GROTH (Chem. Kristallogr. I, 181, 1906) für CsCl angegebene kubische Spaltung konnte ich nicht bemerken.

Was die Symmetrie betrifft, so gehören die α-Kristalle von KCl, KBr, KJ nach R. Brauns zweifellos in die morphologische Symmetrieklasse O, ebenso nach M. Sprockhoff[1] diejenigen von RbCl und RbBr, während die Symmetrie von α-NH_4J leider noch nicht genau untersucht ist. Die β-Kristalle von NH_4Cl, also wohl auch diejenigen von NH_4Br und NH_4J gehören ebenfalls zur Klasse O und nach Sprockhoff auch die von CsBr.

Die Tabelle V gibt eine Übersicht über die Daten dieses Abschnittes.

Tabelle V.

Kristallart	stabil bei $t°$	Spaltbarkeit $\parallel \{100\}$	Gleitrichtung t parallel	Druckrichtung [001] wird	Symmetrie-klasse
β-NH_4Cl	$t < +184.3$	fehlt	[100]	a	O
β-NH_4Br	$t < +137.8$	»	»	»	»
β-NH_4J	$t < -17.6$	»?	»?	»?	»?
β-CsCl	$t =$ Zimmer-temperatur	fehlt	[100]	a	»?
β-CsBr	»	»	»?	»?	O
β-CsJ	»	»	»?	»?	»?
β-RbCl?	» / 5 000 kg/cm²	»?	»?	»?	»?
β-RbBr?	»	»?	»?	»?	»?
β-RbJ?	»	»?	»?	»?	»?
α-NH_4Cl	$t > +184.3$	vorhanden?	[$0\bar{1}1$]?	c?	»?
α-NH_4Br	$t > +137.8$	»?	»?	»?	»?
α-NH_4J	$t > -17.6$	»?	[$0\bar{1}1$]	c	»?
α-KCl	$t =$ Zimmer-temperatur	vorhanden	»	»	O
α-KBr	»	»	»	»	»
α-KJ	»	»	»	»	»
α-RbCl	»	»	»	»	»
α-RbBr	»	»	»?	»?	»
α-RbJ	»	»	»?	»?	»?

Aus alledem darf man wohl schließen, daß alle genannten α-Kristallarten untereinander isomorph sind und ebenso alle angeführten β-Kristallarten; und da nun sowohl der natürliche α-Sylvin als auch der gewöhnliche β-Salmiak sicher in die Symmetrieklasse O gehören und nicht in O_h, so dürfte das gleiche für alle oben behandelten Kristallarten zutreffen[2]. Dazu kommt noch, daß R. Krickmeyer[3] aus wäßriger Lösung bei Zimmertemperatur Mischkristalle von etwa 97 % NH_4Cl mit etwa 3 % KCl erhielt sowie solche von etwa 97 % KCl mit etwa 3 % NH_4Cl; es ist wohl fraglos, daß die ersteren die Struktur von β-NH_4Cl besaßen und die letzteren die Struktur von α-KCl; damit ist zugleich die Existenz eines β-KCl wahrscheinlich gemacht. Besonders aussichtsvoll und ausschlaggebend wäre es, wenn man bei Zimmer-

[1] M. Sprockhoff, N. Jahrb. f. Min. usw., Beilage, Bd. **18**, 122, 1904.

[2] P. Niggli bezeichnet in seinem Lehrbuch d. allgem. Mineralogie 1924, S. 531 den α-Salmiak als holoedrisch; falls es sich nicht um einen bloßen Druckfehler handelt, können wir dem nicht zustimmen.

[3] R. Krickmeyer, Z. f. physikal. Chem. **21**, 71, 1896.

temperatur NH_4Cl und CsCl aus gemeinsamer wäßriger Lösung auskristallisieren ließe und ebenso NH_4J und RbJ.

Zum Schluß sei als interessant erwähnt, daß β-CsCl aus reiner wäßriger Lösung bei Zimmertemperatur in den gleichen eigenartigen Formen kristallisiert, wie man sie nicht selten am gewöhnlichen β-Salmiak erhält, nämlich in würfelähnlichen Gestalten, bei denen auf jeder Pseudowürfelfläche parallel ihren Seiten zwei sich in der Flächenmitte kreuzende Kerben verlaufen, so daß der Kristall wie ein doppelt verschnürtes Paket aussieht. Ob hier vielleicht Ergänzungszwillinge von rechts und links struierten Kristallen vorliegen, soll demnächst untersucht werden.

Mineralog.-petrogr. Inst. d. Univers. Berlin.

Ausgegeben am 4. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

JOHNSEN: Über den β-Salmiak und verwandte Kristallarten.

(Vgl. S. 494.)

1929 XXV

Library of Congress
MAY 8
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 24. Oktober. (S. 507)
HOFMANN: Beiträge zur Kenntnis des Schwarzpulvers. (S. 509)
M. SCHMIDT: Neue Funde in der iberisch-balearischen Trias. (S. 516)
G. HOHEISEL: Zur Theorie der komplexen Zahlen. (S. 524)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrücke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XXV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 24. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. K. A. Hofmann überreichte: Beiträge zur Kenntnis des Schwarzpulvers.

Er berichtet über die geschichtliche Entwicklung des Schwarzpulvers und über die Vorgänge bei der Entzündung und Verbrennung der Salpeter-Kohle-Schwefelgemische. Er weist nach, daß die gasförmigen Reaktionsprodukte, zumal Kohlenoxyd, Kohlendioxyd. neben dem Schwefel autokatalytisch die hohe Verbrennungsgeschwindigkeit bewirken.

2. Hr. Warburg sprach über die Photolyse der Lösungen von Schwefelwasserstoff in Hexan und in Wasser, nach Versuchen mit Dr. Rump. (Ersch. später.)

Das beobachtete anormale Verhalten der wässerigen Lösungen erklärt sich durch eine Reaktion zwischen dem Schwefelwasserstoff und dem Wasser.

3. Hr. Pompeckj legte eine Arbeit von Prof. Dr. Martin Schmidt in Tübingen »über neue Funde in der iberisch-balearischen Trias« vor.

Die Ausbildung der Trias wird entsprechend der kontinentalen Trias bestätigt. Einstöße der alpin-mediterranen Trias werden bestätigt. Ein besonderes Vorkommen im Gebiet von Alicanta ist ein mariner Einstoß in den unteren Buntsandstein — im Gegensatz zum marinen oberen Buntsandstein der germanischen Trias.

4. Hr. Hesse überreichte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. Paul Krüger in Wien »Über die Verdauungsfermente der Wirbellosen«. (Ersch. später.)

Die Abhandlung bringt weitere Bestätigung für den Befund des Verfassers, daß die Verdauungsfermente der Wirbellosen Beziehungen zu den intrazellularen Enzymen der Wirbeltiere zeigen und daß sie offensichtlich mit pflanzlichen Fermenten, speziell denen der Hefe, verwandt sind, also primitivere Zustände zeigen. Die Untersuchungen, die ursprünglich an Flußkrebs und Weinbergschnecke gemacht wurden, werden hier auf Meerestiere (Krebse, Schnecken, Tintenfische, Holothurien und Manteltiere) ausgedehnt.

5. Hr. Schur legte eine Arbeit des Hrn. Privatdozenten Dr. R. Brauer in Königsberg i. Pr. vor: Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe. (Ersch. später.)

Die Arbeit enthält eine vollständige Lösung der Aufgabe, alle stetigen Darstellungen der komplexen Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen zu bestimmen. Es ergibt sich insbesondere, daß diese Darstellungen für mehr als zwei Veränderliche vollständig reduzibel sind.

6. Hr. Schur legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. C. L. Siegel in Frankfurt a. M. vor: Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. (Abh.)

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Der erste Teil behandelt Transzendenzfragen. Es wird insbesondere bewiesen, daß die von Null verschiedenen Nullstellen der Besselschen Funktionen $J_\lambda(x)$ mit rationalem λ transzendente Zahlen sind, und daß für eine von Null verschiedene algebraische Zahl x zwischen $J_0(x)$ und $J_0'(x)$ keine algebraische Beziehung mit algebraischen Koeffizienten bestehen kann. Im zweiten Teil gelangt der Verfasser zu einem wichtigen Satz über diophantische Gleichungen mit zwei Unbekannten: Eine solche Gleichung kann nur dann unendlich viele ganzzahlige Lösungen aufweisen, wenn das Geschlecht der zugehörigen algebraischen Kurve gleich Null ist.

7. Die HH. L. Bieberbach und I. Schur legten folgende Berichtigung ihrer Arbeit: »Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen« vor.

Auf S. 514 Jahrgang 1928 ist in der zweiten Zeile nach (2) hinter »nichtnegativen« einzuschalten »reduzierten«. Ebenso in Zeile 4 von unten. Auf S. 515 soll es in Zeile 1 und 8 von oben statt »nichtnegativ« »positiv« heißen. Die Zeilen 2 bis 6 sind zu streichen.

8. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. G. Hoheisel in Breslau vor: »Zur Theorie der komplexen Zahlen«.

Es wird eine rein algebraische Charakterisierung des Körpers der gewöhnlichen komplexen Zahlen gegeben.

9. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. E. Ullrich in Jena vor: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. (Ersch. später.)

Es wird eine Ungleichung bewiesen, die sich bei geeigneter Anordnung der bekannten Beweise des II. Hauptsatzes in der Theorie meromorpher Funktionen ergibt, diesen enthält, aber über ihn hinaus neue Schlüsse über die Ableitung der zugrunde gelegten Funktion gestattet, z. B.: Hat eine meromorphe Funktion Nevanlinnasche Ausnahmewerte, so hat ihre Ableitung die Ausnahmewerte 0 oder ∞. Endlich werden einige für die Theorie bedeutungsvolle Beispiele besprochen.

10. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. H. Bohr in Kopenhagen vor: »Über ganze transzendente Funktionen von einem besonderen Typus«. (Ersch. später.)

Es sei eine beliebige stetige ins Unendliche laufende Kurve K der komplexen Ebene, sowie eine Umgebung G derselben gegeben. Dann gibt es eine nicht identisch verschwindende ganze transzendente Funktion, die gleichmäßig gegen Null strebt, wenn z innerhalb der Komplementärmenge von G ins Unendliche strebt.

11. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. M. J. Belinfante in Amsterdam vor: »Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen«. (Ersch. später.)

Die Theorie der unendlichen Reihen wird unter Vermeidung des tertium non datur entwickelt.

12. Hr. Geh. Rat His (Berlin-Grunewald) hat der Akademie ein Konvolut von Druckschriften und Briefen überwiesen, das sich auf die von der internationalen Assoziation der Akademien geplante Kommission für Hirnforschung bezieht, und das zum Teil aus dem Nachlaß des Vaters des Hrn. His, zum Teil aus dem des Hrn. von Waldeyer-Hartz stammt.

Beiträge zur Kenntnis des Schwarzpulvers.

Von K. A. Hofmann.

Die Entdeckung der explosiven Gemische aus Salpeter, Kohle und Schwefel, wie man solche als Schwarzpulver bezeichnet, schreibt man jetzt[1] auf Grund geschichtlicher Forschung den Chinesen zu, hauptsächlich wohl deshalb, weil in den ältesten Urkunden der Salpeter als Schnee oder Salz von China bezeichnet worden ist. So z. B. bei dem arabischen Schriftsteller Abd Allah, der im 13. Jahrhundert lebte, und im Leydener Kriegsbuch von 1225. Um diese Zeit wurde der Salpeter durch Vermittlung der mohammedanischen Händler im westlichen Asien und auch in Europa bekannt. Wahrscheinlich hat auch das Vordringen der Mongolen nach Mitteleuropa (um 1240 im heutigen Polen) die Kenntnis von den chinesischen Feuertöpfen schneller ausgebreitet, als dies auf friedlichem Wege geschehen konnte.

Die Chinesen selbst haben wohl erst um 1200 pulverähnliche Mischungen erfunden, und um 1259 stellte man die »Lanze des ungestümen Feuers« her, indem man gekörntes Pulver in Bambusrohren entzündete und die brennenden Körner gegen den Feind fliegen ließ.

Wenn nun die Chinesen schon vor Roger Bacon (um 1242 de secretis operibus artis . . .) und Berthold Schwarz (nach 1245), die man früher als die Erfinder des Pulvers nannte, das Pulver mit seinen explosiven Eigenschaften kannten, so fällt es auf, daß bestimmt zuerst in Europa, und zwar sehr wahrscheinlich in Deutschland, das Pulver als geschoßtreibendes Mittel verwendet worden ist. Metallrohre, aus denen man schwere Geschosse durch die Kraft des Pulvers schleuderte, um durch mechanische Wucht zu wirken, mithin die Geschütze, kamen zu Anfang des 14. Jahrhunderts wohl von Deutschland ausgehend bald allenthalben in Europa auf, während in China selbst im Jahre 1621 dergleichen noch unbekannt war.

Man hat aus dieser jahrhundertelangen scheinbaren Rückständigkeit der Chinesen hinsichtlich der kriegsmäßigen Ausbildung und Vervollkommnung der Feuerwaffe schließen wollen, daß die Kenntnis vom Pulver nicht von China ausgegangen sei, und man hat diese Erfindung nach Deutschland (Berthold Schwarz in Freiburg) oder nach Byzanz (Marcus Graecus im 13. Jahrhundert, liber ignium ad comburendos hostes) verwiesen.

Nach meiner Überzeugung löst sich aber der berührte Widerspruch sehr einfach, wenn man die Frage nach dem Bedarf sinngemäß beantwortet. Die

[1] Siehe die Zusammenstellung der Literatur bei Escales, Schwarzpulver und Sprengsalpeter, 2. Auflage (Leipzig, Veit u. Co.) 1914.

Chinesen bedurften einer Waffe gegen die schnell beweglichen mongolischen und tatarischen Reiter, und ihre feuersprühenden Bambusrohre waren gegen solche Feinde viel wirksamer zu gebrauchen als die schwerfälligen abendländischen Geschütze; diese wurden ja auch in Europa für die Feldschlacht erst viel später brauchbar. Im Abendland und besonders in Deutschland waren zumeist Feinde zu bekämpfen, die hinter den festen Mauern von Burgen saßen, und man weiß, mit welchem Erfolge die Kanonen gegen die Raubritter verwendet wurden. Hier mußte man durch die Wucht des Geschosses wirken, und hier wurde das Pulver als treibendes Mittel, als Schießpulver im eigentlichen Sinn des Wortes, eingeführt.

Prüft man die älteren europäischen Schießpulver auf ihren Wert, so fällt es auf, daß diese gegenüber dem von Marcus Graecus im 13. Jahrhundert beschriebenen Pulver mit 67 % Salpeter, 11 % Schwefel, 22 % Kohle in zweckwidriger Weise abweichen. Während dieses, höchstwahrscheinlich aus China stammende Pulver schon so vollkommen ist, daß wir es zwischen das Geschütz- und Sprengpulver des 19. Jahrhunderts einwerten müssen, waren in Deutschland und England um 1380 die Bestandteile etwa im Verhältnis von 1 : 1 : 1 gemischt. Solche Pulver enthielten viel zu wenig Salpeter und waren sehr minderwertig. Wenn auch dieser Rückschritt zum Teil aus dem Bestreben hervorging, den teueren Salpeter durch die billigeren anderen Bestandteile zu strecken, so berechtigt doch die weitere Entwicklung des europäischen Schießpulvers zu dem Schluß, daß man sich diesem neuen Hilfsmittel gegenüber in Europa recht ungeschickt zeigte, und auch hieraus ist zu schließen, daß das Pulver als fremdartige Erfindung von außen, und zwar nach dem Vorhergehenden aus China, eingeschleppt worden ist.

In England kannte man leistungskräftige Mischungen mit 67 % Salpeter, 16.5 % Schwefel und 16.5 % Kohle seit 1520, in Deutschland etwa im Dreißigjährigen Krieg ebenfalls mit 67 % Salpeter, 16.5 % Schwefel, 16.5 % Kohle, während in Frankreich schon 1589 das für Gewehre und Geschütze annähernd beste Verhältnis mit 75 % Salpeter, 12.5 % Schwefel, 12.5 % Kohle gefunden war. Dorther stammt auch das alte französische Sprichwort »le charbon fait la poudre«, woraus hervorgeht, daß man dort schon frühzeitig die Herstellung der Pulverkohle verbesserte.

Von chemischem Interesse ist nun die Frage, ob man die drei Bestandteile des Pulvers nur gewohnheitsmäßig beibehielt, oder ob neben dem Salpeter und der Kohle auch der Schwefel unbedingt erforderlich ist, um ein brauchbares Treibmittel zu schaffen.

Sir Andrew Noble[1] sagte vor etwa 50 Jahren: »Ich habe es niemals verstehen können, warum der Schwefel so lange als Bestandteil des Schießpulvers beibehalten worden ist. Im englischen Heere wurde er kurz vor der Einführung der modernen Pulver fast gänzlich fortgelassen im Kakaopulver, in welchem die Menge des Schwefels auf 2 % reduziert wurde.« Daraufhin wurden vergleichende Versuche angestellt mit Pulvern, in denen

[1] Escales, Schwarzpulver und Sprengsalpeter, 2. Auflage, S. 440 (Leipzig, Veit u. Co.) 1914.

bei ziemlich konstantem Verhältnis Salpeter 75 zu Kohle 14.5 der Schwefelgehalt von Null bis 10 wechselte.

Ich habe nun die Ergebnisse dieser Versuche nachgeprüft und finde, daß bei diesen, den damaligen Militärpulvern nächststehenden Mischungen der normale Schwefelgehalt von etwa 10% die Wirksamkeit des Treibmittels bedeutend erhöht. Mißt man in üblicher Weise die von 1 g Pulver gelieferte Energie durch das Produkt der entwickelten Gasmenge (0° und 760 mm) in ccm und der abgegebenen Wärme in cal, so bleibt der mittlere Wert von etwa 200000 nahezu unverändert, wenn der Schwefelgehalt in besagtem Maße wechselt, aber das Gasvolumen steigt um 10 bis 12%, und die abgegebene Wärme fällt im selben Verhältnis. Dies bietet den Vorteil, daß die Temperatur der Gase erniedrigt wird und so die Rohre weniger stark angegriffen werden, während der Gasdruck durch das erhöhte Gasvolumen merklich größer ist als bei den schwefelfreien Pulvern und dadurch die Leistung erhöht wird, z. B. nach Noble Pulver A mit 81.3 KNO_3, 0.18 Schwefel, 16.71 Kohle, 1.81 Feuchtigkeit gibt Gasvolumen 254 ccm/g und cal 800/g; Energie = 254 × 800 = 203200.

Kieselpulver WA mit 74.76 KNO_3, 10.07 Schwefel, 14.22 Kohle, 0.95 Feuchtigkeit gibt Gasvolumen 278 ccm/g und cal 721/g; Energie = 278 × 721 = 200438.

Immerhin hätte man vor etwa 50 Jahren den Vorschlägen von Sir A. Noble folgen können, und es wären wahrscheinlich schwefelfreie Pulver zur Einführung gelangt, zumal da man durch Zusatz von Ammonsalpeter (40% KNO_3, 38% NH_4NO_3, 22% Kohle) im Amidpulver die Leistung noch zu steigern vermochte, wenn nicht um 1887 die Schießwollepulver für die Armeen aufgekommen wären.

Bevor man die sehr stark wirkende Perkussionszündung kannte (etwa um 1825), wäre die Verwendung von schwefelarmen oder gar von schwefelfreien Pulvern unmöglich gewesen, weil die schwachen Funken der Steinschlösser zur Zündung nicht ausreichten.

Wenn somit für Schießpulver ein Schwefelgehalt von 10 bis 12% wohlbegründeterweise beibehalten worden ist, so ist auch für die noch heute im großen Maße gebräuchlichen Sprengpulver die schon vor Jahrhunderten übliche Steigerung auf 15 bis 20% Schwefel durchaus sachgemäß beibehalten worden. Meine diesbezüglichen Versuche ergaben, daß bei Pulvern mit dem molaren Verhältnis: 2 KNO_3 + 4 bis 5 C (auf reinen Kohlenstoff berechnet) durch 15% Schwefelgehalt die Gasmenge um 30 bis 35% gesteigert wird, während die Energieentfaltung für 1 g mit 180000 bis 186000 nur um etwa 7% hinter den leistungsfähigsten Schießpulvern zurückbleibt. Für Sprengungen mit Schwarzpulver ist aber eine möglichst große Gasmenge erwünscht, um durch schiebenden Druck geeignete Stücke loszusprengen, z. B. gebräuchliches Sprengpulver mit 61.92 KNO_3, 15.06 Schwefel, 21.41 Kohle, 1.61 Feuchtigkeit gibt Gasvolumen 360 ccm/g und cal 517/g; Energie = 360 × 517 = 186120.

Im Zusammenhang hiermit habe ich gemeinsam mit Hrn. Dr. K. LESCHEWSKI durch besondere Versuchsreihen ermittelt, welche chemischen Vorgänge die Ent-

zündung des Schwarzpulvers einleiten und wie die Verbrennung verläuft. Zwar kann hierüber erst später ausführlich berichtet werden, doch sollen schon hier einige Ergebnisse folgen, soweit sie die Rolle betreffen, die der Schwefel im Reaktionsgemisch spielt.

In Gemischen entsprechend 1) 2 Mol KNO_3 + 3 Atom C (in Faulbaumkohle von 71% C, 4.6% H) beginnt ab 320° deutliche Wärmeentwicklung, die bei 357° zur Verpuffung führt. Bei 2) 2 Mol KNO_3 + 1 Atom S beginnt W. E. bei 310° und die Verpuffung erfolgt bei etwa 450°. Bei 3) 2 Mol KNO_3 + 1 Atom S + 3 Atom C (wie vorhin) beginnt W. E. bei 290°, Verpuffung folgt bei 311°. Der Vergleich von 1) mit 2) zeigt, daß die Verpuffungstemperatur von Kohle mit Salpeter um rund 100° tiefer liegt, als die von Schwefel mit Salpeter, und es ist zunächst nicht verständlich, daß nach der allgemeinen Erfahrung und gemäß 3) der Schwefel die Entzündungstemperatur des Pulvers, d. h. der Gemenge aus Salpeter, Kohle und Schwefel, herabdrückt.

Zur Aufklärung dieses Zusammenhangs muß man zunächst die der Verpuffung vorausgehenden Vorgänge berücksichtigen.

Der Reaktionsbeginn von 320° in 1) fällt mit dem durch Nitritbildung herabgedrückten Schmelzpunkt des Salpeters zusammen, und entsprechendes gilt für Gemische mit Natronsalpeter sowie mit dem niedrigst schmelzenden Gemisch der beiden Salpeter. Daraus folgt, daß nur der geschmolzene Salpeter auf die Kohle einwirkt und daß schwefelfreie Pulver schwerer zündbar sind, weil erst die Schmelzwärme des Salpeters (für 1 Mol KNO_3 = 4.79 Cal), wenn auch nur an der Zündungsstelle, aufgeboten werden muß, was durch Versuche mit besonderer Funkenzündung und mit dem Fallhammer auch bestätigt wurde.

Ohne Kohle wirkt der schon bei 112.8° schmelzende Schwefel auf den Salpeter (vgl. 2) deutlich früher ein als die Kohle, aber Kohle und Schwefel zusammen erniedrigen die Temperatur des Reaktionsbeginnes und der Verpuffung sehr bedeutend. Die Erklärung für diese potenzierte Wirkung wurde gefunden in dem Nachweis, daß der Schwefel mit dem Wasserstoffgehalt der Kohle ab 150° Schwefelwasserstoff entwickelt und daß dieser schon unterhalb 280° lebhaft mit dem Salpeter reagiert. Durch die so gesteigerte Wärmeentwicklung wird naturgemäß die Verpuffungstemperatur herabgesetzt: der Schwefel macht das Pulver thermisch leichter zündbar.

Noch viel wichtiger ist die Wirkung des Schwefels bei der Verbrennung des Pulvers, indem er diese beschleunigt und die schließlich erhältliche Gasmenge erhöht. Hierbei handelt es sich um die folgenden Vorgänge.

Wie schon H. Debus[1] betont hat, besteht die Pulververbrennung aus zwei verschiedenen nacheinander stattfindenden Prozessen:

a) einem Oxydationsprozeß, währenddessen Kaliumsulfat, Kaliumkarbonat, Kohlendioxyd und Stickstoff, wenig Kohlenoxyd und kein Schwefelkalium entstehen. Auch bei verschieden dosierten Gemischen verläuft dieses Stadium, die eigentliche Explosion, wesentlich nach der Gleichung: $10\,KNO_3 + 8\,C + 3\,S = 2\,K_2CO_3 + 3\,K_2SO_4 + 6\,CO_2 + 5\,N_2$. Die wenigen Prozente Kohlenoxyd

[1] Liebigs Annalen **212**, 257 und **213**, 15 (1882).

stammen aus dem Sauerstoffgehalt der mitentgasten Kohle. Bei a) wird Wärme entwickelt, und zwar für diese Molzahlen rund 979 Cal.;

b) einem Reduktionsprozeß, bei dem der aus a) noch übrige Kohlenstoff das entstandene Kaliumsulfat reduziert nach $K_2SO_4 + 2\,C = K_2S + 2\,CO_2 -$ 58 Cal., und mit dem Kohlendioxyd nach $CO_2 + C = 2\,CO - 38.4$ Cal. teilweise Kohlenoxyd bildet. Das Kaliumsulfid wird vom Kohlendioxyd mit Hilfe von Wasserdampf (aus dem Wasserstoff der Kohle) und wohl auch unter Sauerstoffbindung in beträchtlichem Maße in Kaliumkarbonat übergeführt nach $K_2S + CO_2 + H_2O = K_2CO_3 + SH_2$ und $K_2S + CO_2 + {}^1/_2\,O_2 = K_2CO_3 + S$. Das nicht zersetzte Kaliumsulfid gibt mit freiem Schwefel das Disulfid K_2S_2. In Summe verbrauchen die Umsetzungen des hier mit b) bezeichneten Stadiums bedeutende Wärmemengen, sie wirken kühlend, verlaufen verhältnismäßig langsam und kommen infolgedessen praktisch wohl nicht völlig zum Abschluß; aber sie setzen doch einen erheblichen Teil der von a) gelieferten Wärme in Gasdruck um, weil sie Kohlendioxyd und Kohlenoxyd frei machen, und zwar ersteres in bedeutend größerer Menge als durch Zersetzung von Kaliumsulfid wieder gebunden wird. Dies gilt ganz besonders bei den Sprengpulvern mit hohem Schwefel- und Kohlenstoffgehalt.

Um in einfachster Weise übersehen zu können, wodurch der Schwefel die Gasmenge aus dem Salpeter-Kohle-Gemisch steigert, braucht man nur die dem Salpeter entstammenden festen, nicht vergasten Rückstände zu vergleichen. Diese bestehen bei fehlendem Schwefelgehalt des Pulvers aus Kaliumkarbonat, bei normalem Schwefelzusatz von 10% aber besteht der Rückstand zu etwa 35% aus Kaliumsulfat und Kaliumdisulfid und zu etwa 65% aus Kaliumkarbonat. Es wird somit ein erheblicher Teil des Kaliums aus dem Salpeter vom Schwefel gebunden, und dementsprechend bleibt mehr Kohlendioxyd frei in den gasförmigen Produkten. In bedeutend höherem Maße findet dies statt bei den Sprengpulvern mit erhöhtem Schwefel- und Kohlegehalt z. B. für Sprengpulver mit dem Molverhältnis $2\,KNO_3 + 1.5\,S + 4.8\,C$ (rein) bleiben Kaliumcarbonat und Kaliumdisulfid (kein Kaliumsulfat) im Verhältnis von 19.5 zu 17.5 zurück.

Bei allem, was wir bis jetzt über die Kinetik chemischer Reaktionen wissen, fällt es auf, daß ein Gemisch aus festen Stoffen, wie sie im Schießpulver zwar mechanisch feinst gemahlen, aber im molekularchemischen Sinne doch als grobe Stücke nebeneinander liegen, in so außerordentlich kurzer Zeit sich explosiv umsetzen kann. Auch wenn man von den sekundären Reaktionen absieht, wie sie vorhin unter b) zusammengefaßt wurden, und nur den mit a) bezeichneten Oxydationsprozeß berücksichtigt, so kann man ein Zusammenwirken von $10\,KNO_3 + 8\,C + 3\,S$ nicht als möglichen Reaktionsmechanismus, sondern nur als stöchiometrische Endsumme gelten lassen. Es muß vor allem untersucht werden, wie der Sauerstoff aus dem thermisch nur sehr träge spaltbaren Salpeter auf die nicht schmelzbare und nicht flüchtige Kohle übertragen werden kann.

Für die am schnellsten abbrennenden Pulver mit 10 und mehr % Schwefel wirkt nach meinen Untersuchungen dieser katalysierend, indem er geschmol-

zen oder als Dampf aus dem Salpeter Stickoxyde freimacht [1], z. B. $2\,KNO_3 + S = K_2SO_4 + 2\,NO$, die als solche bzw. nach ihrem thermischen Zerfall den Sauerstoff an die Kohle abgeben, und indem er als Schwefeldioxyd gleichfalls die Kohle oxydiert. Nach $SO_2 + C = CO_2 + S + 28$ Cal und nach $K_2S + CO_2 + {}^1/_2\,O_2 = K_2CO_3 + S$ — siehe unter b) weiter oben — wird der Schwefel, soweit er nicht als Kaliumsulfat vom Salpeter gebunden bleibt, wieder frei, und er kann weiterhin den Vorgang der Sauerstoffabgabe aus dem Salpeter an die Kohle katalysieren.

Eine sehr wichtige Bestätigung dieser Auffassung erblicke ich in dem Nachweis, daß nach der Explosion in der Bombe fast die Hälfte des Schwefels als freier Schwefel nachbleibt, und zwar sowohl bei Pulvern mit nur 10% Schwefelgehalt als auch bei solchen mit 15%. Als überflüssigen, d. h. über das erforderliche Maß hinaus verwendeten Schwefelgehalt darf man diesen zurückerhaltenen Schwefel keineswegs ansehen, denn wenn man demgemäß den Schwefelgehalt des Pulvers geringer wählt, so sinken die Zündbarkeit, die Verbrennungsgeschwindigkeit und die Leistungsfähigkeit solcher Pulver herab. Der nachbleibende freie Schwefel ist somit bei der Verbrennung des Pulvers nicht träge geblieben, sondern er hat die Verbrennung gefördert und ist schließlich regeneriert worden.

Unerklärt bleibt aber noch die Tatsache, daß auch schwefelfreie Pulver mit für manche Zwecke genügend großer Geschwindigkeit jedenfalls auch explosionsartig schnell abbrennen. Hier geben gleichfalls meine Versuche Aufschluß, indem ich feststellte, daß Kohlendioxyd schon bei 500° aus dem Salpeter Stickoxyde austreibt und daß Kohlenoxyd bei 400° den Salpeter schnell umsetzt zu Kaliumkarbonat und Stickoxyden, z. B. $CO_2 + 2\,KNO_3 = K_2CO_3 + 2\,NO + {}^3/_2\,O_2$ und $CO + 2\,KNO_3 = K_2CO_3 + 2\,NO + O_2$.

Wenn nun die festen Kohleteilchen mit dem umgebenden geschmolzenen Salpeter verbrennen, so müßte das gebildete Kohlendioxyd zusammen mit dem freigemachten Stickstoff als Gashülle an sich den Fortgang der Reaktion verzögern, aber das Kohlendioxyd wirkt chemisch auf den Salpeter ein und noch mehr das aus dem Kohlendioxyd an den heißglühenden Kohleteilchen hervorgegangene Kohlenoxyd. So wird die Reaktionsgeschwindigkeit **autokatalytisch** gesteigert bis zum explosiven Verlauf.

Im engen Zusammenhang damit steht eine von mir gleichfalls untersuchte, sehr auffallende, aber bisher kaum beachtete Erscheinung.

Wenn man nämlich Schwarzpulver, normal gekörnt oder in Pastillen gepreßt, unter vermindertem Druck durch Funken oder dünnen Glühdraht zu zünden versucht, so erlöschen die Pulver sofort wieder, auch wenn an den Berührungsstellen schon deutlich sichtbare Entzündung stattgefunden hat. Hierfür genügt schon das Vakuum einer Wasserstrahlpumpe mit etwa 30 mm Druck. Wenn nach der alten, bisher wohl allein gültigen Auffassung das Abbrennen des Pulvers bloß durch Wärmeübertragung von Schicht zu Schicht erfolgt, dann läßt sich diese Beobachtung nicht befriedigend erklären. Wenn aber das Fort-

[1] Hierauf beruhte das älteste, um 1750 in England eingeführte Verfahren zur Herstellung der Schwefelsäure in den Bleikammern.

schreiten der Verbrennung des Pulvers im wesentlichen auf autokatalytischen Vorgängen beruht, indem die Gase: Schwefeldampf, Schwefeldioxyd, Kohlendioxyd und Kohlenoxyd auf den Salpeter zersetzend wirken und der dabei freigemachte Sauerstoff (aus den Stickoxyden) die Verbrennung der Kohle zustande bringt, dann muß durch den schnellen Austritt der Gase in den druckverminderten Raum die Verbrennung zum Stillstand kommen. Auch die bekannte Steigerung der Verbrennungsgeschwindigkeit von Schwarzpulver unter hohem Druck beruht hauptsächlich auf der konzentrationsmäßig mit dem Druck erhöhten Wirksamkeit obiger Gase gegenüber dem Salpeter.

Als wesentlichen Inhalt dieser Mitteilung hebe ich hervor den Nachweis, daß der rein erfahrungsmäßig gefundene und bis in die Gegenwart beibehaltene Schwefelgehalt des Schwarzpulvers dessen Wirksamkeit sehr wesentlich beeinflußt, und daß die Verbrennungsgeschwindigkeit solcher Mischungen durch autokatalytische Vorgänge befördert wird, an denen der Schwefel beteiligt ist.

Neue Funde in der iberisch-balearischen Trias.

Von Prof. Dr. Martin Schmidt
in Tübingen.

(Vorgelegt von Hrn. Pompeckj.)

In gedrängter Kürze soll hier berichtet werden über die Ergebnisse einer Studienreise in die spanische Trias, die mir in der Hauptsache durch eine reiche Gabe der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft ermöglicht wurde. Ich ergreife die Gelegenheit, ihr auch hier öffentlich meinen herzlichen Dank zu sagen.

Die spanische Trias nimmt nach der herrschenden Meinung eine Art Mittelstellung ein zwischen den kontinentalen Bildungen des Triasabschnittes im germanischen Becken und der ozeanischen Entwickelung im alpin-mediterranen Gebiet. Ein nicht geringer Anteil besitzt jedenfalls auch in Spanien deutlich kontinentales Gepräge, ganz wie bei uns. Sogar die Dreiteilung, nach der in Deutschland Alberti der Formation ihren Namen gab, zwei Abschnitte von mehr oder minder terrestrischer Fazies, getrennt durch eine Überflutung durch ein Küstenmeer, fand sich ganz ähnlich besonders im Südosten des iberischen Gebietes und auf den Balearen wieder. Vor allem die Arbeiten von A. Tornquist (in diesen Berichten) haben hier zur Klärung der Anschauungen beigetragen. Ich darf seine Ergebnisse als bekannt voraussetzen.

Von besonderem Interesse ist, daß durch die von Tornquist festgestellte Altersgliederung gewisse in dem Gebiet seit langer Zeit bekannte Horizonte mit Ammonoideen der alpin-mediterranen Fazies mit der germanischen Gliederung schon in ein leidlich bestimmtes Verhältnis gebracht werden. Dazu haben Tornquists Arbeiten über Spanien und andere südeuropäische Gebiete Licht verbreitet über die sehr eigenartige Verteilung der Hauptfaziesgebiete der Trias unseres Kontinentes.

Die volle Lösung dieser Fragen der vertikalen und horizontalen Entwickelung der beiden Fazies der spanischen Trias stößt freilich in einem großen Teil des Landes infolge von verwickelter Tektonik auf die größten Schwierigkeiten.

Die Verbreitung der Schichten mit alpin-mediterranem Einschlag spielt bei diesen Untersuchungen natürlich eine hervorragende Rolle, neben den Ammonoideen zunächst der mit *Daonella* und auch anderen Fossilgruppen der Alpentrias. Leider warten wir immer noch vergebens auf eine gründliche Bearbeitung sowohl der Ammoniten von Menorca, als auch der ihnen vermutlich gleichaltrigen Ceratitenfauna von Olesa bei Barcelona. Sie wird die zur Zeit

noch etwas verschwommen erscheinenden Beziehungen zur alpinen Schichtenreihe wohl einmal schärfer hervortreten lassen.

Anderseits ist auch in den Schichten von ganz germanischem Charakter infolge mangelhafter Erhaltung der (oft ziemlich reichlich vorhandenen) Fossilien noch zu wenig Bestimmbares gefunden, um das Verhältnis zur germanischen Gliederung im einzelnen schon mit ausreichender Klarheit hervortreten zu lassen. Hier haben uns die Arbeiten von A. Wurm wesentlich vorwärts gebracht. Sie machen uns neben einer Reihe unbestreitbarer Formen von germanischem Typus mit anderen bekannt, die dem iberischen Gebiet eigen sind. Wurm fand daneben auch in diesen Faunen gelegentlich Anklänge an die alpin-mediterrane Triaswelt.

Nach diesen neueren Ergebnissen läßt sich also wenigstens in Katalonien und Aragonien eine den germanischen Verhältnissen ganz ähnliche, auch im Gesteinshabitus meist nicht abweichende, dreigeteilte Entwickelung weithin verfolgen.

Weiter westlich sollte aber nach französischen und spanischen Autoren ziemlich unvermittelt der Keuper fast zur Alleinherrschaft gelangen. Vor allem finden wir diese Altersbestimmung in der sonst dankenswerten »Geologia y Paleontologia de Alicante« von D. Daniel Jiménez de Cisneros vom Jahre 1917. In den ausgedehnten und tektonisch meist wenig entstellten Aufschlüssen dieses Gebietes wird eine mächtige Folge von Mergeln und reichlichem Gips, aber auch starker Sandsteinentwickelung mit Pflanzenresten und sogar einem Kohleflözchen von unten oft ganz dickbankigen, oben helleren und mehr geschieferten Kalken überlagert. Die Kalke führen ziemlich oben eine reiche Fauna von unbestreitbaren Muschelkalkpetrefakten, die als eine Wiederkehr muschelkalkartiger Fazies gedeutet wird. Denn die Kalke sollen Raibler Alter haben. Zur älteren Trias rechnet Jiménez de Cisneros nur (mit Vorbehalt) gewisse nahe der Basis der ganzen Serie von Alicante den Sandstein- und Mergellagen eingeschichtete aschgraue Kalke von zum Teil ganz eigenartiger Struktur. Er vergleicht sie mit dem ihm freilich nur nach Beschreibungen bekannten germanischen Wellenkalk. Höherer Muschelkalk und Lettenkohle würden fehlen.

Nun ist in sicherem spanischem Keuper eine auch nur einigermaßen sandsteinreiche Fazies meines Wissens nicht vorhanden. Aber man darf doch, z. B. im Hinblick auf die Keuperentwicklung in Franken, die Möglichkeit ihres Vorkommens nicht von der Hand weisen. Anders ist es mit dem, was über die Fauna der oberen Kalksteinzonen von Alicante bekanntgegeben wird. Ziemlich hoch wird in ihnen neben anderen Muschelkalkfossilien das Vorkommen der so charakteristischen *Myophoria Goldfussi* festgestellt. Die leicht kenntliche Form ist bei uns nur dem obersten Muschelkalk und der Lettenkohle sicher eigentümlich. Ihr Vorkommen im alleruntersten Keuper ist nicht unbestritten. Bei Alicante soll also diese Art und die ganze begleitende Fauna in weit höherem Horizont einen »retorno al Muschelkalk« darstellen.

Nun spricht man mit Recht von einem Wiederauftauchen des Muschelkalkcharakters im Grenzdolomit der germanischen Lettenkohle. Aber dort haben wir unmittelbar aufeinanderfolgende Abschnitte vor uns. Das Meer,

fast schon der Verlandung erlegen, drang noch einmal siegreich vor und brachte mit sich eine marine Fauna zurück, die gegenüber der schon ganz verarmten Tierwelt der tieferen Lettenkohleschichten fast wie eine Rückkehr der Muschelkalkfauna anmutet. Aber doch nur fast; sie hat doch schon ganz ihren eigenen Charakter (z. B. in bestimmten Myophorien). Bei einiger Sorgfalt wird man sie niemals mit echtem Muschelkalk verwechseln. Diese Entfremdung steigert sich in den spärlichen marinen Einlagerungen im späteren Keuper mit schnellem Schritt. Wir erkennen auch dort deutlich Formen von marintriadischem Habitus, aber die Arten des Muschelkalkes sind nun sämtlich verschwunden, spiegeln sich höchstens in Epigonen mehr oder weniger deutlich wider. Ein wirkliches Erscheinen der Muschelkalkfauna mit *Myophoria Goldfussi* in so hohem Keuperniveau, wie es bei Alicante der Fall sein soll, mußte ich nach meinen bisherigen Kentnissen der Triasentwicklung für unmöglich halten.

Dann war es aber eine unabweisbare Folgerung, daß die ganze Deutung der in den reichen Aufschlüssen um Alicante sich bietenden Trias irrig ist. Eine Neubearbeitung von Grund aus war vorzunehmen, um so mehr, als auch weiter westlich — Jiménez de Cisneros nennt zunächst die Provinz Murcia — ähnliche Verhältnisse ähnlich gedeutet werden. Es handelte sich also um die völlige Neuordnung der Triasstratigraphie in ausgedehnten Gebieten.

Don Jiménez de Cisneros hat mich bei dieser Arbeit bei der Vorbereitung der Exkursionen und vor allem durch Zugänglichmachen seiner reichen Sammlung stets auf das liebenswürdigste unterstützt. Ich möchte ihm auch hier für seine vielfache Hilfe und sein stetiges freundliches Interesse meinen herzlichen Dank sagen.

Für die Ausführung erschien es mir vor allem nötig, zunächst alles, was die einwandfrei gedeuteten Profile Kataloniens und der Balearen nicht nur an paläontologischen, sondern auch an petrographischen Merkmalen darbieten, möglichst an Ort und Stelle vorher zu studieren, um mir eine sichere Grundlage des Urteils zu schaffen. Die Methode hat sich bewährt und ausgezeichnet gelohnt.

Auch in diesem Gebiet meiner Vorstudien war es an mehr als einer Stelle wünschenswert, die bisherigen Darstellungen noch etwas zu ergänzen und auch zu berichtigen. In dem bisher für die Gegend von Barcelona als typisch hingestellten Profil von Vallirana schienen sogar Rätsel verborgen zu sein, die an die Probleme von Alicante streiften. Von ihrer Lösung soll gleich die Rede sein.

Wir durchwandern zunächst einmal das ganze Profil dieser südöstlichen Gebiete. Wie im Randgebiet des germanischen Beckens, z. B. im Schwarzwald, scheint im Unterabschnitt der spanischen Trias die Korngröße der Ablagerungen und die Mächtigkeit der einzelnen Schichtenglieder stark zu schwanken, stärker sogar und weniger regelmäßig als bei uns. Darüber aber springt uns überall eine Grenze von ungewöhnlicher Schärfe entgegen und von unwandelbarer Sicherheit. Überall lagert sich über den früher oder später feinkörnig gewordenen letzten Schichten des Unterabschnittes mit scharfem Schnitt eine mächtige Kalkformation. Am Toro auf Menorca, in den Aufschlüssen um Barcelona (Olesa, Vallirana, Pallejá) und bei Mora de Ebro (aber

nicht an der berühmten Ammonitenfundstelle) beginnen diese Kalkmassen mit hellen, oft fein schichtstreifigen und meist, vor allem in einer zelligen Unterschicht, etwas dolomitischen, glatten Bänken von einigen Metern Mächtigkeit. Die Gleichmäßigkeit dieser unteren Grenzbildung ist so groß, daß eine allgemeine Ursache weithin ganz gleichmäßig gewirkt haben muß, vermutlich etwa dieselbe, die auch im germanischen Becken Buntsandstein und Muschelkalk so sauber geschieden hat. Wir können in diesem Teil Spaniens von echtem Buntsandstein und Muschelkalk reden, ganz in der Begrenzung gegeneinander, wie im germanischen Becken.

Weiter oben sehen wir dann in verschiedenen Aufschlüssen bei Barcelona die sonst für mittelanisische Schichten so charakteristische *Mentzelia Mentzeli* etwa 17 bis 20 m über dem Beginn der Kalke eine augenscheinlich ganz sichere und verbreitete Fossilzone bezeichnen. Auch die weitere Entwickelung des unteren Muschelkalks in groben, rauhverzahnten Bänken, hier besonders häufig mit der viel besprochenen »Fucoiden«-Struktur, herrscht dann noch ein Stück weit (oberanisische Schichten) ziemlich gleichmäßig. Darüber aber stellt sich ein neuer, ganz dünnplattiger Habitus ein. Gleich unten, einige 40 m über der Untergrenze des Muschelkalks, folgt dort am Toro die berühmte Fauna mit *Daonella vgl. franconica* Tornqu. und Protrachyceraten, also schon ladinische Reitzi-Schichten, oberer Muschelkalk. Sie füllt einen ganzen Abschnitt von mindestens 16 m Mächtigkeit aus und verliert sich erst über einer eingeschalteten Zone kompakten blauen Kalkes. Dann wechseln Kalkschiefer und solche kompakte, zum Teil auch noch fukoidische Zonen noch mindestens viermal. Die letzte der festen Zonen ist auffallend knorrig und dolomitisch, auch zellig. Die Mächtigkeit dieser ganzen dünngeschichteten Kalkfolge erreicht am Toro wohl 80 m. Weiter oben wird diese Schichtenfolge auch das zeitliche Äquivalent der germanischen Lettenkohle mit einschließen, da über ihr, wie Tornquist nachwies, rote Mergel von Keuperhabitus erscheinen. Ich habe diese fast bis in alle Einzelheiten bereits bekannten Züge der Schichtentwickelung am Toro nochmals hervorgehoben, weil sie fast sämtlich sich zunächst in Katalonien wiederfinden, so meist massige Kalke noch im oberen anisischen Abschnitt, dann die Schieferzone des *Daonella*-Horizontes und eine gewisse Dünnschichtigkeit der ganzen höheren Abteilung, in der zuletzt knorrigzellige Dolomite und über ihnen bunte Keupermergel erscheinen, ganz angelehnt an das klassische Profil am Toro.

Bei Vallirana schien eine Ausnahme vorzuliegen. Dort fand der um Kataloniens Geologie so verdiente Almera über Buntsandstein und Muschelkalk roten Keuper mit Sandstein und Gips und darüber, um von den noch höheren Schichten hier nicht zu reden, nochmals eine Folge von geschichtetem Mergelkalk mit Fukoiden. Aus tektonischen Gründen hält Hr. Prof. Market Riba in Barcelona, unter dessen freundlicher Führung ich die Aufschlüsse von Vallirana zuerst sah, die zweite Folge von Sandstein, Gipsmergel und Kalk für eine einfache Wiederholung der Unterzone, die an einer etwa streichenden Verwerfung abgesunken ist. Nach dem stratigraphischen Verhalten kann ich dem nur beipflichten. Unschwer sind in dem Steinbruch eines Kalkofens mehrere Kilometer oberhalb Vallirana in der gut aufgeschlossenen zweiten

Kalkzone, ganz ähnlich den übrigen Vorkommen von Barcelona, eine dolomitische Unterzone, dann eine (hier nur feiner geschichtete, fast wellenkalkähnliche) Kalkfolge mit zwei Mergelbändern festzustellen. Unten anisisch, entspricht sie in ihrem oberen mächtigen Anteil der ladinischen Zone, ganz oben mit klotzigen Dolomiten, über denen bunte Mergel mit hellem, mürbem Steinmergel, aber ohne Sandsteinbeimischung zu sehen sind. Noch höher sind die zum Teil wohl schon liassischen[1] Carñiolas bekannt. Die Entwickelung ist also bei Vallirana tatsächlich die normale, nur nicht im bisherigen Verstande.

Die so unverkennbare Ausbildung der unteren Grenzzone des Muschelkalkes und der plattigen ladinischen Schichten ist dann auch an dem bekannten Ceratiten-Fundpunkt Olesa sowie bei dem berühmten Mora de Ebro ganz ähnlich zu sehen, nur verhindern Störungen in beiden Fällen eine einwandfreie Verfolgung des Zusammenhanges der beiden Abschnitte.

Wie die Trias bei Alicante zur Zeit aufgefaßt wird, habe ich bereits oben flüchtig umrissen. Die von Alicante am besten zu erreichenden Aufschlüsse liegen unweit der Station Agost. Ich war kaum überrascht, an der bekanntesten Stelle, dem Negret, einem felsigen Hügel mit drohend dunkler Steilwand der »Raibler«-Schichten, an ihrer Basis ganz deutlich die mit scharfem Schnitt über roten, gipsführenden Mergeln stehenden geschichteten dolomitischen Kalke wiederzufinden, mit denen in den vorher studierten Gebieten der Muschelkalk beginnt. Die für Raibler-Schichten gehaltenen Kalke sind eben nichts anderes als Muschelkalk. Das geht auch aus allem folgenden hervor.

Über der Grenzzone sehen wir, ganz wie im Osten, auch hier in noch mehr als 20 m Mächtigkeit massige Kalke, leider bis jetzt ohne bestimmbare Fossilien. Sie sind an mehreren Stellen — Negret! — fast schwarz und stark zertrümmert, aber nachträglich durch weißen Kalkspat zu festem, marmorähnlichem Gestein verheilt, das man vielfach gewinnt. (Ich glaube am Negret auch die Quelle der dunklen Beimischungen in einer basischen, ophitischen Intrusion gesehen zu haben.) Die Zertrümmerung der Kalke am Negret wird von anderer Seite auch als Mylonitisierung in Anspruch genommen. Die Kalkmassen sollen als Schubdecken den »Keuper« überlagern. Man wird von dieser Deutung leicht zurückkommen, wenn man sieht, wie in allen den zahlreichen Aufschlüssen bei ganz verschiedenem, oft recht steilem Einfallen überall der Kalk mit derselben Regelmäßigkeit, nur oft viel weniger dunkel und ohne Spuren von Zertrümmerung, gleichmäßig und ohne Druckzeichen den Gipsmergel überlagert.

Von 25 bis etwa 40 m folgt dann eine ganz dünnschiefrige und mergelige Zone, leider ebenfalls noch ohne erkennbare Fossilien. Die Schichtenfolge ließ sich ausgezeichnet beobachten und in fast lückenlosem Profil aufnehmen am Espejeras, einige Kilometer von der Station Monforte del Cid. Dort ist die Schieferzone von nicht weniger als 75 m weit noch meßbarem, mäßig dünnschiefrigem Kalkstein überlagert. An einer ganzen Reihe von Stellen

[1] Zuletzt bei J. Tricallinos in Zeitschr. d. Deutsch. geol. G. 80, 4.

sind ihm Lumachellen eingelagert. Eine von ihnen, die volle 83 m über der Untergrenze, 46 m über der Schieferzone liegt, ist besonders reich an wohlerhaltenen, auf den Schichtflächen in Menge herauswitternden Fossilien. Hier ist *Myophoria Goldfussi* in schönen Exemplaren häufig, dazu die von Wurm aus Aragonien beschriebene *Placunopsis teruëlensis*, die dort in einem oder mehreren Fossilhorizonten des oberen Muschelkalkes weit verbreitet ist. Auch an Diploporen erinnernde Stengelchen durchziehen manche Bänke, wie in ähnlichem Niveau bei Pallejá. Wir haben mit Sicherheit höheren Hauptmuschelkalk in diesem Teil des Profils zu sehen, Wengener Schichten der alpinen Ordnung.

Im Hangenden der aufgeschlossenen, meßbaren Kalkfolge zeigt der Acker noch eine ganze Strecke weit im Wechsel mit verhüllten mergeligen Lagen festere Kalkbänke. Es mag sich noch um eine Mächtigkeit von 25 bis 30 m handeln. Die letzten festen Bänke zeigen knorrigen Bau und auch zelligen, graugelben Dolomit, ganz wie am Toro. Im ganzen herrscht weitgehende Übereinstimmung mit den Profilen von Menorca und Katalonien, bereichert um die Fossilführung der aragonischen Aufschlüsse.

Die eingebrochene Scholle von Espejeras — denn um eine solche handelt es sich, umgeben von älteren Horizonten — scheint nach N bald ihr Ende zu finden; etwas Keupermergel ist wohl noch vorhanden. Aber der ganze übrige Kern der antiklinal gebauten, im einzelnen freilich arg zerstückelten Aufwölbung, den die Muschelkalkwälle umhegen und den man seit langer Zeit als deren Liegendes erkannt hat, ist natürlich als Buntsandstein aufzufassen. Man möge mir zugute halten, wenn ich ihn, mit Rücksicht auf die vor allem zunächst einmal klarzustellende Begrenzung gegen den Muschelkalk, nun in der bei Geologen sonst nicht üblichen Ordnung von oben nach unten behandle.

Die obersten Lagen bestehen aus Mergelschiefern mit reichen Gipslagern, ganz wie im Buntsandstein von Menorca und Katalonien. Bald aber werden die Mergel sandig, wechseln mit plattigem Sandstein und dolomitischen Plättchen. Die neue, nach Alcoy im Bau begriffene Eisenbahn hat frische Aufschlüsse geschaffen. Sie lieferten mir neben den von dort schon bekannten Equiseten *Estheria Germari* und, als bis jetzt westlichster Fundpunkt, in Menge ziemlich deutliche Abdrücke von *Voltzia heterophylla*, die also hier ganz das Niveau des Voltziensandsteins einhält. Andere Lagen sind von *Corophioides* kolonisiert. Diese Sandsteinregion, in der Gips fast überall zurücktritt, besitzt weite Verbreitung. Sie füllt den ganzen Boden der zerschnittenen Talfläche bis über die Cañada roja im S aus. Ich konnte mehrfach zusammenhängende Profile von mehr als 20 m aufnehmen. Die ganze Mächtigkeit übersteigt jedenfalls 100 m, kann aber auch noch viel bedeutender sein. Man hat dort mit Sicherheit auch mit dem Äquivalent von unserem mittleren Buntsandstein zu tun. Ihm werden jedenfalls die etwas kompakteren, hellen Sandsteine zugehören, die gegen den sich heraushebenden Südrand der Mulde am Cerro de la Venta erschlossen sind. Auch hier fand ich wohlerhaltene *Equisetum*-Reste, vor allem aber eine Charakterpflanze des germanischen mittleren Buntsandsteines, *Yuccites vogesiacus*, in ansehnlichen Stücken. Die Pflanzenführung muß

dort zeitweilig reichlich gewesen sein, denn gerade im Cerro de la Venta steht in geringer Teufe das schon erwähnte, gar nicht so geringfügige Kohleflöz, umhüllt von *Equisetum* führendem Gestein. Die Kohle ist freilich kiesreich und ließ sich nur zur Not zum Brennen von Kalk, Gips und Ziegeln verwenden, solange an der Bahn in nächster Umgebung gebaut wurde. Jetzt ist alles wieder verlassen. Interessant ist, daß etwa mit dem Kohleflöz der Sandstein zurücktritt und Gips wieder in Masse erscheint.

Die Trias taucht dort gegen S unter transgredierende Kreidesedimente unter, die sich zu ziemlicher Höhe auftürmen. Nur an einer Stelle, zwischen dem Ripoll im W und der Loma Negra im O, sieht sie in den niedrigen Hügeln des Establimiento heraus. Es sind im allgemeinen noch gipsreiche Mergelschichten, zum Teil von roter Farbe. Jiménez de Cisneros stellt mit Recht die dort aufgeschlossenen Schichten an die Basis der Trias von Alicante. Dort fand er die schon erwähnten, eigenartig struierten Kalke, die ihn an Wellenkalk denken ließen, eine oder zwei Folgen von wenigen Metern Mächtigkeit. Darin lagern gewisse aschgraue Bänke von wenig mehr als 10 cm Stärke, die ganz aus parallelen, aber unregelmäßig gebogen, zum Teil, wie es scheint, geschlossen sich umhüllenden, gleichmäßig etwa 4 bis 8 mm dicken Lagen von hellerem und dunklerem Grau bestehen. Toniger Kalk wechselt mit tonärmerem Gestein; die angewitterten Flächen, auch die Schichtgrenzen, sind demgemäß regelmäßig gefurcht. Der Verlauf der abwechselnden Lagen ist immer von der Schichtgrenze der gleichmäßig starken Bänke unabhängig. Unwillkürlich wird man an das uralte *Eozoon* erinnert. In unserem Mesozoicum dürfte es nicht leicht sein, diesen Gesteinsbau in geschlossenen, gleichmäßig starken Bänken wiederzufinden. Die Stromatolithen des subherzynischen unteren Buntsandsteins zeigen ähnlichen Bau im Innern, bilden aber dicke Knollen und Polster.

Diese merkwürdigen zebrastreifigen Kalke, die ich übrigens auch in der Umgebung des Espejeras feststellen konnte, sind nun von sicher marinen Fossilien begleitet. Ich meine nicht die von Jiménez de Cisneros einmal als Brachiopoden, ein anderes Mal als Bivalven angesprochenen undeutlichen Reste auf einem lose gefundenen Plattenstück. Aber eine ganze Gesteinslage, die man im Anstehenden ohne Schwierigkeit feststellen kann, wimmelt von mehr oder weniger scharfkantigen Stielgliedern von einem »*Pentacrinus*«, die das ganze Gestein erfüllen. Auf den Schichtflächen zeigen sie die zierliche, aber für einen *Pentacrinus* sehr einfache Skulptur ihrer Gelenkflächen. Tatsächlich wird es sich um einen neuen, winzigen *Holocrinus* handeln. Er bezeichnet mit Sicherheit diese Kalklagen als Meeresbildung, eine kurzlebige Transgression, wie die mit *Beneckeia tenuis* im unteren Röt Thüringens, aber hier vermutlich dem unteren Buntsandstein angehörig, dem ja auch die Stromatolithen am Harz zuzurechnen sind.

Paläogeographisch ist die marine Invasion im unteren Buntsandstein von nicht geringem Interesse. Dort lag also wenigstens im Anfange der Triasperiode einmal das Muldentiefste des dortigen Buntsandsteinbeckens, in dem wir sonst im südlichen Spanien ganz die auch bei uns vorherrschende terrestrische Entwickelung verfolgen können. Man darf danach annehmen,

daß auch weiter westlich noch Buntsandstein entwickelt sein wird, sei es auch nun in ganz terrestrischer Fazies, wenn es mit dem marinen Becken dort bald wieder ein Ende gehabt haben sollte.

Ich habe in dieser Frage wenigstens eine Stichprobe auf gut Glück zur ersten Orientierung gemacht und dabei gleich recht weit gegriffen. An der Carretera von Algeciras nach Tarifa verzeichnet die spanische geologische Karte Keuper angelagert an eine Bergrippe aus tithonischem Kalk. Der vermutliche Keuper erwies sich als Buntsandstein, hier sandsteinführend bis hoch hinauf. Auch *Corophioides* fehlt nicht in einer Lage. Darüber lagert dann in ungestörter Folge geschlossener Muschelkalk. Seine untersten Bänke erinnern nicht wenig an die Ausbildung, die uns von Osten her bis Alicante begleitet hat. Auch einige scharf begrenzte Lagen weichen Mergelkalkes schalten sich ein. Nur zeigt eine von ihnen, 16 m über der Unterkante der Kalkfolge, wie eine Erinnerung an den Buntsandstein, bunte Farben. Im ganzen sind reichlich 100 m Kalk vorhanden, vielfach in soliden, nur brekziös zerrütteten und wieder verheilten Bänken. Zuletzt tritt gelblicher Dolomit auf und schließlich bunte Keupermergel am Gehänge nach Algeciras zu. Ob weiterhin der Kalkzug tatsächlich aus tithonischen Schichten besteht, soll hier unerörtert bleiben.

Man darf nach dieser einen Stichprobe wohl hoffen, daß die bei Alicante gewonnenen Anschauungen für ein ziemlich weites Gebiet im Süden Spaniens eine sichere Grundlage für weitere Forschungen bieten werden. Sie werden auch für die Lösung so mancher heute noch bestehender Rätsel und Fragen über die Trias im Innern der Halbinsel nicht ohne Bedeutung sein. Aber es gibt hier für Fortschritte nur einen Weg: maßstäbliche Aufnahmen der Profile, horizontiertes Fossilsammeln und sorgfältige paläontologische Ausarbeitung. Nur auf diesem Wege können wir auch über die interessante und wichtige Verknüpfung der germanischen und alpinen Fazies in mehreren der Profile, die ein Kleinod der spanischen Stratigraphie darstellt, zu wirklicher Sicherheit und Klarheit kommen. Man darf allerdings in Spanien nicht die einzelnen Gebiete die ganze Triaszeit hindurch in den Rahmen der einen oder anderen Fazies spannen wollen. Das Bild der wirklichen Verteilung ist, das wissen wir längst, viel bunter und interessanter, ein Gewebe, in dem der alpin-mediterrane Einschlag bald gänzlich fehlt, bald überraschend sich über weite Räume verbreitet. Freilich zeigt dieses Bild noch viele Lücken oder wenigstens undeutliche Züge. Daher legt man sich auf eine regionale, paläogeographische Zusammenfassung wohl am besten noch nicht zu fest, solange nicht über Schichtenfolge und Fossilführung allgemein bessere Ergebnisse vorliegen. Diese werden aber nicht auf sich warten lassen. Eine vertiefte und verfeinerte stratigraphische Durcharbeitung muß das nächste Ziel sein. Sie verspricht in Spanien noch überall Erfolg.

Zur Theorie der komplexen Zahlen.

Von Prof. Dr. Guido Hoheisel
in Breslau.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

Die Theorie der gewöhnlichen komplexen Zahlen ist unter Verwendung infinitesimaler Methoden zu einem völlig befriedigenden Abschluß gebracht worden durch eine Arbeit von Bieberbach (Math. Ztschr. Bd. 2). Das Hauptresultat ist dabei der folgende Satz:

$\mathfrak{R}$ sei ein Körper, der aus der Gesamtheit der Zahlenpaare (ξ, η) besteht, wo ξ und η die gewöhnlichen reellen Zahlen bedeuten. Es gelten ferner folgende Voraussetzungen:

1. Die Gesamtheit der Paare $(\xi, 0)$ bildet einen Teilkörper.
2. In der Summendefinition

$$(\xi_1, \eta_1) + (\xi_2, \eta_2) = (\sigma, \tau)$$

sind σ und τ stetige Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$.

3. In der Produktdefinition

$$(\xi, 0) \cdot (\alpha, \beta) = (\rho, \sigma)$$

sind ρ und σ stetige Funktionen von ξ für jedes Paar (α, β). Dann gilt: je drei Elemente aus $\mathfrak{R}$ sind linear abhängig.

Der Satz von Bieberbach kennzeichnet die Gesamtheit aller derjenigen Körper, die aus dem gewöhnlichen Körper der komplexen Zahlen $\xi + i\eta$ durch eine topologische Transformation der (ξ, η)-Ebene in sich entstehen. Wir wollen hier untersuchen, inwieweit man ein analoges Resultat erhält, wenn nur algebraische, d. h. nicht infinitesimale Methoden zugelassen sind. Dann kommen auch nur algebraische topologische Transformationen der (ξ, η)-Ebene in sich in Frage. Es bedeutet daher keine wesentliche Einschränkung, wenn nur gewisse lineare Transformationen zugelassen werden. Unser Satz gibt somit eine Kennzeichnung aller derjenigen Körper, die aus dem gewöhnlichen Körper der Zahlen $\xi + i\eta$ durch solche Transformationen hervorgehen und die sich von ihm übrigens nur formell unterscheiden.

Der Grundkörper $\mathfrak{A}$, aus dessen Elementen $a, b \ldots$ wir die Paare (a, b) bilden, kann jetzt abstrakt gegeben sein. Es ist dem Problem angemessen, ihn als reellen d. h. geordneten Körper anzunehmen (Artin-Schreier, Hamb. Abh.). Die Ordnung sei archimedisch; erst am Schluß werden wir etwas über den nichtarchimedischen Fall sagen. Es erweist sich ferner als natür-

lich, den Körper $\mathfrak{A}$ reell quadratisch abgeschlossen vorauszusetzen: mit einer Zahl $a > 0$ gehört also auch $\sqrt{a}$ zum Körper. Bildet man alle Paare (a, b) und definiert in üblicher Weise die Rechenregeln, so erhält man einen Körper $K(i)$, den wir den Körper der komplexen Zahlen nennen wollen. In ihm ist $(0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0)$. Wird dagegen unter Beibehaltung der Summendefinition für die Multiplikation nur bestimmt, daß

$$(a, 0)\cdot(b, c) = (ab, ac)$$

sein soll, dann besteht zwar auch wieder der Körper aus der Gesamtheit der Elemente $a + bj$, wenn a für $(a, 0)$ und j für $(0, 1)$ geschrieben wird. Jedoch braucht $j^2 = -1$ nicht zu gelten. Ist etwa $j^2 = a + bj$, so kann die quadratische Gleichung

$$x^2 - bx - a = 0$$

keine Wurzeln in $\mathfrak{A}$ haben, wenn die Eindeutigkeit der Multiplikation erfüllt sein soll. Die Diskriminante $\frac{b^2}{4} + a$ muß negativ sein. Man kann leicht ein Element $\alpha + \beta j = i$ bestimmen, dessen Quadrat gleich -1 ist. Der entstandene Körper K unterscheidet sich also nur durch eine lineare Verschiebung von $K(i)$ und wird im weiteren als nicht von ihm verschieden angesehen. In diesem Sinne bedeutet der folgende Satz eine Kennzeichnung von $K(i)$. Zur besseren Formulierung werden noch einige Definitionen vorangeschickt. Unter einem Intervall $[a_1, a_2]$ verstehen wir die Menge aller Elemente a, für die $a_1 \leqq a \leqq a_2$ gilt ($a_1 \neq a_2$). Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{A}$ heißt überalldicht in $\mathfrak{A}$ gelegen, wenn in jedem Intervall wenigstens ein Element von $\mathfrak{M}$ liegt. Ist $\mathfrak{A}$ archimedisch, so liegt die Menge der rationalen Zahlen überalldicht. Denn $(a_2 - a_1)^{-1}$ wird von einer ganzen Zahl n übertroffen. Ist $b = \phi(a)$ eine Funktion in $\mathfrak{A}$ und läßt sich zu irgend zwei Intervallen $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ immer ein a finden, so daß $a_1 < a < a_2$ und $b_1 < \phi(a) < b_2$ ist, dann sagen wir: der Wertevorrat der Funktion liegt überalldicht in der (a, b)-Ebene. Solche Funktionen stellen, wie der Fall des gewöhnlichen reellen Zahlkörpers $\mathfrak{A}$ zeigt, eine singuläre Erscheinung dar. Wir wollen nun das Resultat dieser Arbeit in Analogie zum Bieberbachschen Satze formulieren. Bei Bieberbach war die betrachtete Gesamtheit der Zahlenpaare (ξ, η) als Körper $\mathfrak{K}$ angenommen. Wir wollen von der Gesamtheit K aller Paare (a, b) lediglich annehmen: sie ist ein Schiefkörper mit Null und Eins; wir lassen also die Kummutativität der Multiplikation fallen. Die Voraussetzung 1) von Bieberbach können wir auch fallenlassen. Doch wollen wir — lediglich aus Gründen der Darstellung — annehmen, daß die Null und die Eins in K von der Gestalt $(a, 0)$ sind. Der Einfachheit halber sagen wir gleich: $(0, 0)$ und $(1, 0)$ sind Null und Eins in K. Die Voraussetzung 3) von Bieberbach können wir auch wesentlich einschränken. Wir nehmen nur an: in den Definitionsgleichungen

$$(a, 0)\cdot(b, 0) = (\phi(a, b), \psi(a, b))$$
$$(a, 0)\cdot(0, 1) = (\phi(a), \psi(a))$$
$$(0, 1)\cdot(a, 0) = (\phi_1(a), \psi_1(a))$$

sollen die Funktionen $\phi(a)$, $\psi(a)$, $\phi_1(a)$, $\psi_1(a)$ und die Funktionen $\phi(a, b)$, $\psi(a, b)$ als Funktionen von a nicht zu jenen singulären Funktionen gehören, deren Wertevorrat überalldicht in der (a, ϕ)-Ebene liegt. Da unsere Bedingungen die Identität des Schiefkörpers K mit dem Körper K(i) herbeiführen sollen, ist es klar, daß wir irgendwo mehr voraussetzen müssen als Bieberbach. Das geschieht bei den Voraussetzungen, die den unter 2) genannten Bieberbachschen Bedingungen entsprechen und die wir besser für die Subtraktion formulieren. Die Definition laute

$$(a, b) - (x, y) = (\phi(a, b; x, y), \psi(a, b; x, y)).$$

Wir verlangen nun

$\alpha 2')$ $\phi(a, b; a-x, b-y)$ und $\psi(a, b; a-x, b-y)$ sollen ungerade Funktionen in (x, y) sein, d. h.

$$\phi(a, b; a-x, b-y) + \phi(a, b; a+x; b+y) = 0.$$

Diese Voraussetzung läßt sich durch folgende schwächere Bedingungen ersetzen.

$\beta 2_1')$ $\phi(0, 0; x, y)$, $\psi(0, 0; x, y)$ sind ungerade Funktionen in (x, y).

$\beta 2_2')$ $\phi(a, 0; a, t)$, $\psi(a, 0; a, t)$, $\phi(0, b; t, b)$, $\psi(0, b; t, b)$ sind ungerade Funktionen von t.

$\beta 2_3')$ $\phi(a, b; a(1-t), b(1-t))$ und $\psi(a, b; a(1-t), b(1-t))$ sind als Funktionen von t ungerade für ganzzahlige Werte der Variablen.

$\beta 2_4')$ $\phi(a, 0; at, 0)$, $\psi(a, 0; at, 0)$, $\phi(0, b; 0, bt)$, $\psi(0, b; 0, bt)$ sind monotone Funktionen von t.

Diese letzte Bedingung ließe sich auch durch die Forderung der Stetigkeit ersetzen. (Die Stetigkeit bedarf bei archimedischem $\mathfrak{A}$ keiner Definition, weil $\mathfrak{A}$ dann immer einem Teilkörper des reellen Zahlkörpers isomorph ist.)

Unser Satz sagt aus:

Sind $(0, 0)$ *und* $(1, 0)$ *Null und Eins in dem Schiefkörper* K, *der aus der Gesamtheit der Paare* (a, b) *besteht* (a, b ... *Elemente eines reellen Körpers mit archimedischer Ordnung), gelten über die Multiplikation in* K *die obengenannten sehr geringfügigen Bedingungen und über die Subtraktion die Bedingungen* $\alpha 2')$ *oder* $\beta 2')$, *dann ist* K *identisch mit dem Körper* K(i).

Der Beweis geht von der Bedingung $\alpha 2')$ bzw. $\beta 2')$ aus und leitet daraus die Gültigkeit der gewöhnlichen Rechenregeln ab:

$$\phi(a, b; x, y) = a - x; \quad \psi(a, b; x, y) = b - y.$$

Daß das bei so geringen Annahmen möglich ist, erscheint verblüffend, beweist aber die starke Bindung, die den Funktionen ϕ und ψ durch das assoziative Gesetz auferlegt ist.

Nehmen wir das als schon bewiesen an. Es gilt also die gewöhnliche Additionsregel

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Dann ist nach dem distributiven Gesetz

$$\{(x, 0)+(y, 0)\}(b, 0) = (\phi(x, b), \psi(x, b))+(\phi(y, b), \psi(y, b))$$
$$= (\phi(x, b)+\phi(y, b),\ \psi(x, b)+\psi(y, b)).$$

Anderseits

$$\{(x, 0)+(y, 0)\}(b, 0) = (x+y, 0)(b, 0) = (\phi(x+y, b), \psi(x+y, b)).$$

Mithin

$$\phi(x+y, b) = \phi(x, b)+\phi(y, b);\ \psi(x+y, b) = \psi(x, b)+\psi(y, b).$$

Nun gilt, wenn die Variable einem archimedischen reellen Körper angehört, der Satz:

»Ist für eine Funktion f die Gleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$ erfüllt, so ist entweder $f(x) = x \cdot f(1)$ oder der Wertevorrat von f liegt überalldicht in der (x, f)-Ebene.« Den Beweis werden wir gleich erbringen.

Daher folgt

$$\phi(x, b) = x \cdot \phi(1, b);\ \psi(x, b) = x \cdot \psi(1, b).$$

Da $(1, 0)$ die Eins ist in K, so haben $\phi(1, b)$ und $\psi(1, b)$ die Werte b und 0. Also gilt

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Entsprechend folgt für

$$(a, 0) \cdot (0, 1) = (\phi(a), \psi(a))$$

mit Hilfe des distributiven Gesetzes

$$\phi(x) = x \cdot \phi(1);\ \psi(x) = x \cdot \psi(1).$$

Es ist $\phi(1) = 0,\ \psi(1) = 1.$

Also: $(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a),$

ebenso: $(0, 1) \cdot (a, 0) = (0, a).$

Gemäß den Bemerkungen in der Einleitung ist damit gezeigt, daß K mit $K(i)$ identisch ist.

Wir beweisen jetzt den Hilfssatz über die Lösungen der Funktionalgleichung.

Aus $f(x+y) = f(x)+f(y)$ folgt in bekannter Weise für jede rationale Zahl r $f(rx) = rf(x)$. Setzen wir

$$g(x) = f(x) - x \cdot f(1),$$

so ist $g(r) = 0$. Außerdem gilt die Funktionalgleichung: $g(x+y) = g(x)+g(y)$. Also ist auch $g(rx) = rg(x)$. Entweder ist nun $g(x) \equiv 0$, also $f(x) = x \cdot f(1)$. oder es ist einmal $g(\eta) \neq 0$. Dann ist $g(r_1 + r_2\eta) = r_2 \cdot g(\eta)$, was offenbar aussagt, daß der Wertevorrat von g überalldicht in der (x, g)-Ebene liegt. Dasselbe gilt dann von f. Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß aus $\alpha\, 2')$ oder $\beta\, 2')$ folgt

$$\phi(a, b; x, y) = a - x;\ \psi(a, b; x, y) = b - y.$$

Da bei der Herleitung kein Gebrauch von der Multiplikation gemacht wird, so läßt sich diese Tatsache gruppentheoretisch deuten. Sei also $\alpha\,2')$ erfüllt. Dann sei

$$(a\,,\ b)-(2\,a\,,\ 2\,b)=(\phi_0\,,\ \psi_0)\,.$$

Es ist

$$(a\,,\ b)-(a-a\,,\ b-b)=(-\phi_0\,,\ -\psi_0)\,,$$

also $\phi_0=-a$, $\psi_0=-b$, da $(0\,,\ 0)$ die Null ist.

Es gilt mithin: $(a\,,\ b)-(-a\,,\ -b)=(2\,a\,,\ 2\,b)\,.$

Sei ferner

$$(0\,,\ 0)-(a,b)=(\phi^\circ\,,\ \psi^\circ)\,.$$

Also ist

$$(0\,,\ 0)-(0-a\,,\ 0-b)=(-\phi^\circ\,,\ -\psi^\circ)\,.$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$(-a\,,\ -b)-(a\,,\ b)=(\phi^\circ\,,\ \psi^\circ)-(-\phi^\circ\,,\ -\psi^\circ)$$
$$(-2\,a\,,\ -2\,b)=(2\,\phi^\circ\,,\ 2\,\psi^\circ)\,.$$

Daher

$$\phi^\circ=-a\,,\ \psi^\circ=-b\,,\ \text{d. h.}$$
$$-(a\,,\ b)=(-a\,,\ -b)\,.$$

Außerdem

$$(2\,a\,,\ 2\,b)=(a\,,\ b)-(-a\,,\ -b)=(a\,,\ b)+(a\,,\ b)\,.$$

Die Voraussetzung $\alpha\,2')$ läßt sich jetzt so schreiben

$$(a\,,\ b)-(a-x\,,\ b-y)=-\{(a\,,\ b)-(a+x\,,\ b+y)\}\,.$$

Also ist

$$(2\,a\,,\ 2\,b)=(a\,,\ b)+(a\,,\ b)=(a-x\,,\ b-y)+(a+x\,,\ b+y)\,.$$

Sind a', b', c', d' irgend vier Größen, so lassen sich a, b, x, y so bestimmen, daß

$$a-x=a'\,,\ b-y=b'\,,\ a+x=c'\,,\ b+x=d'$$

ist. Es gilt also

$$(a'+c'\,,\ b'+d')=(a'\,,\ b')+(c'\,,\ d')\,.$$

Das war die Behauptung.

Sei jetzt $\beta\,2')$ erfüllt. Wir behaupten

$$(a\,,\ b)-(n\,a\,,\ n\,b)=\big((1-n)\,a\,,\ (1-n)\,b\big)\,.$$

Der Satz ist richtig für $n=0$ und $n=1$. Er gelte für $-n_0\leqq n\leqq n_0+1$. Es ist

$$\phi(a,\ b;\ (n_0+2)\,a\,,\ (n_0+2)\,b)=-\phi(a\,,\ b\,;\ -n_0\,a\,,\ -n_0\,b)=-(n_0+1)\,a\,.$$

Ebenso $\quad \downarrow(a, b; (n_0+2)a, (n_0+2)b) = -(n_0+1)b.$

Insbesondere gilt also

$$(a, b) - (-a, -b) = (2a, 2b).$$

Wir setzen wieder

$$(0, 0) - (a, b) = (\phi^\circ, \downarrow^\circ).$$

Nach $\beta 2_1'$) ist $\quad (0, 0) - (-a, -b) = (-\phi^\circ, -\downarrow^\circ).$

Also
$$(a, b) - (-a, -b) = (-\phi^\circ, -\downarrow^\circ) - (\phi^\circ, \downarrow^\circ)$$
$$(2a, 2b) = (-2\phi^\circ, -2\downarrow^\circ)$$
$$-a = \phi^\circ, \; -b = \downarrow^\circ.$$

Daher gilt jetzt auch

$$(a, b) + (na, nb) = ((n+1)a, (n+1)b).$$

Es ist weiter

$$(ma, mb) - (na, nb) = ((m-n)a, (m-n)b).$$

Das ist richtig für $m = 0$ und $m = 1$. Es ist $(m > 0)$ wegen

$$(ma, mb) = (a, b) + ((m-1)a, (m-1)b)$$
$$(ma, mb) - (na, nb) = (a, b) + ((m-1)a, (m-1)b) - (na, nb).$$

Der Satz ergibt sich also für positive m durch Induktion. Er folgt für negative m wegen

$$-(a, b) = (-a, -b).$$

Aus

$$(ma, mb) - (na, nb) = ((m-n)a, (m-n)b)$$

erhält man

$$(a, b) - (ra, rb) = ((1-r)a, (1-r)b)$$

für jede rationale Zahl $r = \frac{n}{m}$, wie sich für $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}$ an Stelle von a, b sofort ergibt. Wegen der Monotonieforderung $\beta 2_4'$) kann man jetzt sofort schließen

$$(a, 0) - (ta, 0) = (a(1-t), 0)$$
$$(0, b) - (0, tb) = (0, b(1-t))$$

bei beliebigem t.

Die Funktionen in $\beta 2_4'$) sind für $a > 0$ nichtwachsend, wie wir aus ihren Werten für rationale t erkennen. Wäre für ein t

$$\phi(a, b; ta, tb) < (1-t)a,$$

so läßt sich ein $r > t$ so finden, daß

$$\phi(a, b; ta, tb) < (1 - r)a$$

ist; denn die Zahlen ra liegen überalldicht. Dann wäre

$$\phi(a, b; ta, tb) < \phi(a, b; ra, rb)$$
$$t < r$$

im Widerspruch zur Monotonie. Entsprechend kann auch nicht

$$\phi(a, b; ta, tb) > (1 - t)a$$

sein. Aus

$$(a, 0) - (ta, 0) = (a(1 - t), 0)$$
$$(0, b) - (0, tb) = (0, b(1 - t))$$

folgt[1] offenbar

$$(a, 0) - (c, 0) = (a - c, 0)$$
$$(0, b) - (0, d) = (0, b - d)$$

bei beliebigen Größen a, b, c, d.

Aus $\beta\, 2_2'$) ergibt sich jetzt

$$(0, b) - (t, b) = -\{(0, b) - (-t, b)\}$$
$$(a, 0) - (a, t) = -\{(a, 0) - (a, -t)\}$$

oder

$$(2a, 0) = (a, t) + (a, -t)$$
$$(0, 2b) = (t, b) + (-t, b).$$

Setzen wir in der ersten Gleichung $t = b$, in der zweiten $t = a$ und subtrahieren, so ergibt sich

$$(2a, 0) - (0, 2b) = (a, -b) - (-a, b) = (2a, -2b)$$

oder allgemein

$$(a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

Damit ist die gewöhnliche Additionsregel

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

gesichert.

Bei der Herleitung der Rechenregel aus $\alpha\, 2'$) ist keinerlei Ordnungspostulat benutzt worden. Um unseren Satz für nichtarchimedisches $\mathfrak{A}$ aufrechtzuerhalten, haben wir also in diesem Falle lediglich die Bedingungen für die Multiplikation so zu ändern, daß als Lösungen der Funktionalgleichung

[1] Die Gültigkeit dieser Gleichung für $a > 0$ ergibt auch sofort ihre Gültigkeit für $a < 0$ wegen $-(a, 0) = (-a, 0)$.

$f(x+y) = f(x)+f(y)$ wieder nur die lineare Lösung in Betracht kommt. Wie das zu geschehen hat, hängt sehr von der besonderen Ordnungsstruktur von $\mathfrak{A}$ ab. Wir begnügen uns hier mit dem Hinweis auf die beiden Arbeiten von Hahn (Wiener Sitzungsberichte 1907) und Baer (Heidelberger Sitzungsberichte 1927), wo sich Genaueres über die möglichen Ordnungstypen findet.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die hier verwendeten Methoden auch für die Bieberbachsche Fragestellung von Nutzen sein dürften, wenn man noch die von Bieberbach auf S. 175 seiner Arbeit angestellten Betrachtungen heranzieht.

Ausgegeben am 18. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XXVI

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Library of Congress
MAY 8
Smithsonian Deposit

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 31. Oktober. (S. 533)

Hahn: Die radioaktiven Substanzen im Dienste chemischer und physikalisch-chemischer Forschung. (S. 535)

J. G. Hagen S. J.: Weiteres zur Geschichte des Nebels »Barnard 86«. (S. 543)

Adresse an Hrn. Otto von Zallinger zum goldenen Doktorjubiläum am 20. Oktober 1929. (S. 546)

P. Krüger: Über die Verdauungsfermente der Wirbellosen. (Mitteilung aus der Sitzung der phys.-math. Klasse vom 24. Oktober.) (S. 548)

H. Bohr: Über ganze transzendente Funktionen von einem besonderen Typus. (Beispiel einer allgemeinen Konstruktionsmethode.) (Mitteilung aus der Sitzung der phys.-math. Klasse vom 24. Oktober.) (S. 565)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

XXVI. Gesamtsitzung. 31. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

1. Hr. Hahn sprach über Die radioaktiven Substanzen im Dienste chemischer und physikalisch-chemischer Forschung.

Die »Indikatormethode« und die »Emaniermethode« werden als Methoden angewandter Radiumforschung an einer Anzahl von Beispielen erläutert. Relative und absolute Oberflächenbestimmungen bei amorphen und kristallisierten, bei oberflächenreichen und bei oberflächenarmen Substanzen wurden nach der Emaniermethode durchgeführt. Aus Versuchen bei erhöhter Temperatur lassen sich Aussagen machen über Auflockerungs- und Erweichungstemperaturen kristallisierter und amorpher Stoffe.

2. Hr. Eduard Meyer legte den Ersten vorläufigen Bericht über die im Winter 1928/29 ausgeführten deutschen Ausgrabungen in Warka, verfaßt von Dr. J. Jordan, vor. (Abh.)

Die erste nach dem Kriege ins Werk gesetzte Ausgrabungskampagne in Uruk-Warka führte die 1913 von der Deutschen Orient-Gesellschaft begonnene Untersuchung dieser sumerischen, bis in die parthische Zeit hinein blühenden Metropole fort. Ihre Aufgabe war dieses Mal die Freilegung des Heiligtums der Innin-Ischtar. Ein Hochtempel wie die von Ur und Babylon mit drei Treppen, Teile der Umfassungsmauern mit Kult- und Vorratsräumen, mehrere Höfe und Wasserzuführungen sind bereits ermittelt. Einen vollkommen überraschenden Einblick erhielt man in die Kunst der Kassiten-Zeit durch den datierten Tempel des Karaindasch (15. Jahrhundert v. Chr.) mit gut erhaltenen Ziegelreliefs von Göttern und Göttinnen. An Kleinfunden (Inschriften, Skulpturen, Terrakotten, Gefäßen) war die Ausbeute dieser Kampagne reich. Genaue Aufnahmepläne erläutern den Bericht.

3. Hr. Guthnick überreichte eine weitere kurze Mitteilung von Prof. J. G. Hagen in Rom über die Geschichte des Dunkelnebels Barnard 86 (vgl. Sitzungsberichte 1928, XXVII).

Es wird der Wortlaut eines zweiten, älteren Briefes von Caroline Herschel an Sir John Herschel mitgeteilt, der die Annahme der Identität des Herschelschen Objektes mit Barnard 86 unterstützt.

4. Das auswärtige Mitglied Hr. Dragendorff in Freiburg i. Br. übersandte seine Arbeit: »Amphora strengen Stils in Freiburg i. Br.« (Sonderabdruck 1929).

5. Vorgelegt wurde: Das Buch des Hrn. Wilh. Süvern in Langenholzhausen (Lippe): »Joh. Wilh. Süvern, Preußens Schulreformer nach dem Tilsiter Frieden« (Langensalza 1929).

6. Das korrespondierende Mitglied Hr. Otto von Zallinger in Salzburg hatte am 20. Oktober sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm aus diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Akademie hat den Professor an der Universität London Sir William Bragg, den Professor an der Universität Göttingen Hrn. Dr. Max Born, den Professor an der Universität Göttingen Hrn. Dr. James Franck, den Professor an der Forstlichen Hochschule in Hann. Münden Hrn. Dr. Ludwig Rhumbler, den Professor an der Universität Amsterdam Hrn. Luiczel Egbertus Jan Brouwer, den Professor an der Universität Rom Hrn. Tullio Levi-Civita und den Professor an der Universität Oxford Hrn. Godfrey Harold Hardy zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Die Akademie hat am 28. Oktober ihr Ehrenmitglied Fürst Bernhard von Bülow in Rom durch den Tod verloren.

Die radioaktiven Substanzen im Dienste chemischer und physikalisch-chemischer Forschung.

Von Otto Hahn.

Die große Bedeutung der radioaktiven Substanzen für weite Gebiete der modernen Atomforschung hat ihren Grund in der Tatsache, daß es eine ganze Reihe von Atomarten gibt, die in praktisch gewichtslosen Mengen die Wirkung der Radioaktivität in außerordentlich hohem Maße zeigen. Milliontel Gramme solcher Stoffe sind so stark aktiv wie etwa ein Gramm Radium. Sie verlieren zwar ihre hohe Aktivität schon im Verlaufe weniger Stunden oder Tage, lassen sich aber andererseits aus ihren Muttersubstanzen Radium, Mesothor, Radiothor usw. ebenso oft auf einfachste Weise wieder gewinnen.

In der Physik dienen diese Präparate, vor allem die sogenannten aktiven Niederschläge, dazu, Fragen des Aufbaues und Abbaues der Atomkerne zu studieren. Ihre Bedeutung für die Chemie beruht darauf, daß man mit Hilfe dieser Stoffe die Nachweisbarkeit einer ganzen Anzahl chemischer Grundstoffe ganz außerordentlich verfeinern kann. Die radioaktive Bestimmung etwa von einem Billiontel Gramm ThB, dem chemischen Isotopen des Bleis, geschieht u. U. schneller als der Nachweis von Milligrammen der inaktiven Substanz. Man hat dadurch also ein Verfahren, das Verhalten gewisser chemischer Elemente in Verdünnungen zu studieren, die weit unterhalb der üblichen chemischen Nachweisbarkeit liegen.

Neben dieser von v. Hevesy und Paneth zuerst eingeführten radioaktiven »Indikatorenmethode« verwendet der Verfasser seit einer Reihe von Jahren die sogenannte »Emaniermethode« zum Studium chemischer und physikalisch-chemischer Prozesse.

Während die Indikatorenmethode das Verhalten solcher Elemente untersucht, von denen es leicht nachweisbare radioaktive Isotope gibt, benutzt die Emaniermethode immer das Edelgas Emanation, dessen physikalische Eigenschaften als bekannt vorausgesetzt werden, und untersucht mit seiner Hilfe das Verhalten von Stoffen, in denen es freiwillig entwickelt wird.

Beide Methoden werden im Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie zur Untersuchung molekular-chemischer Prozesse benutzt. Die Anwendung der Indikatormethode sei hier nur an einem Beispiel kurz beschrieben; auf die Emaniermethode soll etwas ausführlicher eingegangen werden.

In einer Anzahl von Untersuchungen beschäftigt sich die französische Chemikerin Frl. Chamié mit der photographischen Wirkung radioaktiver Substanzen, wenn diese in Lösung oder mit Quecksilber amalgamiert vorliegen und die Anordnung so getroffen ist, daß auch die stark absorbierbaren α-Strahlen die photographische Platte treffen können. Frl. Chamié kommt auf Grund ihrer Versuche zu der Überzeugung, daß die radioaktiven Zerfallsprodukte in Lösung nur gruppenweise und nicht homogen verteilt vorkommen[1]. In Fortsetzung dieser Versuche gelangen Herszfinkiel und Jedrzejowski[2] zu dem Ergebnis, daß bei peinlicher Fernhaltung von Staub und anderen Fremdkörpern aus der Lösung die Gruppenbildung ausbleibt, aber wieder auftritt, wenn feste Bestandteile in der Lösung enthalten sind, an denen dann eine Adsorption der Radioelemente eintritt. Die Verfasser machen dabei ihre photographischen Aufnahmen nicht mit den Lösungen selbst, sondern mit den vorsichtig hergestellten Eindampfrückständen.

Auf Grund eingehender Versuche über die Adsorption radioaktiver Stoffe an festen Niederschlägen[3] ist diese Auffassung der prinzipiell vorliegenden

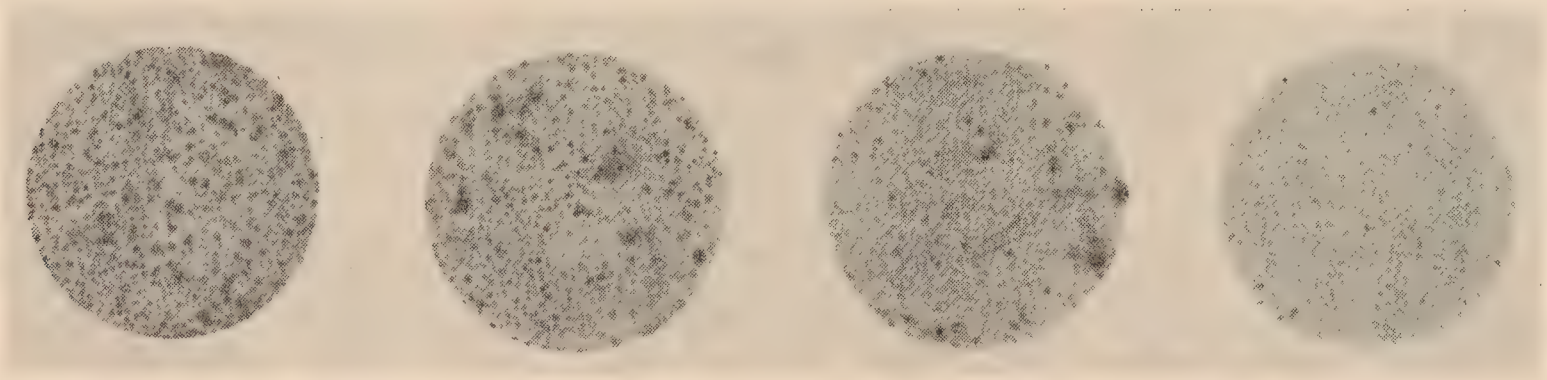


Abb. 1. ThC (Wismuth) in verschieden saurer Lösung.

Gruppenbildung radioaktiver Substanzen nicht zu verstehen. Es kommt unseres Erachtens nach nur auf die chemische Natur und den molekularen Zustand des Radioelements an, ob man Gruppen oder homogene Verteilung der Substanz in der Lösung erwarten darf. Die von den erwähnten Forschern verwendeten Stoffe sind alle solche, die sich leicht als sogenannte »Radiokolloide« an Staub, Kohle, Filterfasern u. a. m. festsetzen, also adsorbiert werden. Diese Eigenschaft beruht auf ihrer leichten Hydrolysierbarkeit. Im hydrolysierten Zustande sind die Verbindungen des Wismuths, Poloniums, sogar noch die des Bleis, ungemein schwer löslich, während sie in dissoziierter Form in Säuren mehr oder weniger leicht löslich sind. Drängt man also ihre Hydrolyse durch Säurezusatz zurück, oder führt die Substanz in eine komplexe Verbindung über, die durch Wasser nicht hydrolysiert wird, dann sollte die Gruppenbildung aufhören.

Die Abbildungen 1 und 2 scheinen diese Annahme vollständig zu bestätigen. Abbildung 1 zeigt eine Lösung von radioaktivem Wismuth (ThC) in Salz-

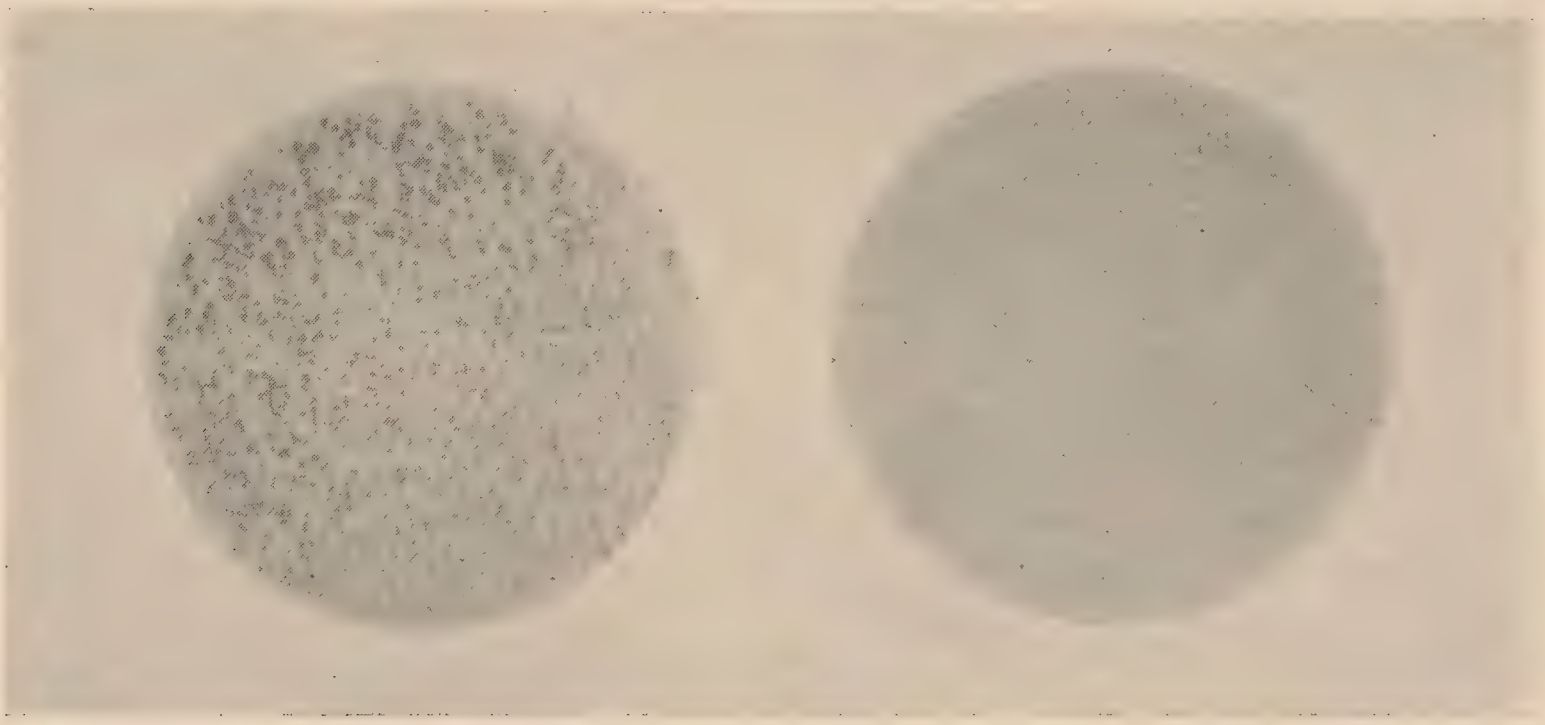
[1] Mlle. C. Chamié, Journ. Phys. et le Rad. **10**. 44. 1929; hier auch Literatur über die früheren Arbeiten.

[2] H. Herszfinkiel und Jedrzejowski, C. R. **188**, 1167, 1929.

[3] O. Hahn und L. Imre, Zs. Phys. Chemie **144**, 161, 1929.

säure verschiedener Konzentration[1]. Man sieht aus den einzelnen Bildern, wie mit zunehmender Säurekonzentration die Gruppen allmählich verschwinden. In $^1/_{10}$ n HCl treten praktisch keine Gruppen mehr auf, das Wismuth liegt nicht mehr in Form des leicht adsorbierbaren, schwerlöslichen Oxychlorids, sondern als leicht lösliches Wismuthtrichlorid vor.

Die Abbildung 2 zeigt die photographische Wirkung von Lösungen desselben Radioelements ThC, in $^1/_{100}$ normaler Salzsäure, einmal bei Anwesenheit von Natriumsulfat (Abb. *a*), das andere Mal bei Anwesenheit von Natriumchlorid (Abb. *b*). Im ersteren Fall sind die Gruppen vorhanden, im letzteren nicht. Die Erklärung ist die, daß durch die Cl-Ionen des Natriumchlorids die Hydro-



a. hydrolysiert *b*. komplex-chemisch gelöst

Abb. 2. ThC (Wismuth) in $^1/_{100}$ n HCl.

lyse des Wismuthoxychlorids unter Bildung des Komplexes $(BiCl_4)^-$ zurückgedrängt wird, während dies durch die Sulfationen nicht geschieht[2].

Es scheint uns, daß man mit dieser Methode eine ganze Reihe molekularchemischer Vorgänge in Lösung sozusagen optisch sichtbar machen kann.

Wir wenden uns jetzt zur Emaniermethode, die sich ebenfalls als Untersuchungsmittel bei chemischen und physikalisch-chemischen Arbeiten in vielen Fällen mit Vorteil verwenden läßt[3]. Unter Emaniervermögen verstehen wir den Betrag der aus einer Substanz freiwillig nach außen diffundierenden Emanation zu ihrem Gesamtbetrage. Ist das Emaniervermögen groß, dann handelt es sich um Substanzen großer innerer Oberfläche, der Körper hat schwammartige Struktur. Ist der untersuchte Körper dagegen grob kristallinisch, dann ist die äußere geometrische Oberfläche nicht sehr von der gesamten wirksamen Oberfläche verschieden. Das Emaniervermögen ist klein. Das sich hier der Untersuchung darbietende Material ist sehr mannigfaltig. Auf die verschiedenste Weise gelingt es, den zur Prüfung gelangenden Stoffen eine kleine Menge eines eine Emanation entwickelnden Radioelements homogen einzuverleiben.

---

[1] Die Versuche sind von Hrn. Dr. WERNER im Laboratorium des Verfassers durchgeführt worden.

[2] W. HERZ und A. BULLA, Zs. Anorg. Chem. **61**, 387, 1909.

[3] O. HAHN, Naturw. **17**, 295, 1929; hier auch die Literatur über frühere Arbeiten.

Als Beispiele sehr oberflächenreicher Substanzen nennen wir die Metalloxydhydrogele (Hydroxyde), als Beispiele oberflächenarmer Stoffe dienen einige kristallisierte Salze und amorphe Gläser. Eine Zwischenstellung nehmen die sogenannten Zeolithe ein, wasserhaltige kristallisierte Silikate, die trotz ihrer ausgesprochenen Kristallnatur schwammartige Struktur besitzen.

Die Abbildung 3 zeigt das Emaniervermögen von Eisen- und Aluminiumhydroxyd in Abhängigkeit vom Feuchtigkeitsgrad[1]. Die feuchten Präparate sind durch sehr hohes Emaniervermögen ausgezeichnet, ein Beweis für ihre

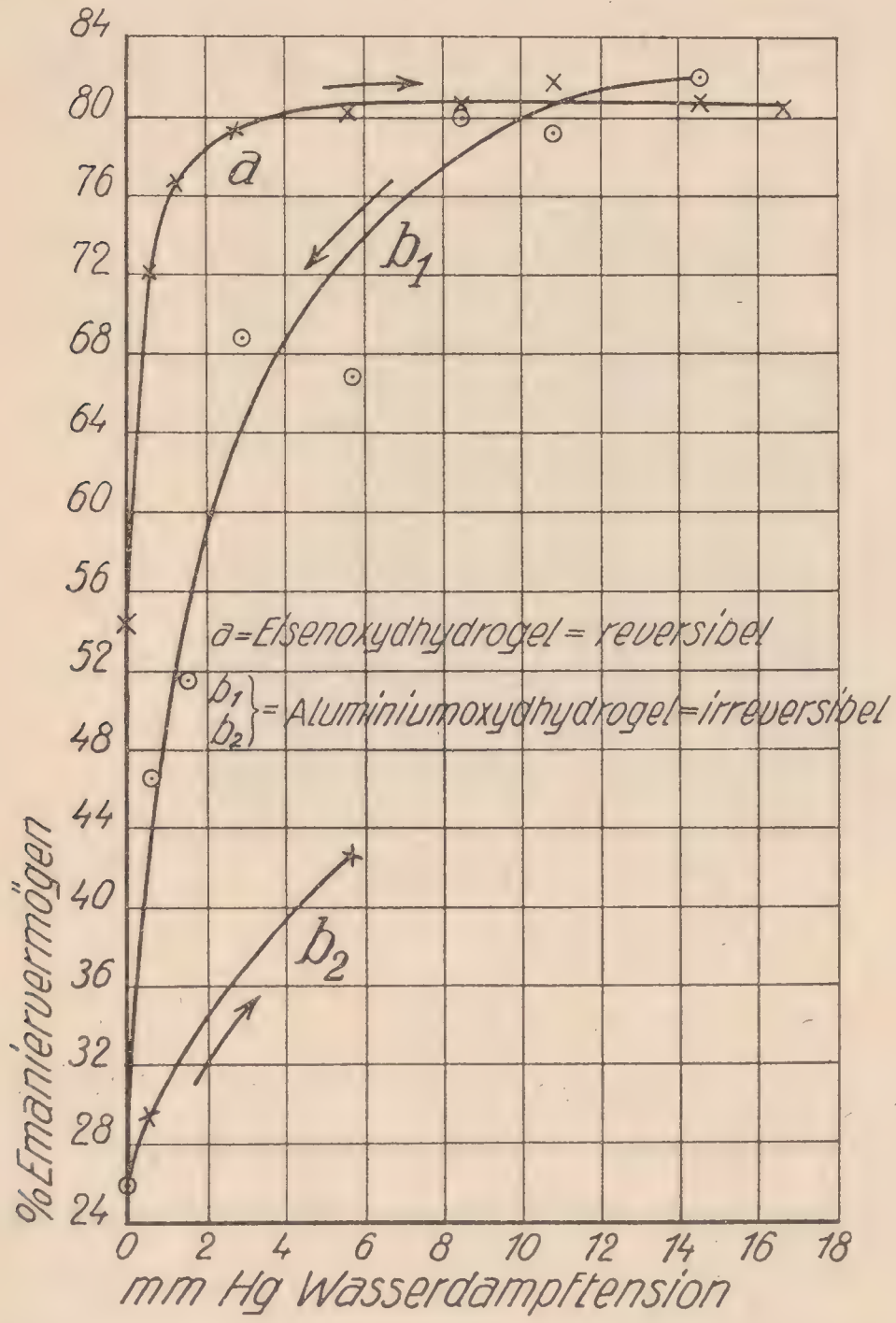


Abb. 3. Emaniervermögen oberflächenreicher Stoffe.

Substanz	Spez. Oberfläche Prozent	Emanierungsvermögen Prozent
Oxalat A	0.0205	5·5
» B	0.136	20
Subphosphat ...	9·35	64
Grenzfall	100	100

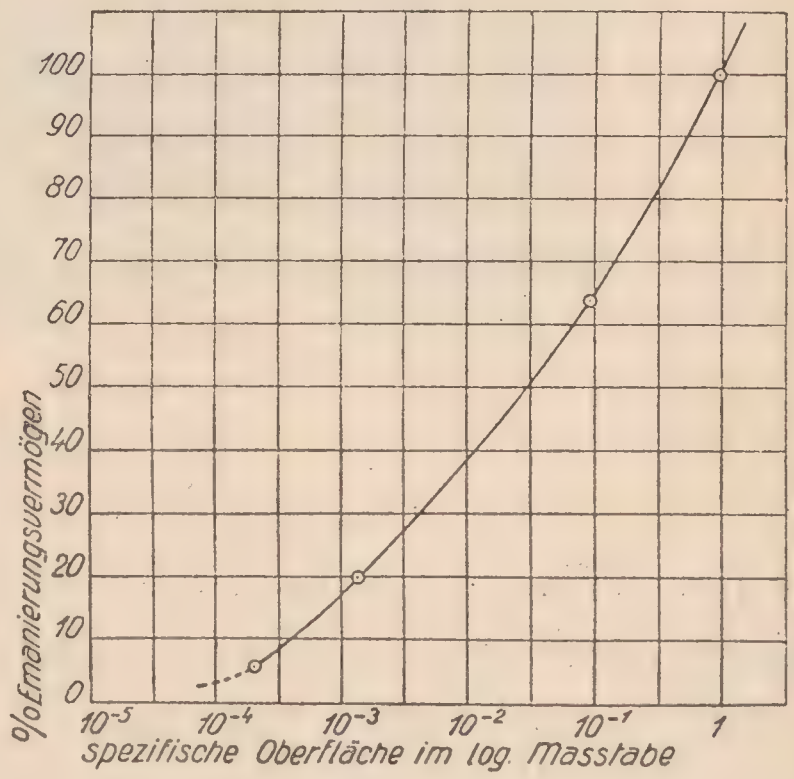


Abb. 4. Abhängigkeit des Emaniervermögens von der spezifischen Oberfläche.

enorme Oberflächenentwicklung. Beim Trocknen sinkt das Emaniervermögen stark. Während aber beim Wiederwässern das Eisenhydroxyd sein hohes Emaniervermögen fast ganz wiedergewinnt, ist dies beim Aluminium durchaus nicht der Fall (Kurve b_2 steigt bei weitem nicht mehr so hoch an wie b_1). Das Aluminium erleidet eine irreversible Oberflächenverkleinerung, es altert.

Die genauere Analyse der Erscheinungen beim Trocknen solcher oberflächenreicher Gele hat gezeigt, daß dreierlei Vorgänge dabei zu unterscheiden sind. Einerseits beobachtet man ein reversibles Zurückgehen des Emaniervermögens, das zwei verschiedene Ursachen hat, 1. eine Adsorption der Emanation an dem ausgetrockneten Gel und 2. eine nicht sehr starke, aber deutlich nachweisbare Schrumpfung. Diese beiden Vorgänge lassen sich durch den

[1] Die Kurven sind etwas vereinfacht einer Arbeit von Hahn und Biltz (Zs. Phys. Chemie **126**, 323, 1927) entnommen.

zeitlichen Verlauf der Wiederkehr des Emaniervermögens beim Anfeuchten leicht voneinander unterscheiden.

Andererseits tritt eine mehr oder weniger starke irreversible Alterung ein, die für die verschiedenen Präparate sehr verschieden groß ist (Abb. 3)[1]. Beschleunigt wird diese Alterung durch mäßiges Erhitzen, starkes Glühen bringt das Emaniervermögen ganz zum Verschwinden. Die große Oberfläche geht durch Kristallisation verloren.

Neben diesen Untersuchungen über relative Oberflächenausbildung und -änderung kann man in besonderen Fällen auch Aussagen über absolute Oberflächengrößen an oberflächenreichen Substanzen machen. Dies geschah durch Kombination der PANETHschen[2] Indikatorenmethode zur Bestimmung der spezifischen Oberfläche kristalliner Pulver mit der hier besprochenen Emaniermethode.

Die Abbildung 4 zeigt eine Kurve, bei der die spezifische Oberfläche einer Anzahl ziemlich oberflächenreicher Thorsalze als Funktion ihres Emaniervermögens dargestellt ist. Aus ihr läßt sich die spezifische Oberfläche von Thorpräparaten und ihre Änderung beim Altern unmittelbar ablesen[3]. Dabei ist es ganz gleichgültig, welcher Art die untersuchten Thorverbindungen sind, es können auch die nach der PANETHschen Methode nicht prüfbaren Thorhydroxyde sein. Es ist nur notwendig, die Bestimmung ihres Emaniervermögens unter Bedingungen vorzunehmen, bei denen weder eine Adsorption der Emanation noch eine Schrumpfung des Präparats statthat, eine Forderung, die unter normalen Aufbewahrungsbedingungen immer erfüllt ist.

Neben oberflächenreichen Präparaten wurden in den letzten Jahren von H. MÜLLER im Laboratorium des Verfassers eine Anzahl oberflächenarmer Substanzen systematisch auf ihr Emaniervermögen untersucht[4]. Mit Ausnahme der Zeolithe emanieren grobkristallinische Salze alle nur sehr wenig, weniger als 1 Prozent. Aus dem dichten Ionengitter kann die Emanation nicht herausdiffundieren. Aber auch dieser an sich geringe Betrag ist noch höher, als ihrer äußeren geometrischen Oberfläche entspricht. Das gleiche Ergebnis wurde auch für einige amorphe Gläser gefunden.

Tabelle 1. Unkorrigiert berechnete und gefundene Oberflächen.

Stoff	d in μ	Gesamt-Volumen in cc	Volumen der monomolekularen Oberflächenschicht	Oberfl.-Vol. / Gesamt-Vol.	Emanierungsvermögen berechnet in Prozent	Emanierungsvermögen gef.	gef. / ber.
$BaCl_2 \cdot 2H_2O$	12	$17.3 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$35 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-1}$	11
$BaSO_4$	3	$2.7 \cdot 10^{-11}$	$3.8 \cdot 10^{-14}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$9.5 \cdot 10^{-1}$	6.8
$BaCl_2$ entwässert...	12	$17.3 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-2}$	1.8	51
$BaCl_2$ geglüht.....	75	$4.2 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-11}$	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	18
$BaCl_2$ geschmolzen..	230	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.22 \cdot 10^{-10}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$100 \cdot 10^{-3}$	55
Ba-Glas.....	130	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$7.1 \cdot 10^{-11}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-1}$	94
Jenaer Glas	130	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$7.1 \cdot 10^{-11}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-2}$	28

[1] Ausführliches über diese Vorgänge bei O. HAHN und M. BILTZ, l. c.
[2] F. PANETH und W. VORWERK, Zs. f. Phys. Chemie **101**, 445, 1922.
[3] O. HAHN, Ann. d. Chemie **462**, 174, 1928.
[4] Über diese Versuche wird Hr. Dr. MÜLLER demnächst ausführlich berichten.

Die Tabelle 1 bringt eine Zusammenstellung der unter plausiblen Annahmen berechneten und der aus dem Emaniervermögen experimentell erschlossenen Oberflächen. In der letzten Kolumne steht das Verhältnis gefundene Oberfläche zu berechneter. Erstere ist immer viel größer als letztere.

Man geht wohl nicht fehl, wenn man diese aus dem Emaniervermögen sich ergebenden zu großen Oberflächen mit den Unvollkommenheiten der Kristalle bzw. des Glases, den Smekalschen »Lockerstellen«, in Zusammenhang bringt. Bringt man für diese Lockerstellen eine ungefähre Korrektur derart an, daß man (nach Smekal) als Anzahl der Lockerstellen den 10^{-4} Teil aller Kristallbausteine einsetzt, so ergeben sich korrigierte Werte für das berechnete Emaniervermögen, die von den gefundenen nicht mehr sehr stark abweichen. Die Tabelle 2 zeigt das Ergebnis.

Tabelle 2. Korrigiert berechnete und gefundene Oberflächen.

Stoff	Gesamt-Volumen in cc	Volumen der monomolekularen Oberflächenschicht	Korrigiertes Oberflächen-Volumen	Oberfl.-Vol. / Gesamt-Vol.	Emanierungsvermögen berechnet in Prozent	Emanierungsvermögen gef.	gef. / ber.
$BaCl_2 \cdot 2H_2O$	$17.3 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$16.2 \cdot 10^{-13}$	$0.94 \cdot 10^{-3}$	$0.94 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-1}$	4.2
$BaSO_4$	$2.7 \cdot 10^{-11}$	$3.8 \cdot 10^{-14}$	$5.4 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$9.5 \cdot 10^{-1}$	4.8
$BaCl_2$ entwässert .	$17.3 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-13}$	$16.2 \cdot 10^{-13}$	$0.94 \cdot 10^{-3}$	$0.94 \cdot 10^{-1}$	1.8	19*
$BaCl_2$ geglüht	$4.2 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-11}$	$27.4 \cdot 10^{-11}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-2}$	1.5
$BaCl_2$ geschmolzen	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.22 \cdot 10^{-10}$	$74.2 \cdot 10^{-10}$	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-2}$	1.6
Ba-Glas	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$7.1 \cdot 10^{-11}$	$13.7 \cdot 10^{-10}$	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$30 \cdot 10^{-2}$	4.8
Jenaer Glas	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$7.1 \cdot 10^{-11}$	$13.7 \cdot 10^{-10}$	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$	1.4

Der mit einem * versehene korrigierte Wert 19 für entwässertes Bariumchlorid ist nicht erstaunlich, sondern zu erwarten. Das betreffende Bariumsalz war unter sehr schonenden Bedingungen entwässert worden und hatte noch ein wesentlich größeres Molekularvolumen, als es dem geglühten oder geschmolzenen Bariumchlorid zukommt.

Man muß aus dem Emaniervermögen nun allerdings annehmen, daß die in die Lockerstellen der Kriställchen aus den anliegenden Molekülen hineindiffundierende Emanation in die Außenluft entweicht, eine Vorstellung, die nicht ganz leicht zu verstehen ist. Weitere Versuche werden hier vielleicht Aufklärung bringen.

Andere Untersuchungen des Hrn. Dr. Müller betreffen das Emaniervermögen einiger Zeolithe und einiger Gläser. Die Ergebnisse zeigen, daß man auch hier mit der neuen Methode eindeutige Aufschlüsse über die Oberflächenentwicklung dieser Silikate und ihre Änderung durch äußere Beeinflussungen erhalten kann. So läßt sich auf diese Weise sehr deutlich die leichte Angreifbarkeit des Bariumglases und die große Widerstandsfähigkeit des Jenaer Geräteglases gegenüber Luftfeuchtigkeit erkennen. Die Emanierfähigkeit des Bariumglases nimmt in feuchter Luft stark zu (Oberflächenvergrößerung durch Zersetzung), die des Jenaer Glases bleibt praktisch konstant (Abbildung 5).

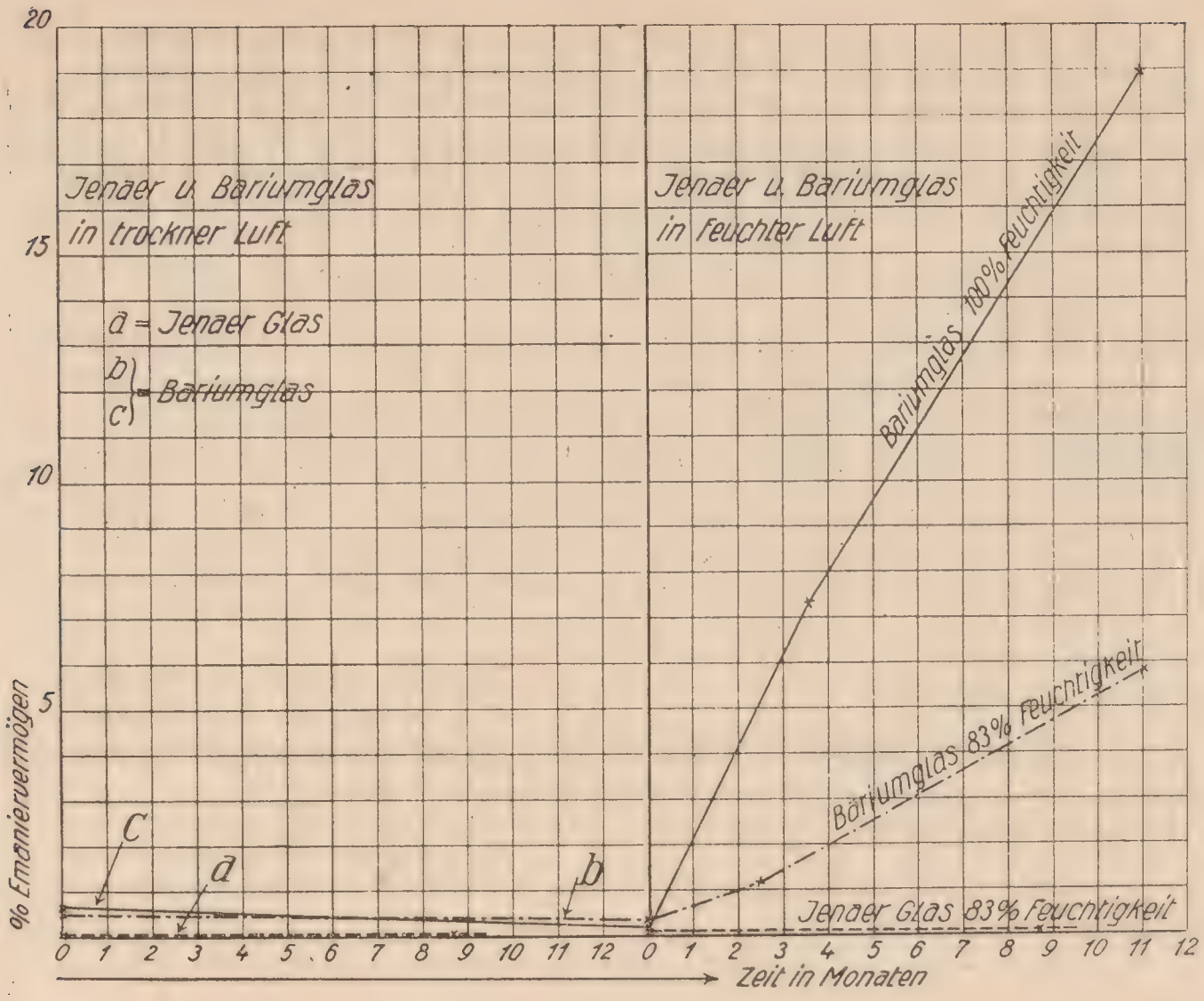


Abb. 5. Angreifbarkeit von Gläsern durch Luftfeuchtigkeit.

Zum Schluß noch einige Worte über das Emaniervermögen in Abhängigkeit von der Temperatur.

Die Abbildung 6 gibt für radiumhaltiges Bariumchlorid und Bariumsulfat die Temperatur der beginnenden »Auflockerung«. Sie wird durch ein sprunghaftes Ansteigen des Emaniervermögens angezeigt. (Der allmähliche Anstieg

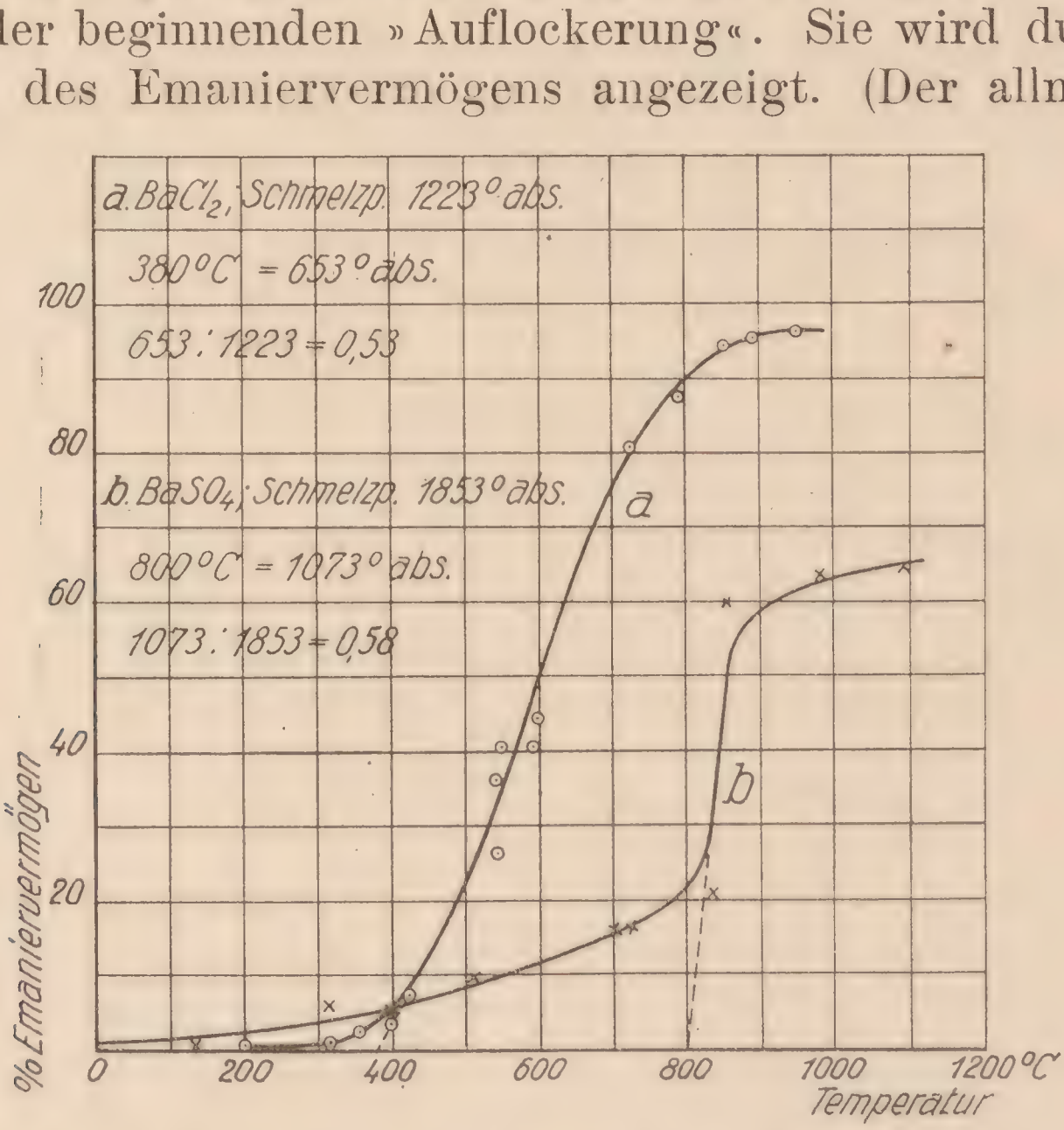


Abb. 6. Auflockerung von Bariumchlorid und Bariumsulfat.

beim Bariumsulfat bis zu etwa 800° ist sekundärer Natur; er beruht auf dem allmählichen Herausdestillieren des in dem betreffenden Bariumsulfat von seiner Herstellung her enthaltenen Wassers, das einen Teil der Emanation mitnimmt.)

Entnimmt man der Figur die Temperatur der beginnenden Auflockerung und setzt sie in Beziehung zu der absoluten Schmelztemperatur des betreffenden Salzes, so erhält man als Verhältnis: absolute Auflockerungstemperatur zu absoluter Schmelztemperatur, die Werte 0.53 für $BaCl_2$, 0.58 für Bariumsulfat. Diese Quotienten stehen in guter Übereinstimmung mit den Tammannschen Ergebnissen über die beginnende Erweichung von Kristallpulvern, die auf ganz anderem Wege gewonnen wurden[1].

Zusammenfassend kann man wohl schon an den wenigen hier gebrachten Beispielen erkennen, daß die Emaniermethode ebenso wie die Indikatormethode sich als neues Mittel zur Untersuchung molekularer Vorgänge mit Vorteil verwenden läßt.

[1] G. Tammann und A. Sworykin, Zs. anorg. allgem. Chemie **176**, 46, 1928.

Weiteres zur Geschichte des Nebels „Barnard 86".

Von J. G. Hagen S. J.
in Rom.

(Vorgelegt von Hrn. Guthnick.)

Ein früherer Bericht über den Nebel »Barnard 86« erschien in diesen Sitzungsberichten 1928 XXVI S. 482. Darin wurde mit großer Wahrscheinlichkeit festgestellt, daß der bekannte Ausruf W. Herschels über ein »Loch im Himmel« sich auf den dunklen Fleck bezog, der von seinem dritten Entdecker Barnard die Nr. 86 im »Catalogue of 182 Dark Markings in the Sky«[1] erhalten hat.

Ein Zweifel über die richtige Identifizierung konnte noch bestehen, weil in dem Büchlein von A. Clerke »The Herschels and Modern Astronomy« der Ausruf Herschels auf »eine schwarze Öffnung von vier Grad Ausdehnung« östlich vom Sternhaufen Messier 80 bezogen ist. Wirklich nennt Herschel in einem Vortrag (1785) über den Bau des Himmels[2] diese schwarze Öffnung »an opening in the heavens«.

Wenn aber A. Clerke hinzufügt, Herschel sei wiederholt auf die Stelle, die den erwähnten Ausruf veranlaßt habe, zurückgekommen »night after night, year after year, without clearing up to his complete satisfaction the mystery of its origin«, so stimmt das nicht mit der Vermutung, die Stelle des Himmels sei die schwarze Öffnung beim Sternhaufen Messier 80. Das wird weiter unten ausführlich gezeigt. Zunächst kommt es darauf an, ob A. Clerke für diese letztere Beschreibung eine Quelle hatte. Ihre Worte sind in unserem ersten Bericht nicht angeführt, eben weil die Begründung fehlte.

Die Quelle ist nun gefunden. In dem heute sehr seltenen Buch[3] »Memoir and Correspondence of Caroline Herschel« steht S. 258 ein P. S., aus dem A. Clerke die angeführten Worte, wenn auch nicht wörtlich, entnommen hat. Um ganz sicher zu gehen, wurde Frl. Francisca Herschel in Slough ersucht, uns auch diese Stelle aus dem betreffenden Brief Carolinas genau abzuschreiben. Diese Abschrift wurde uns bereitwilligst zugesandt und lautet wie folgt:

[1] Astroph. J. 49 (1919), 14.
[2] Scientific Papers I (1912), 253.
[3] By Mrs. John Herschel. London, 2nd edition 1879.

Braunschweiger Straße
No. 376.

Hannover, August 1, 1833.

My dearest Niece ....

P. S. . . . . .

P. S. S. Dear Nephew, as soon as your instrument is erected I wish you would see if there was not something remarkable in the lower part of the Scorpion to be found: for I remember your father returned several nights and years to the same spot but could not satisfy himself about the uncommon appearance of that part of the heavens. It was something more than a total absence of stars (I believe) etc., but you will have seen by the register that those lower parts could only be marked half swept.

I wish you health and good success to all you undertake and a happy return to a peaceful home in old England.

God bless you all.

Dieses zweite P. S. ist einem Schreiben Carolinas an Lady Herschel, Gattin des zwei Jahre vorher geadelten Sir John, angehängt. Es war drei Monate vor der Abreise der Familie ans Kap der Guten Hoffnung. Das P. S. war also dem Neffen Carolinas als Aufgabe mit auf die Reise gegeben. Der in unserm ersten Bericht abgedruckte Brief Carolinas ist erst ein Jahr später geschrieben, als J. Herschel schon am Beobachten war.

Aus diesem P. S. ergibt sich nun, daß die Aufforderung Carolinas an ihren Neffen sich nicht auf den Vortrag beziehen konnte, den W. Herschel im Jahre 1785 vor der R. S. hielt und in dem die »Öffnung« östlich von Messier 80, d. h. im Ophiuchus-Nebel, beschrieben wird. Der gedruckte Vortrag war Carolina bekannt. Es handelte sich aber um etwas Ungedrucktes, und zwar um eine merkwürdige ungewöhnliche Erscheinung am Himmel. Die »Öffnung« im großen Ophiuchus-Nebel ist etwas so Gewöhnliches, daß schon auf der einzigen Tafel XIII in Barnards Atlas links von diesem Nebel drei andere mehr auffallende Sternleeren zu sehen sind. Herschel spricht hier von einer Sternleere. Er gibt sogar den steilen Abstieg und Aufstieg der Sternfülle zahlenmäßig an und läßt nicht merken, daß ihn diese Zahlen nicht befriedigten. Nach den Worten Carolinas sah er mehr als eine Sternleere. Er konnte auch von dem merkwürdigen Anblick keine befriedigende Erklärung finden.

Herschels Beobachtungen erstreckten sich von 1783 bis 1802. Sein Vortrag über die Öffnung im Ophiuchus-Nebel wurde schon zwei Jahre nach Beginn seiner Beobachtungen gehalten. Wenn also Carolina von einer Wiederholung der Beobachtung während mehrerer Jahre spricht, so muß das in die noch folgenden 17 Arbeitsjahre verlegt werden.

Die Vermutung von A. Clerke auf diese Weise zu widerlegen, schien wünschenswert, weil sie von mehreren englischen Astronomen als etwas Ausgemachtes angesehen wird. Die Widerlegung hat auch nicht nur den Zweck, den Ausruf Herschels über das »Loch im Himmel« auf das richtige Objekt zu beziehen. Das wäre an sich von geringer Bedeutung. Für die Wissen-

schaft ist es wichtiger, daß die Aufmerksamkeit der Astronomen von neuem auf den dreimal entdeckten Nebel B 86 gelenkt werde.

Was Carolina Herschel in den beiden Schreiben an ihren Neffen von der merkwürdigen Stelle beim Sternbild des Scorpion sagt, paßt in allen Einzelheiten auf den genannten Nebel. Die ovale dunkle Öffnung zwischen den Sternen und der eng angrenzende Sternhaufen bieten das eigentümliche Bild eines Städtchens, das an einen kleinen See angebaut ist.

Hätte Barnard von der Verwunderung Herschels und seinem Ausruf gewußt, so wäre ihm das ganz selbstverständlich vorgekommen. Er selbst beschreibt den Nebel in diesem Ton und beobachtete ihn wiederholt in seinem Kometensucher und im großen Refraktor der Lick-Sternwarte.

Für Herschel hatte die Verbindung der Sternleere mit dem Sternhaufen eine ganz besondere Bedeutung. Es schien ihm, als ob die Sternleeren durch Zusammenziehung der Sterne in gedrängte Haufen enstanden seien. Seine Vermutung sprach er in dem erwähnten Vortrag von 1785 unzweideutig aus[1]. Am ganzen Himmel aber konnte er kaum ein anderes, so deutliches und auf kleinen Raum beschränktes Beispiel seiner Theorie finden. Dieses Bild wiederholt zu betrachten, muß auf seinen regen Geist wohltuend gewirkt haben. Es ist zweifellos das Objekt, das ihm den Ausruf der Verwunderung entlockt hat.

Heute hat dieses »Loch im Himmel« eine noch weitere Bedeutung. Es bildet geradezu ein ungelöstes Problem der Himmelsphotographie. Carolina Herschel sagt zwar, es sei mehr als eine Sternleere, daß aber dieses Mehr in einer Nebelwolke bestehe, wird nicht hinzugefügt. Erst Secchi bringt das Objekt mit kosmischen Wolken in Verbindung und nach ihm auch Barnard. Beides ist in unserem ersten Artikel angeführt. Seitdem ist die über der Sternleere lagernde Nebelwolke in Rom und anderswo deutlich wiedergesehen worden.

Das ungelöste Problem besteht nun darin, daß diese Nebelwolke zwar sichtbar, aber wie es scheint, nicht photographierbar ist. Im ersten Artikel sind die Karten 26, 27, 30 des Barnardschen Atlasses und weitere drei Tafeln angeführt, die sich in den Bänden XI und XIII der Lick-Sternwarte finden. Überall erscheint das Objekt wie ein schwarzer Punkt. Vielleicht gelingt es noch mit besseren Mitteln, diese Nebelwolke aktinisch darzustellen. Wenn nicht, so stehen wir vor einer Alternative: Entweder konnten Secchi, Barnard und alle übrigen, die den Nebel gesehen haben, zwischen Sternleere und Wolke nicht unterscheiden, oder es gibt Lichtstrahlen, die wohl auf das Auge, aber nicht auf die photographische Platte wirken.

Vatikanische Sternwarte, 15. Oktober 1929.

[1] Scientific P. I, S. 253.

Adresse an Hrn. Otto von Zallinger zum goldenen Doktorjubiläum am 20. Oktober 1929.

Hochverehrter Herr Kollege!

Als Sie vor fünfzig Jahren in Innsbruck die Würde eines Doktors der Rechte erwarben und mit Ihrer Erstlingsschrift über Ministeriales und Milites hervortraten, horchten über die Kreise der Rechts- und Verfassungshistoriker hinaus alsbald aufmerksam alle auf, deren Liebe der Geschichte des deutschen Mittelalters galt. Meister Julius Ficker, von dem Sie kamen, an Gelehrsamkeit und im Aufspüren von Problemen nicht ungleich, hoben Sie die schwierige Frage der unfreien Ritter aus dem verwickelten Ständerecht des zwölften und dreizehnten Jahrhunderts kühn heraus und umschrieben mit einer Bündigkeit und einer Schärfe, wie sie Ihrem Lehrer nicht so leicht gegeben waren, die Rechtsstellung jener im Gegensatze zu derjenigen der gleichfalls unfreien, aber ständisch höher stehenden Dienstmannen zunächst mit Hilfe bayerischer Quellen so scharf und treffsicher, daß das Ergebnis mit Einschluß dessen, was Sie über die Homines synodales oder Sendbarfreien hinzufügten, in der Hauptsache heute noch feststeht.

Und nun begann, nachdem Sie noch an Straßburgs deutscher Reichsuniversität zu Rudolph Sohms Füßen gesessen und in Ergänzung von Karl Friedrich Stumpf-Brentanos Paul Scheffer-Boichorsts strenge Schule durchgemacht hatten, ein wahrer Siegeszug. Er führte Sie von der Privatdozentur über die außerordentliche und die ordentliche Professur an Ihrer tirolischen Heimathochschule mit noch nicht vierzig Jahren auf den rechtshistorischen Lehrstuhl in Wien. Und er zeitigte außer einigen kleineren Studien über den Königsbann sowie über die ritterlichen Klassen im steirischen Landrechte im Jahre 1887 das berühmte Werk über die Schöffenbarfreien des Sachsenspiegels, in dem Sie zum ersten Male den Angaben dieses Rechtsbuches das Urkundenmaterial seiner Heimat und Entstehungszeit gegenüberstellten, um darzutun, daß Eike von Repgowe jedenfalls in diesem Punkte nicht sowohl die Wirklichkeit als eine durch seine persönlichen Verhältnisse mitbestimmte Theorie wiedergegeben habe. Wie ein reinigender Gewittersturm kamen diese Ausführungen über unsere Wissenschaft der deutschen Rechtsgeschichte herunter und hatten noch mancherlei Nachgewitter zur Folge, durch die die Glaubwürdigkeit des Sachsenspiegels auch in anderen Punkten in Frage gestellt wurde. Noch heute ist der Streit nicht völlig ausgetragen. Die seither erschienene Literatur urteilt über Eike von Repgowe und sein Werk wieder günstiger.

Aber zum klassischen Monographienschatz der historischen Germanistik gehört Ihre Untersuchung doch, und von ihr ausgehen muß noch heute jeder, der sich mit dem Ständerecht der Rechtsbücher und ihrer Zeit befaßt. Kurz nachher, 1890, unternahmen Sie es, das vor- und seither vielerörterte ostfränkische Herzogtum des Bischofs von Würzburg auf die Landfriedensgerichtbarkeit zurückzuführen. Und 1895 erweiterten Sie mit Ihrem Buche über das Verfahren gegen die landschädlichen Leute in Süddeutschand Ihr Forschungsgebiet abermals durch einen kühnen Griff in bis dahin gänzlich unbeachtete Teile des altdeutschen Strafrechts und Strafprozesses. Auch diese Arbeit wurde in der Folge heftig umstritten und Gegenstand einer ganzen kleinen Literatur. Aber die neueste tritt wieder mehr auf Ihre Seite, und als eine der bedeutendsten rechtshistorischen Leistungen am Ausgange des letzten Jahrhunderts wird Ihre Schrift allgemein gewertet.

Ein schweres Geschick hat bald darauf Ihrer Lehrtätigkeit ein Ende bereitet, und die durch ein Übermaß von Arbeit erschöpften Nerven ließen Sie lange nicht mehr zu literarischem Schaffen kommen. Doch geruht haben Sie nicht. Und zu unser aller freudiger Überraschung traten Sie vor einem halben Jahrdutzend plötzlich mit einer kürzlich noch ergänzten und fortgeführten Untersuchung hervor, in der man auf den ersten Blick die Klaue des Löwen erkennt. Hatten Sie schon früher der standesrechtlichen Ausstattung unseres größten deutschen Heldenliedes Ihr Augenmerk zugewandt, so unternahmen Sie es in Ihrer Abhandlung über die Eheschließung im Nibelungenlied und in der Gudrun, unsere vaterländischen Epen auch nach der privatrechtsgeschichtlichen Seite hin fruchtbar zu machen. Die Einseitigkeit der durch die Rechtsquellen vermittelten Überlieferung suchten Sie durch Heraushebung der Vermählung im Ringe lebensvoll zu ergänzen, und der Rolle der Brautleute, namentlich der Braut, bemühten Sie sich besser gerecht zu werden. Und wiederum knüpfte sich daran ein lebhaftes Für und Wider. Aber wie man sich auch zu Ihren Ergebnissen stellen mag, über der Fragestellung, Untersuchung und Herausarbeitung liegt der ganze Reiz wahrhaft akademischer Forschungskunst.

So können Sie sich eines stolzen Lebenswerkes rühmen und dürfen sich dessen versichert halten, wie wenige grundlegend und anregend gewirkt zu haben. An Ihrem Ehrentage Ihnen das zu sagen, Sie als den Unserigen zu begrüßen und zu beglückwünschen, des freut sich aufrichtig

die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Über die Verdauungsfermente der Wirbellosen.

Von Prof. Dr. Paul Krüger
in Wien.

(Vorgelegt von Hrn. Hesse am 24. Oktober 1929 [s. oben S. 507].)

Das wichtigste Ergebnis meiner mit E. Graetz ausgeführten Untersuchungen über die Fermente des Flußkrebs-Magensaftes war, daß die Verdauungsfermente der Wirbellosen Beziehungen zeigen zu den intrazellulären Enzymen der Wirbeltiere — bei den Wirbellosen ist die Arbeitsteilung zwischen der Verdauungstätigkeit und dem Stoffumsatz in den Zellen noch nicht so streng durchgeführt wie sicher bei den höheren Wirbeltieren — und daß sie offensichtlich mit pflanzlichen Fermenten, speziell mit denen der Hefe, verwandt sind, d. h. also noch primitivere Zustände darstellen[1]. Die sich auch daraus ergebende Verwandtschaft des Stoffwechsels der Wirbellosen mit dem der Pflanzen ist in vieler Hinsicht bemerkenswert. Wir hatten in dieser Arbeit weiter versucht, »die Identifizierung der Fermente nicht nur nach ihrer Gruppenzugehörigkeit vorzunehmen, sondern auch ihre Substratspezifität wie ihre Einstellung auf eine bestimmte Konfiguration des betreffenden, chemisch eindeutig definierten Körpers«, ihr Verhalten gegen Aktivatoren, Hemmungskörper und Gifte festzustellen[2].

Die weitere Aufgabe bestand nun darin, einmal möglichst viele Wirbellosengruppen in großen Zügen auf die Beschaffenheit ihrer Verdauungsfermente zu prüfen und die Spezifität einzelner Fermente noch genauer festzulegen.

In der Zwischenzeit sind von einer Reihe anderer Untersucher ähnliche Ergebnisse erzielt worden. [Die Arbeiten von Evenius, Patané, Sawano, Stober, Swingle sind ihrer zu primitiven Fermenttechnik wegen nicht zu berücksichtigen. — Die umfangreiche Polemik von R. Beutler gegen meine kurze

[1] R. Beutler ist das offensichtlich entgangen, wenn sie in ihrer Besprechung der Arbeit (Ber. wiss. Biol. **7**, 356, 1928) diese wiederholten Hinweise mit den Worten abtut: »Nach einigen Gegenüberstellungen der bei Pflanzen und Tieren bisher aufgefundenen Fermente und ihrer Besonderheiten ...«

[2] Auch das scheint R. Beutler nicht bemerkt zu haben (es handelt sich um ein kritisches Referat!), denn sie erwähnt von diesem Ziel unserer Arbeit nichts. Bei einer Besprechung der Arbeit von Shinoda (Ber. wiss. Biol. **8**, 286, 1928) schreibt sie: »Ref. begrüßt es, daß auch der Verf. zu dem Resultat kommt, daß die in der Wirbellosenfermentchemie leider fast einzig (?) angewandte Methode der optimalen p_h-Bestimmung nie zu einem Resultat führen kann, so lange die Fermente der Wirbellosen nicht rein dargestellt sind.« — Es ist immer gewagt, so etwas zu prophezeien.

Mitteilung über die Reaktionsverhältnisse in den Verdauungssäften der Wirbellosen und die möglichen Schlüsse auf die Natur der in ihnen enthaltenen Fermente ist völlig hinfällig (eine teilweise Kritik hat bereits E. Graetz gebracht) durch die übereinstimmenden Befunde einer ganzen Reihe von Autoren bei den verschiedensten Wirbellosen. Aus der neuesten Arbeit auf diesem Gebiet, von R. B. Howland über den p_h der Nahrungsvakuolen von *Actinosphaerium*, geht hervor, daß auch bei den Protozoen die Verdauung im sauren Gebiet ($p_h = 4.3$) erfolgt. Geringere [H·]-Werte (selten $p_h = 6.8—7.0$) fanden sich nur in älteren Vakuolen, die nur mehr unverdaute Reste enthalten. Die Reaktion der neugebildeten Vakuolen beträgt 6.6—6.9. (Diese Beobachtungen sind bedeutsam im Hinblick auf die Untersuchungen von Willstätter und Bamann über die Enzyme der Leukozyten.) Die gleiche Beobachtung hat bereits Boschma (1925) an den Polypen der Koralle *Astrangia danae* gemacht, sich in ihrer Deutung allerdings von der damals herrschenden Meinung beeinflussen lassen. »The digestive vacuoles possess an acid reaction, whereas in the gastric cavity this reaction is neutral (or weakly alkaline) [gegen Lackmus]. During two days the digestive vacuoles keep approximately the same color.« (Dann tritt alkalische Reaktion für 3 bis 6—7 Tage auf.) »In the later part of this alkaline period the excretion of the undigestible particles occurs.« Nach Crozier (1918) beträgt der p_h des Darmsaftes von *Stichopus* im Hungerzustand 5.0—6.5, während der Verdauung 4.8—5.5. Auch Falloise (1905) stellte fest, daß der Kropf- und Darmsaft von hungernden Cephalopoden leicht sauer bis neutral (gegen Lackmus) ist, während der Verdauung aber deutlich sauer reagiert. — Die Arbeiten von Hirsch und Jacobs, Krijgsman, Mouchet, Yonge haben andere Probleme zum Ziel.] Aus der Arbeit von Vonk (1927) ersah ich erst jetzt das Zitat der Arbeit von St. Janoušek. Obwohl dieser (nach dem Referat in: Ber. wiss. Biol. **1**, 1926) aus seinen Ergebnissen keine Schlüsse über die Art der Wirbellosen-Lipase (*Murex trunculus* und *Octopus vulgaris*) zieht, sind sie doch wichtig, als sie völlig mit den unsrigen übereinstimmen: Bei Anwendung der stalagmometrischen Methode (Substrat: Tributyrin) konnte gezeigt werden, daß die Wirkung der Lipase durch Chinin und Atoxyl aufgehoben wird, d. h. das Ferment in dieser Beziehung der intrazellulär wirkenden Lipase der Wirbeltiere gleicht. Die Hemmung durch Chinin fand auch Graetz bei der Lipase einheimischer Pulmonaten. — In einer Mitteilung über die Verdauungsenzyme von *Astacus fluviatilis* und *Testudo graeca* (zusammengefaßt nach Resultaten von O. Shinoda, C. A. G. Wiersma, R. van der Veen und H. P. Wolvekamp) nimmt Vonk eine mögliche Übereinstimmung der Fermente des Flußkrebses mit pflanzlichen Fermenten (Hefe) an, da für die verschiedenen Eiweißkörper die p_h-Optima bei *Astacus* ganz anders liegen als für Pepsin und Trypsin, u. a. Bindegewebe (Katgut und Ligamentum nuchae) bei $p_h = 6—7$, während dieses beim Wirbeltier nur vom Pepsin bei $p_h = 2.5$ optimal gespalten wird. Nach ihm liegt ein Enzymgemisch vor, das »alles kann, was auch die Kette der an verschiedenen Stellen lokalisierten Enzyme der höheren Tiere leisten können. Mit einer Ausnahme aber: der Saft enthält sehr wenig Erepsin«. Die Optima der Karbohydrasen (Amylase und Maltase) »stimmen wieder nicht überein mit denen der höheren Tiere

(für *Astacus* 5.5, für Säuger 6.2—6.8)«[1]. Auch Shinoda kommt zu dem Ergebnis, daß die Teilenzyme des Flußkrebsmagensaftes »andere Eigenschaften haben werden als diejenigen des Wirbeltierkörpers«. (Auf seine Kritik unserer Befunde über Nichtberücksichtigung der Autolyse komme ich nachher noch zurück.) — Abweichende Befunde will allein Wigglesworth gemacht haben. Das weite Hineinreichen der Fermentwirkung ins saure Gebiet (verglichen mit den Fermenten der Wirbeltiere) glaubt er auf eine Anpassung der Wirbellosenenzyme an die saure Reaktion der Verdauungssäfte ($p_h = 4.6—6.0$) zurückführen zu können. Erepsin ist vorhanden, konnte durch Adsorption von Trypsin getrennt werden, Optimum $p_h = 8.5$.

Die Proteasen.

Ehe ich auf meine eigenen Ergebnisse eingehe — sie betreffen hauptsächlich die Wirkung der Proteasen —, will ich eine kurze Übersicht über unsere augenblicklichen Kenntnisse der spezifischen Wirkungen der Eiweißfermente (nach den Untersuchungen von E. Grassmann und E. Waldschmidt-Leitz) geben.

In den Zellen und Säften der Pflanzen, in der Hefe, in Bakterien (*Aspergillus oryzae*), in den Gewebezellen und Leukozyten der Tiere [und in den Verdauungssäften der wirbellosen Tiere] finden sich einander sehr nahestehende Proteinasen (die z. T. wohl identisch sind), eine Polypeptidase (die nur Peptide, aber nicht Dipeptide angreift) und eine Dipeptidase. (Möglicherweise unterscheiden sich die Polypeptidasen und Dipeptidasen der verschiedenen Produktionsorte.) Die Verdauungsfermente der Wirbeltiere, Pepsin und Trypsin (vielleicht gehört hierher auch die Proteinase von *Pinguicula* [p_h-Optimum = 8], die wie die beiden auch ein typisches Sekretionsenzym ist), nehmen eine Sonderstellung ein. Das »Erepsin« des Wirbeltierdarmes besteht nach den Untersuchungen von Waldschmidt-Leitz auch aus einer Polypeptidase und Dipeptidase. Beides sind möglicherweise gleichfalls nicht in wahrer Lösung

[1] Wenn Vonk bei dieser Gelegenheit schreibt: »Keineswegs kann ich Krügers Meinung beistimmen, der für *Astacus* von Trypsin spricht«, so muß ich ein solches Zitat als durchaus unvollständig zurückweisen. Es liegt mir völlig fern, Prioritätsstreitigkeiten hervorzurufen (in unserer Arbeit haben wir p. 490 darauf hingewiesen, daß Vonk 1927 die Vermutung geäußert hat, daß die Protease aus *Astacus*- und *Homarus*-Magensaft zu den pflanzlichen Proteasen, die ihr Optimum beim isoelektrischen Punkt des Substrates haben, gehört, da der »Magensaft durchschnittlich ein p_h von etwa 5.5 aufweist [p. 525]«), aber eine etwas genauere Durchsicht unserer Arbeit hätte klar gezeigt, daß wir uns der Unterschiede der *Astacus*-Protease und des Wirbeltiertrypsins wie ihrer Verwandtschaft mit dem Hefeferment durch unsere eigenen Untersuchungen (die Arbeit Shinodas erschien erst nach der unsrigen!) wohl bewußt geworden sind. Ich verweise auf p. 470/71, 484 (p_h-Wirkungsbereich des Fermentes), 486, 489, 490, 505. Daß die Bezeichnung »Trypsin« für die Flußkrebsprotease nur eine vorläufige sein sollte, dürfte jedem aufmerksamen Leser der Arbeit klar sein. Niemand macht den Fermentchemikern einen Vorwurf, wenn sie auch jetzt noch von »Hefetrypsin« reden. Vonk selbst spricht auch von der Amylase und Maltase im Flußkrebsmagensaft, und sie sind doch sicher — wie er auch auf Grund der abweichenden p_h-Optima annimmt — von den entsprechenden Fermenten der Wirbeltiere verschieden. — Vielleicht ist es in diesem Zusammenhang angebracht, darauf hinzuweisen, daß ich bereits 1926 und in der obigen Arbeit auf die Übereinstimmung zwischen dem p_h des Verdauungssaftes der Wirbellosen und der optimalen Wirkung der meisten in ihm enthaltenen Fermente aufmerksam gemacht habe.

sezernierte Fermente, sondern leukozytärer Herkunft und durch Autolyse freigelegt. Pepsin, Trypsin und die Proteinasen unterscheiden sich vor allem durch ihre p_h-Optima: Pepsin 1.4—2, Proteinasen 4.5—7 (Einfluß des Substrates), Trypsin 7—8. Dazu kommen Unterschiede in der Einstellung auf bestimmte Substrate, die z. T. allerdings nur in negativem Sinne sich geltend machen: Pepsin greift Protamine nicht an; Trypsin und die Proteinasen spalten Protamine. Das Wirbeltiertrypsin zerlegt azylierte Dipeptide, die Proteinasen (Hefe, Wirbellose) tun das nicht. Für letztere ist ein spezifisches Substrat noch nicht gefunden. Azylierte Peptide werden von den Poly- und Dipeptidasen nicht angegriffen. Die Dipeptidasen spalten nur Dipeptide, nicht deren Derivate. Di-, Tri-, Tetra- usw. peptid-ester oder -amide, dekarboxylierte Dipeptide, Aminosäure-amide sind Substrate der Polypeptidasen. »Die (Hefe-) Dipeptidase spaltet nur solche CO—NH-Bindungen, denen zugleich eine freie α-Aminogruppe und eine freie COOH-Gruppe benachbart ist. Die (Hefe-) Polypeptidase spaltet nur solche CO—NH-Bindungen, denen eine freie α-Aminogruppe, aber keine freie COOH-Gruppe benachbart ist.« (Grassmann.)

Da die Spezifität der Fermente derart scharf ausgeprägt ist, muß sich ihre Wirkung auch bei Verwendung der natürlichen Fermentgemische aufzeigen lassen. Erhält man Spaltung eines für ein bestimmtes Ferment spezifischen Substrates — auf das eben die anderen im Gemisch befindlichen Fermente nicht eingestellt sind —, so sind wir berechtigt, auf Anwesenheit des zugehörigen Fermentes zu schließen; fällt die Probe negativ aus, ist es nicht vorhanden. Wenden wir ein Dipeptid an, so kann seine Zerlegung nur von einer Dipeptidase herrühren. Hierbei ist es uns auch möglich, das p_h-Optimum festzulegen. Dieses wird bei der Polypeptidase und Proteinase — bei Einwirkung von Fermentgemischen — verschoben, da auf die Spaltprodukte ihrer spezifischen Substrate nun die Dipeptidase bzw. Poly- und Dipeptidase einwirken, deren Optima (bei der Hefe) bei $p_h = 7.0$ bzw. 7.8 liegen. Es wird also fälschlich mehr in alkalischem Gebiet gefunden. Wohl aber erlaubt uns der positive Ausfall der Versuche auch in diesen Fällen den Rückschluß auf Vorhandensein einer Polypeptidase oder Proteinase. Negatives Ergebnis bei Verwendung von azylierten Peptiden als Substrat schließt Proteinasen aus.

Diese Versuche zur eindeutigen Feststellung des Charakters der Wirbellosenfermente wurden mit dem stets in frischem Zustand zur Verfügung stehenden Flußkrebsmagensaft ausgeführt. Auf Grund des sonstigen Verhaltens der Verdauungssäfte anderer Wirbelloser dürfen wir auch bei diesen die gleichen Wirkungen annehmen. Eine Tabelle (s. p. 552) mag zunächst einmal eine Übersicht über die Spaltergebnisse bringen.

Die Übersicht zeigt also, daß der Verdauungssaft des Flußkrebses in seiner Wirkung der des Hefepreßsaftes gleicht. Die Übereinstimmung ist viel größer als unsere ersten Beobachtungen vermuten ließen. Diese Befunde dürfen wir sicher für alle Wirbellosen verallgemeinern. Auf Grund der bisherigen Erfahrungen sind wir sicher auch berechtigt, auf die Übereinstimmung der nicht genauer geprüften Fermente eines bestimmten Wirbellosen mit denen des Flußkrebses zu schließen, wenn wir gleiche Eigenschaften eines

Tabelle I.

Substrat	Pepsin	Trypsin	Hefeproteinase	Hefe-Poly-peptidase	Hefe-Di-peptidase	Flußkrebs-magensaft
Eieralbumin	+	+ (Kinase)	+ (gering)	—	—	+ (?)
Blutalbumin	+	+ »	+ (besser)	—	—	+ (?)
Pflanzenkasein . . .	+	+ »	?	—	—	+
Fibrin	+	+ »	+	—	—	+
Kasein	+	+	+ (wie Blutalb.)	—	—	+
Gelatine	+	+ (Kinase)	+ +	—	—	+ (Shinoda)
Pepton	—	+	+ +	—	—	+
Clupein	—	+	+	—	—	+
α-Leucylglycyl-glycin-äthylester	—	—	—	+	—	+ } Poly-pep-tidase
Glykokoll-äthyl-ester-chlorhydrat	—	—	—	+	—	+ } Poly-pep-tidase
Leucyl-glycyl-glycin	—	—	—	+	—	+ } Poly-pep-tidase
Alanyl-glycin	—	—	—	—	+	+ } Dipep-tidase
Leucyl-glycin	—	—	—	—	+	+ } Dipep-tidase
β-Naphthalinsulfo-glycyl-l-tyrosin	—	+	—	—	—	—

andern Eiweiß-, Fett- oder Kohlenhydratfermentes mit den entsprechenden desselben nachgewiesen haben. Unter dieser Annahme sind bisher folgende Wirbellosengruppen geprüft worden:

Coelenterata:	Siphonophora, Scyphomedusae	(M. Bodansky und W. C. Rose.)
Arthropoda:	Crustacea	(P. Krüger und E. Graetz, O. Shinoda, C. A. G. Wiersma und R. Van Der Veen, C. M. Yonge.)
	Insecta	(R. L. Abbot, E. N. Pavlovsky und E. I. Zarin, V. B. Wigglesworth.)
Mollusca:	Gastropoda	(E. Graetz, St. Janoušek, P. Krüger, C. M. Yonge.)
Echinoderma:	Asteroidea	(P. Krüger.)
	Holothurioidea	(P. Krüger, H. A. P. C. Oomen.)
Tunicata:	Ascidiacea	(P. Krüger, C. M. Yonge.)

Von mir wurden die frisch entnommenen Verdauungssäfte folgender Arten untersucht:

Crustacea:	*Palinurus vulgaris,* *Homarus vulgaris,* *Maja verrucosa.*
Gastropoda:	*Tritonium spec.* *Aplysia depilans,* *Pleurobranchaea meckeli,* *Thetys leporina.*

Cephalopoda:	*Sepia officinalis,*
	Octopus vulgaris,
	Eledone moschata.
Holothurioidea:	*Holothuria tubulosa.*
Tunicata:	*Ciona intestinalis.*

Weiter habe ich noch von den Mitteldarmdrüsen der genannten Tiere Acetontrockenpulver (nach den Angaben von Willstätter) hergestellt, von denen bisher *Astacus*, *Aplysia*, *Sepia*, *Octopus*, *Asterias glacialis*, *Ciona* (Glyzerin- und NH_3-Auszüge) auf ihre Wirksamkeit geprüft wurden.

Während unseres Aufenthaltes in Neapel haben wir uns darauf beschränkt, die Säfte der zur Verfügung stehenden Arten auf Vorhandensein und Konzentration an Proteinase und Dipeptidase zu untersuchen. Eine genaue Messung der [H·] war leider nicht möglich. Das stets verwendete Gemisch (4 ccm Glykokoll, 1 ccm NaOH, 2 ccm 6prozentiges Pepton bzw. 1 ccm $^1/_{10}$ mol. Alanylglycin, etwa 0.5 ccm Ferment) hatte einen ungefähren $p_h = 8.0$ bzw. 8.5. Die erhaltenen Werte sind also nicht als optimale anzusehen; sie genügen aber zur Orientierung, erlauben auch mancherlei Schlußfolgerungen.

Tabelle 2.

Art	Zustand des Tieres	Fermentmenge	Pepton	Dipeptid
Maja verrucosa	—	0.6 ccm	3.48 ccm $^n/_{10}$-NaOH	0.56 ccm $^n/_{10}$-NaOH
» »	—	0.4 »	3.11 » »	—
Homarus vulg.	—	0.6 »	2.12 » »	—
» »	Hungertier	0.6 »	0.73 » »	0.60 » »
Tritonium	»	0.6 »	1.82 » »	0.59 » »
Aplysia dep.	in voller Verdauung	0.6 »	0.85 » »	0.05 » (?) »
» »	Hungertier	0.6 »	0.16 » »	0.05 » »
» »	—	0.6 »	0.75 » »	—
Pleurobranchaea	?	0.6 »	0.52 » »	0.08 » »
»	Hungertier	0.6 »	0.45 » »	—
Thetys lep.	—	0.3 »	1.95 » »	0.50 » »
Sepia off.	Hungertier	0.6 »	1.26 » »	0.30 » »
» »	»	0.6 »	2.01 » »	0.60 » »
Octopus vulg.	in voller Verdauung	0.6 »	2.35 » »	—
» »	» » »	0.6 »	2.70 » »	1.38 » »
Eledone mosch.	Hungertier	0.6 »	1.53 » »	0.35 » »
Holothuria	—	0.4 »	2.07 » »	—
Ciona int.	in voller Verdauung	0.6 »	3.87 » »	0.50 » »

Aus der Zusammenstellung geht hervor, daß die in Frage stehenden Fermente bei allen untersuchten Arten vorhanden sind, daß aber ihre Konzentration bei den Fleischfressern (Crustaceen, Cephalopoden, *Tritonium* und *Thetys* — *Pleurobranchaea* scheint eine Ausnahme zu machen), wenigstens während der Verdauung, höher ist als bei den ausgesprochenen Pflanzenfressern, wie *Aplysia*. Nach den Untersuchungen von Graetz gilt dieser Unterschied nicht für Landpulmonaten, bei denen vielleicht andere Faktoren ausschlaggebend sind (Graetz, p. 409). Dieser mögliche Zusammenhang zwischen Beschaffen-

heit der Nahrung und der Fermentkonzentration wird weiter nachgeprüft. Ich erinnere hier nochmals an die allerdings noch mit primitiver Technik ausgeführten Untersuchungen von Bounoure, deren Ergebnisse hier wiedergegeben seien.

Tabelle 3.

Ferment	Dytiscus marginalis	Hydrophilus piceus	Geotrupes silvaticus	Melolontha vulgaris	Polyphylla fullo
Eiweiß.....	12.0	6.1	4.8	1.0	0
Lipase	5.6	10.7	6.0	37.2	33.5
Amylase	10.0	56.07	43.60	38.7	49.1
Invertin	0.66	62.55	34.3	12.4	11.5

[Eiweißbestimmung: Gelatine nach Mett; Fettbestimmung: (Monobutyrin) titriert mit Na_2CO_3; Zuckerbestimmung: nach Bertrand.]

Auf unsere Befunde über die Konzentration an Lipase komme ich nachher zu sprechen. — Bemerkenswert sind die hohen Spaltwerte bei *Holothuria* und *Ciona*; diese stehen in scharfem Gegensatz zu denen von Oomen und Yonge mitgeteilten, wonach diese Verdauungssäfte nur schwache proteolytische Wirkung haben.

Genaue Bestimmungen des [H·]-Optimum waren mangels geeigneter Apparatur nicht möglich. Schätzungen ergaben u. a. folgende Reihen:

Eledone (Saft mit gleicher Menge Glyzerin verdünnt).

p_h	ccm $^n/_{10}$-NaOH
3.3	0.38
5.0	0.64
7.5	1.21
8.5	0.96

Holothuria.

p_h	ccm $^n/_{10}$-NaOH
4—5.0	0.46
6.0	2.71
7.5	4.20
9.0	1.59

Eine Nachprüfung mit *Astacus*-Verdauungssaft (Kasein, $^m/_6$-KH_2PO_4/Zitronensäure) unter genauer p_h-Messung zeigte Übereinstimmung hiermit:

p_h	ccm $^n/_{10}$-NaOH
5.0	1.75
5.38	2.01
5.82	2.21
6.31	2.41
6.88	2.59
7.26	2.56
7.49	2.26

Das Optimum würde demnach bei $p_h = 7.0$ liegen. (Shinoda gibt für Kasein $p_h =$ etwas unter 6 an; zwischen 5.6 und 6.5 ändert er aber die Pufferzusammensetzung, was sicher von Einfluß ist.) Ähnliche Reihen wurden auch mit Glyzerinextrakten von Azetonpulvern (*Astacus*, *Sepia*) gewonnen. Die Lage des Optimum ist bei ihnen allen ins alkalische Gebiet verschoben

(Mitwirkung der Poly- und Dipeptidase); aber wichtig ist, daß die Versuche den weiten Wirkungsbereich der Protease — der sie eben sowohl vom Pepsin wie Wirbeltiertrypsin unterscheidet — demonstrieren.

Alle diese Versuche hatten weiter gezeigt, daß mindestens zwei Eiweißfermente in den Verdauungssäften der Wirbellosen vorkommen: eine Protease und eine Dipeptidase. Das ergab sich auch bei der Untersuchung der Azetonpulver. Am günstigsten erwies sich hierfür die Extraktion mit $^n/_{40}$-NH_3 (1 g Pulver mit 16 ccm NH_3, 2 Stunden bei 37°); z. B. *Octopus*

Pepton, $p_h = 7.8$ — 0.80 ccm $^n/_{10}$-NaOH,
Alanylglyzin, $p_h = 8.8$ — 0.32 ccm $^n/_{10}$-NaOH,

also gute Spaltung, obwohl nicht bei optimalem p_h. Zur genauen Identifizierung der Fermente wurden die eingangs erwähnten Substrate verwendet. Ein gelegentlicher Versuch mit Glykokollesterchlorhydrat (Substrat der Polypeptidase) mit einem Gemisch von Azetonpulverextrakten (*Aplysia*: Glyzerin bzw. $^n/_{40}$-NH_3) hatte deren Wirksamkeit auf den Ester gezeigt: 8 ccm Lösung (0.87prozentig), 1 ccm $^m/_3$-Phosphatmischung, 1 ccm Fermentlösung:

p_h	ccm $^n/_{10}$-NaOH
4.9	0.11
5.6	0.16
5.9	0.18
6.2	0.22
6.5	0.26

Nach Grassmann ist der Ester im Bereich von $p_h = 5$ bis 6.4 praktisch beständig, die Aziditätszunahme konnte also nur von einer Einwirkung eines Fermentes, der vermuteten Polypeptidase, verursacht sein. Eindeutiger sind folgende Versuche:

0.2 g dl-Leucyl-glycyl-glycin-äthylesterchlorhydrat wurden in 16.5 ccm aqua gelöst und mit 1 ccm $^n/_{10}$-NaOH auf $p_h = 7.21$ gebracht. Zu je 8 ccm Gemisch wurden 1 ccm $^m/_3$-Phosphat ($p_h = 7.11$) und 1 ccm Ferment (*Astacus*) bzw. 1 ccm aqua dest. gegeben. In der Kontrolle betrug der p_h zu Beginn 7.14, nach 24 Stunden 7.07. Der Mehrverbrauch belief sich für je 2 ccm auf 0.03 ccm $^n/_{10}$-NaOH, d. h. Null. Im Fermentversuch sank der p_h von 6.87 auf 5.92. Die Titration von je 2 ccm ergab nach 4 Stunden Einwirkungsdauer eine Zunahme von 0.37 ccm, nach 24 Stunden von 0.92 ccm $^n/_{10}$-NaOH. — Mit einem Acetonpräparat von *Ciona* wurden folgende Versuche angesetzt: 0.25 g mit 4 ccm $^n/_{40}$-NH_3 2 Stunden bei 30° extrahiert, $^1/_2$ Stunde zentrifugiert:

1. Pepton: $p_h = 6.78$ Aziditätszunahme: 0.81 ccm $^n/_{10}$-NaOH.
2. Leucylglycylglycin: $p_h = 7.16$ » 0.27 » » »
3. Alanylglycin: $p_h = 7.73$ » 0.23 » » »

Es sind demnach drei Fermente zu unterscheiden: eine Protease, eine Polypeptidase, eine Dipeptidase. Unklar war nur noch der Charakter der Protease. Das entschieden zwei Versuche mit Naphthalinsulfoglycyl-l-tyrosin, die beide negativ verliefen: 0.399 g wurden in aqua dest. mit NaOH

aufgelöst und mit $^{m}/_{3}$-prim. Phosphat/Phosphorsäure auf $p_h = 7.1$ gebracht. Zu je 9 ccm Lösung kam 1 ccm Ferment bzw. 1 ccm aqua dest.; je 3 ccm wurden titriert. Die Messung des p_h sofort nach Zusatz des Fermentes zeigte 6.90 an, nach 24 Stunden 7.07. Der Mehrverbrauch an $^{n}/_{10}$-NaOH belief sich auf 0.05 ccm, d. h. Null. Die Kontrolle hatte zu Beginn einen $p_h = 7.12$, nach 24 Stunden $= 7.14$; Differenz der beiden Titrationen: — 0.02 ccm. Die Protease der Wirbellosen ist also eine Proteinase, die dem Hefeferment nahesteht (vgl. Tab. 1, p. 552).

Hier ist nun auch der Ort, auf Shinodas Kritik meiner mit Graetz veröffentlichten Arbeiten einzugehen. Sein Hauptvorwurf ist, daß wir die »Autolyse« nicht berücksichtigt hätten, so daß vor allem unsere Angaben über das »Erepsin«, insbesondere das von uns angegebene p_h-Optimum sehr zu bezweifeln seien. »Eine genaue Kurve der Wirkung konnte ich nicht zeichnen, weil das Optimum mit dem Autolyseoptimum zusammenfällt und die Wirkung der ‚Erepsinfraktion' überhaupt nur aus einer Substraktion des Autolysetiters im Kontrollversuche, vom Titer des mit den Dipeptiden gemischten Saftes erhalten werden kann. Es sei ausdrücklich bemerkt, daß nur auf diesem Wege die Verdauung der Dipeptide überhaupt bewiesen werden kann. Krügers diesbezügliche Versuche müssen als nichtbeweisend angesehen werden, und auch der von ihm gefundene niedere p_h-Optimumwert konnte durch meine Versuche nicht bestätigt werden. Er dürfte sich auf reine Autolyse beziehen.« (Shinoda, p. 337.)

Um das Ergebnis unserer Nachprüfungen vorauszunehmen: die Konzentration der Dipeptidase (unser Erepsinferment) ist — sicher bei allen fleischfressenden Wirbellosen — höher als Shinoda angenommen hatte, so daß also ihr Vorhandensein einwandfrei festgestellt werden kann (vgl. Tab. 2, Verhältnis der Spaltwerte der gesamten proteolytischen Wirkung und Dipeptidasewirkung). Das Wirkungsoptimum der Dipeptidase liegt zwischen 7.3 und 8.0 (vgl. auch Graetz, p. 390 und Krüger und Graetz, 1927, p. 131). Vorhandensein und Wirkung der sog. »Autolyse« sind höchst wahrscheinlich auf andere Ursachen (vgl. Krüger und Graetz, 1928, p. 492), z. T. auf Fehlbeobachtungen und Fehlschlüsse zurückzuführen (vgl. Graetz, p. 386 und 390). Letzteres vor allem geht bei einer genauen Durchsicht der Shinodaschen Arbeit hervor. Einige Beispiele mögen das zeigen.

Bei der Demonstration der Wirkung des Magensaftes auf Dipeptide mit »Kontrolle für Autolyse« gibt Shinoda eine eingehende Tabelle seiner Ergebnisse. Prüft man nun die Werte (für Spaltung von Glycylglycin), so findet man für $p_h = 8.1$ in der einen Reihe (Tab. 7. B. a.) einen Spaltwert von 0.80 (graphisch ermittelt, Kr.), in den beiden anderen Reihen (Tab. 7. B. b.) — in verdünnterer Lösung, aber 5 ccm Probe statt 3 ccm — von 0.58 und 1,10. Es handelt sich also offensichtlich um Säfte verschiedener Fermentstärke. Wenn nun die »Autolyse«-Werte tatsächlich auf die Einwirkung der Fermente auf die in den Säften enthaltenen Eiweißkörper zurückzuführen sind, so müßten doch diese Werte in der Größenordnung der verschiedenen Fermentstärke ungefähr entsprechen. Shinoda gibt an, folgende »Autolysen«-Werte gefunden zu haben: 0.20 bzw. 0.49 und 0.65; d. h. die Werte für

Gesamtwirkung (Ferment auf Dipeptid und Safteiweiß) und für »Autolyse«-Wirkung (Ferment auf Safteiweiß) verhalten sich bei ein und demselben p_h wie 4:1 bzw. 1.18:1 und 1.69:1. Bei $p_h = 6.8$ ist das Verhältnis beider im ersten Versuch wie 1.25:1, im dritten Versuch wie 2.1:1. Oder: Die Differenzen belaufen sich bei $p_h = 8.1$ auf 0.60 bzw. 0.09 und 0.45, bei $p_h = 6.8$ auf 0.20 und 0.07. Da liegen ganz offensichtlich Fehler vor. — Weiter: nur bei einer Versuchsreihe über die proteolytische Wirkung des Saftes verwendet Shinoda die »Autolyse«-Werte. Wenn ihnen wirklich eine solch große Bedeutung zukommt, warum berücksichtigt er sie nicht immer? Und in diesem einen Fall stimmen die gefundenen »Autolyse«-Zahlen nicht mit den sonst von ihm angegebenen überein! Die »Autolyse« soll zwei Optima haben: bei $p_h = 3.5$ und 9 (vgl. Shinoda p. 333, 337, 355). In der Tabelle 6. A. a. (Wirkung des Magensaftes auf Kollagene) finden sich folgende »Autolysen«-Werte:

$p_h =$	4.7	— 0.30	
	5.1	— 0.14	
	5.7	— 0.00	
	5.7	— 0.04	(anderes Puffergemisch)
	6.9	— 0.04	
	7.8	— 0.07	
	8.4	— 0.06	
	9.2	— — 0.01;	

d. h. beim zweiten Optimum ein Nullwert! Das stimmt also nicht, und das gilt auch für Shinodas nachträgliche Kritik an unserer Arbeit von 1928. Wenn bei unseren Versuchen (p. 484) »die Autolyse eine bedeutende Rolle gespielt hat«, hätten die Werte bei $p_h = 9.61$ wesentlich höher sein müssen als bei $p_h = 7.23$. (Nach einem Versuch von Shinoda ist die »Autolyse«-Wirkung bei $p_h = 9.61$ mehr als doppelt so groß wie bei $p_h = 7.23$!) Wie bei unserem zweiten angegebenen Versuch (p. 492) die »Autolyse« in Betracht gekommen sein soll, ist mir unverständlich. Genau die gleiche Versuchsanordnung findet sich bei Shinoda (p. 345/46), von einer Berücksichtigung der sog. »Autolyse«-Wirkung ist in seinen ganzen umfangreichen Tabellen nichts zu finden! — Verwahren muß ich mich dagegen, daß unsere Ergebnisse und Versuchsanordnungen an Stellen zitiert werden, bei denen es sich um ganz andere Dinge handelt (Shinoda p. 334) und daß dann aus der Nichtübereinstimmung auf fehlerhaftes Arbeiten unserseits geschlossen wird. In der betreffenden Mitteilung hatten wir Ringers Angabe über das p_h-Optimum des Trypsins und der Flußkrebsprotease (Wirkung auf Fibrin, kolorimetrische Bestimmung) als irrtümlich (zu hoch) nachgewiesen, und seine Beobachtung auf Alkaliwirkung zurückführen können, was von den Fermentchemikern auch als zutreffend angesehen wird. Die Behauptungen Shinodas von dem Vorhandensein einer »Autolyse« werden dadurch nicht besser begründet.

Die Lipasen.

Obwohl ich viel Zeit und Arbeit auf die Untersuchung der Lipasen der Wirbellosen verwendet habe, kann ich bis jetzt kaum Neues darüber berichten. Es fehlt noch an Versuchen über die optische Spezifität der Fer-

mente, die ich in der nächsten Zeit auszuführen gedenke. Eine Tabelle mag auch hier zunächst einmal über die erhaltenen Spaltwerte unterrichten.

Tabelle 4

[$^n/_2$-Acetat/Essigsäure = $^{32}/_1$, 5 ccm].

Art	Zustand des Tieres	Ferment-menge	Substrat-menge	Rizinusöl	Methyl-butyrat	Phenylacetat
Maja verrucosa	—	0.3 ccm	1 ccm	1.04 ccm $^n/_{10}$-NaOH (Olivenöl)	1.36 ccm $^n/_{10}$-NaOH	3.51 ccm $^n/_{10}$-NaOH
» »	—	0.3 »	0.5 »	0.14 ccm	0.59 ccm	2.15 ccm
» »	—	0.4 »	1 »	0.36 »	0.94 »	1.48 »
Palinurus vulgaris	—	0.3 »	1 »	1.03 »	0.48 »	6.46 »
Homarus vulgaris	Hungertier	0.3 »	0.5 »	4.10 »	1.72 »	—
Aplysia depilans	in voller Verdauung	0.3 »	0.5 »	4.12 »	9.95 »	—
» »	» » »	0.3 » (6 Tage alt)	0.5 »	2.60 »	9.43 »	—
» »	Hungertier	0.3 ccm	0.5 »	0.60 »	0.77 »	—
» »	—	0.3 »	0.5 »	0.85 »	9.73 »	5.89 »
Thetys leporina	—	0.3 »	1 »	0.08 »	2.19 »	—
Sepia officinalis	—	0.3 » (5 fach verdünnt)	1 »	0.02 »	0.22 »	0.37 »
Octopus vulgaris	in voller Verdauung	0.3 ccm	0.5 »	0.31 »	1.55 »	—
» »	» » »	0.3 »	0.5 »	1.66 »	3.00 »	(stark geschüttelt)
» »	» » »	0.3 »	0.5 »	0.60 »	2.45 »	5.08 ccm
Eledone moschata	Hungertier	0.3 »	0.5 »	1.33 »	1.03 »	—
» »	—	0.6 » (1 fach verdünnt)	1 »	0.44 »	1.83 »	1.65 »
Holothuria tub.	—	1 ccm	1 »	? 0.0 »	> 5.83 »	—
» »	—	0.4 »	1 »	1.60 » (Tributyrin)	2.14 »	1.86 »
Ciona intestinalis	in voller Verdauung	0.3 »	0.5 »	0.08 ccm	0.21 »	—

Umgekehrt wie bei den Eiweißfermenten haben die Pflanzenfresser (*Aplysia*) die höchsten Lipasekonzentrationen. Das hatte schon Bounoure bei den von ihm untersuchten Insekten gefunden. Bei landbewohnenden Pulmonaten hatte Graetz keine konstanten Unterschiede festgestellt. — Weiter fanden wir in Neapel, daß das Verhältnis der Spaltwerte für Neutralfette und für Ester — das wir bei *Astacus* zugunsten der Ester nachgewiesen hatten — sich auch umkehren kann. Graetz hat das bei Pulmonaten und *Astacus* nachgeprüft und bestätigt gefunden. Ich selbst habe mir dann viel Mühe gegeben, um hinter die Ursachen zu kommen. Nach Willstätter schwankt auch das Spaltvermögen für verschiedene Proben von Schweinepankreas häufig für Olivenöl, Triacetin, Methylbutyrat. Ein Glyzerinextrakt von Wachsmottenraupen ergab unter gleichen Bedingungen (0.3 ccm Ferment, 0.4 ccm Substrat) für Rizinusöl 0.39 ccm $^n/_{10}$-NaOH, für Tributyrin 5.04 ccm, für Methylbutyrat 2.83 ccm, für Phenylacetat 4.59 ccm. Auf Grund gelegentlicher Beobachtungen glaubte ich durch Altern, Behandeln des Saftes (*Astacus*) mit NH_3, Einfluß verschiedener Temperaturen, verschiedene Behandlung der Acetonpulver eine konstant auftretende Schädigung entweder der Lipase oder der Esterase (gegebenenfalls auch der für aromatische Ester) — es war ja die Möglichkeit vorhanden, daß

mehrere fettspaltende Fermente im Saft enthalten waren — zu erreichen, doch erwies sich diese Hoffnung als trügerisch. Die Ergebnisse waren sehr schwankend. Nur die Annahme scheint berechtigt, daß bei der Extraktion der Acetonpulver ein großer Teil der in den Verdauungssäften enthaltenen Begleitstoffe nicht mit in Lösung geht (bzw. bei der Behandlung der Drüsengewebe mit Acetonäther bereits herausgelöst wird), so daß die Wirkung der Extrakte mehr der einer Lipase entspricht, d. h. stärker auf Neutralfette

Tabelle 5.

Art	Extraktionsmittel	Ferment-menge	Rizinusöl	Trioleïn	Tributyrin	Mono-butyrin	Methyl-butyrat	Phenyl-acetat
Sepia	1 g in 16 ccm Glyzerin	1 ccm	0.16 ccm $^n/_{10}$-Na OH	—	—	—	0.22 ccm $^n/_{10}$-Na OH	—
Octopus	1 g in 13 ccm Glyzerin, 3 Std., 37°	1 »	0.15 »	—	—	—	0.38 »	—
»	1 g in 50 ccm $^n/_{40}$-NH_3, 2 Std., 37°	1 »	0.09 »	—	—	—	0.24 »	—
»	1 g in 16 ccm $^n/_{40}$-NH_3, 2 Std., 37°	1 »	0.14 »	—	—	—	0.32 »	—
»	1 g in 16 ccm $^n/_{80}$-NH_3, 2 Std., 37°	1 »	0.04 »	—	—	—	0.27 »	—
»	1 g in 16 ccm $^n/_{40}$-NH_3, 3 Std., 37°	0.75 »	—	0.07 ccm $^n/_{10}$-Na OH	0.56 ccm $^n/_{10}$-Na OH	0.46 ccm $^n/_{10}$-Na OH	0.16 »	—
Aplysia	1 g in 16 ccm Glyzerin, 18 Std., 37°	1 »	0.0 »	—	0.16 »	—	0.0 »	5.67 ccm $^n/_{10}$-Na OH
»	1 g in 16 ccm $^n/_{40}$-NH_3, 18 Std., 37°	1 »	0.06 »	—	0.18 »	—	0.0 »	4.58 »
»	1 g in 16 ccm $^n/_{40}$-NH_3, 1 1/2 Std., 37°	0.98 »	0.81 »	—	1.10 »	—	0.35 »	6 85 »
Astacus	? 24 Std., 37°	—	—	1.05 »	6.78 »	4.25 »	5.33 »	—

gegenüber Estern ist. Die natürlichen Begleitstoffe würden also die Spaltwirkung für bestimmte Substrate aktivieren, für andere hemmen.

Im Zusammenhang mit diesen Versuchen habe ich mit ein und demselben Saftgemisch (aus vielen Krebsen gewonnen) eine Reihe über die Spaltfähigkeit homologer Ester und Fette angesetzt (5 ccm $^n/_2$-Acetat/Essigsäure, 8 : 1, 1 ccm Ferment, 0.1 ccm Substrat):

Tabelle 6.

Substrat	ccm $^n/_{10}$-Na OH	Substrat	ccm $^n/_{10}$-Na OH
Propionsaures Methyl . .	2.81	Monobutyrin	4.25
Buttersaures Methyl . . .	5.33	Tributyrin	6.78
Valeriansaures Methyl . .	1.24	Tricaprylin	1.24
Caprylsaures Methyl . . .	1.61	Trioleïn	1.05
Myristinsaures Methyl . .	1.01		

Auch hier zeigte sich die besprochene Umkehr. Das gilt ebenso für das Verhältnis Monobutyrin : Tributyrin, das in unseren früheren Versuchen gerade entgegengesetzt war. Der hohe Wert für caprylsaures Methyl ist vielleicht auf eine Fehlbeobachtung zurückzuführen; dagegen ist die stärkere Spaltung

des buttersauren Esters gegenüber dem propionsauren auch beim Pankreasferment beobachtet worden.

Ein paar Versuche zur Kinetik der Lipase wurden gleichfalls ausgeführt. Die Einwirkung der gleichen Fermentmenge (0.5 ccm) auf ansteigende Substratkonzentrationen ($p_h = 6.2$) ergab eine Kurve, die der von Pankreaslipase auf Methylbutyrat ($p_h = 8.9$) entspricht (Willstätter):

0.1	ccm	Methylbutyrat	— 3.1	ccm	$^n/_{10}$-NaOH
0.2	»	»	— 6.34	»	»
0.4	»	»	— 6.87	»	»
0.8	»	»	— 7.07	»	»
1.6	»	»	— 7.72	»	»

Mit zunehmender Fermentkonzentration, aber konstanten Substratmengen (0.5 ccm) nähert sich die Kurve sehr schnell einer Geraden:

0.1	ccm	Ferment	— 1.41	ccm	$^n/_{10}$-NaOH
0.2	»	»	— 3.03	»	»
0.4	»	»	— 5.29	»	»
0.8	»	»	— 8.74	»	»
1.6	»	»	— 14.65	»	»
3.2	»	»	— 27.07	»	»

Eine Bestimmung des p_h = Optimum eines Acetonpulverextraktes (*Sepia*, Glycerin) ergab den Höchstwert zwischen $p_h = 5.6$ und 6.2 (Acetatpuffer). Er entspricht also dem für *Astacus* und *Helix* (Graetz, Acetatpuffer) gefundenen.

Die Carbohydrasen.

Mit Kohlenhydraten wurden nur wenige orientierende Versuche ausgeführt. Von frischen Verdauungssäften wurde der eines reinen Fleischfressers (*Octopus*) und eines reinen Pflanzenfressers (*Aplysia*) geprüft (Saccharose), wobei der Schneckensaft sich als der weitaus wirksamere erwies (vgl. p. 558). Von den beiden [H·] der Versuche ($p_h = 4.5$ und 6.1) steht der letzte Wert dem Optimum am nächsten (vgl. *Astacus*: Krüger und Graetz, Wiersma und van der Veen). Mit Acetonpulverextrakten wurden die p_h-Optima der Stärke- und Maltosespaltung bestimmt. Ein Glyzerinauszug (1 g in 16 ccm) von *Sepia*-Mitteldarmdrüse (»Leber«) ergab mit löslicher Stärke (Phosphatpuffer) folgende Abnahme des Drehungswinkels:

p_h	= 4.84	—	26′
	= 5.78	—	42′
	= 6.68	—	35′
	= 7.55	—	27′
	= 7.96	—	24′

Für die Maltose-Spaltung (*Octopus*-»Leber«, 1 g mit 16 ccm $^n/_{40}$-NH_3, 3 Std. bei 37°; Phosphatpuffer) wurde folgende Werte gefunden:

p_h	= 4.49	— Drehungsabnahme	1° 16′
	= 4.94	— »	2°
	= 5.29	— »	2° 4′
	= 5.59	— »	2° 1′
	= 5.91	— »	1° 89′
	= 6.24	— »	1° 82′
	= 6.42	— »	1° 61′
	= 6.64	— »	1° 51′
	= 6.81	— »	1° 41′

Ein Vergleich mit frischem *Astacus*-Verdauungssaft (Hungertiere) lieferte eine damit völlig übereinstimmende Kurve:

$p_h = 4.82$	—	Drehungsabnahme	: 3° 31′
$= 5.03$	—	»	: 3° 35′
$= 5.49$	—	»	: 3° 20′
$= 5.93$	—	»	: 3° 3′
$= 6.48$	—	»	: 2° 67′
$= 6.90$	—	»	: 2° 22′.

Das Optimum der Maltosespaltung der Wirbellosenverdauungssäfte liegt demnach zwischen $p_h = 4.9$ und 5.6, etwa bei 5.3. Die von uns für den Flußkrebs angegebenen p_h-Optima der Stärke- und Maltosespaltung sind für Pulmonaten (Graetz) und Cephalopoden bestätigt gefunden. Unabhängig von uns sind Wiersma und van der Veen beim Flußkrebs zu ähnlichen Werten gelangt: Optimum der Amylase bei $p_h = 5.6$, der Maltase zwischen 5 und 6, kein scharfes Optimum. Vielleicht ist das auf die angewendete Methode (Titration nach Bertrand und Schoorl) zurückzuführen, mit der wir seinerzeit Schwierigkeiten hatten. Die polarimetrische Methode ist davon frei: sie ergibt ein scharf umschriebenes Optimum.

Anhang.

Unter den Wirbellosen nehmen die Cephalopoden auch bezüglich der Differenzierung ihrer Verdauungsorgane die höchste Stelle ein; nur sind wir über die Funktion der drei Arten von Munddrüsen, der sog. »Leber« und des sog. »Pankreas« kaum unterrichtet. Allein Falloise (1905/06) hat über den Fermentgehalt der einzelnen Organe Versuche ausgeführt. Danach liefern die hinteren Speicheldrüsen (Giftdrüsen) eine schwach wirkende Protease (Fibrin, Gelatine), die »Leber« eine Protease (Fibrin, Gelatine und Pepton leicht gelöst, gekochtes Eiereiweiß nicht), eine Lipase (die Butterfett, aber nicht Olivenöl angreift), eine Amylase (Rohrzucker negativ) und das »Pankreas« nur eine Amylase. Über meine Befunde mit den »Leber«-Fermenten habe ich berichtet. Von den übrigen Organen habe ich bisher nur Preßsäfte der hinteren Speicheldrüsen geprüft und die Angaben des belgischen Autors bestätigen können: keine Spaltung von Rizinusöl, wohl aber gute Wirkung auf Pepton. Die Untersuchung der Acetonpulver aller Organe soll demnächst erfolgen.

Einige Beobachtungen über die »Lebensdauer« der Fermente konnten gleichfalls gemacht werden. Wir hatten in Neapel einen Teil der zentrifugierten Verdauungssäfte in Glasröhrchen mit etwas Thymol eingeschmolzen, um sie im Berliner Institut untersuchen zu können. In den Röhrchen hatten sich mit der Zeit z. T. dicke Niederschläge gebildet (Eiweiß?). Eine Versuchsreihe mit *Ciona*-Saft lieferte für die Eiweißfermente (Pepton, $p_h = 6.8$; Leucylglycylglycin, $p_h = 7.3$; Alanylglycin, $p_h = 7.8$) völlig negative Ergebnisse. Das gleiche wurde auch bei Verwendung von *Aplysia*-Saft festgestellt; aber dieser erwies sich für Methylbutyrat noch als recht kräftig wirksam: 5 ccm $^n/_2$-Azetat/Essigsäure ($^8/_1$), 1 ccm Ferment, 0.5 ccm Substrat, 24 Std., 30° : 5.29 ccm $^n/_{10}$-NaOH Mehrverbrauch. Diese Widerstandsfähigkeit der Lipase hatte auch Graetz bei Pulmonaten festgestellt: 10fach mit aqua verdünnter

Saft von *Limax maximus* zeigte nach 16 Tagen noch die gleiche Spaltwirkung auf Tributyrin und Phenylacetat (Unterschied gegenüber der Pankreaslipase der Wirbeltiere, übereinstimmend mit der Leberlipase). Noch erstaunlicher sind die folgenden Beobachtungen. Wir hatten während unserer ersten Arbeit alle Fermentreste in einem Glas unter Toluol, mit dem sie auch wiederholt geschüttelt worden waren, gesammelt. Die letzten Versuche hatten Mitte Oktober 1927 stattgefunden. Auch in diesem Sammelglas war im Laufe der Monate ein dicker Bodensatz entstanden. Nach einem Jahr, am 23. Oktober 1928, habe ich den Saft filtriert und zentrifugiert und eine Reihe Versuche mit ihm angestellt. (Er roch nicht faulig, nur sehr stark nach Toluol.) Hier die Ergebnisse:

20 ccm Kaseinlösung, 1 ccm Ferment; $p_h = 6.6$; $19^1/_2$ Std., 30°; 5 ccm Probe: 0.95 ccm $^n/_{10}$-NaOH Mehrverbrauch.

5 ccm $^n/_2$-Acetat/Essigsäure ($^8/_1$), 0.2 ccm Methylbutyrat, 1 ccm Ferment; 3.75 ccm $^n/_{10}$-NaOH Mehrverbrauch.

Alanylglycin: Nullwert (0.02 ccm $^n/_{10}$-NaOH). Der Rest des Saftes trocknete ein. Ende März 1929 löste ich ihn mit 15 ccm aqua und ließ ihn bis zum 8. April 1929 unter Toluol stehen:

10 ccm Pepton (4prozentig), Phosphatpuffer, 1 ccm Ferment; $p_h = 6.8$; $23^1/_2$ Std., 30°; 3 ccm Probe: 0.36 ccm $^n/_{10}$-NaOH Mehrverbrauch.

Die Versuche mit Tri- und Dipeptid fielen erwartungsgemäß negativ aus. Es wurde leider versäumt auf Lipase zu prüfen.

Nach dem Verhalten der Fermente in den zugeschmolzenen Röhrchen könnte man vielleicht annehmen, daß die Lipase an einen anderen Komplex gebunden ist als die Eiweißfermente, und daß die letzteren mit dem Niederschlag (durch Thymol oder aus dem Glas gelöstes Alkali) zu Boden gerissen sind.

Die Untersuchungen wurden ermöglicht durch eine Unterstützung der Preußischen Akademie der Wissenschaften und der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft. Ihnen beiden gebührt mein ergebenster Dank. Die Untersuchungen im Berliner zoologischen Institut wurden mit Apparaten ausgeführt, die mir von der Notgemeinschaft schon seit längerer Zeit zur Verfügung gestellt worden sind. Hr. Privatdozent Dr. W. Grassmann-München ließ für mich die erforderlichen synthetischen Peptide herstellen. Hr. Dr. E. Graetz half mir bei den Arbeiten in Neapel. Das Preußische Ministerium für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung stellte mir einen Arbeitsplatz an der Station zur Verfügung. Den Herren der Zoologischen Station, insbesondere Hrn. Prof. Dr. Dohrn, Hrn. Prof. Dr. Sereni, Hrn. Prof. Dr. Gross danke ich für ihre freundliche Hilfe.

Literaturverzeichnis.

(Ältere Arbeiten s. P. Krüger 1928.)

Beutler, R., Die Wasserstoffionenkonzentration im Magen der Hydra. (Zs. vgl. Physiol. **6**, 473, 1927.)

Bretschneider, L. H. und Hirsch, G. Ch., Nahrungsaufnahme, intraplasmatische Verdauung und Ausscheidung bei Balantidium giganteum. (Ibid. 598.)

Crozier, The amount of bottom material ingested by Stichopus. (Journ. exp. Zool. **26**, 379, 1918.)
Evenius, J., Die Fermente im Darmkanal der Honigbiene. (Arch. Bienenkde. 7, 229.)
Faust, O., Karrer, P. und Schubert, P., Polysaccharide XXXVIII. Beitrag zur Kenntnis des Verhaltens von Viskoseseiden zu Schneckencellulase. (Helv. Chim. Acta XI, 1928.)
Gottschalk, A., Weitere Untersuchungen über Hefeamylase. (Zs. physiol. Chemie. **178**, 1928.)
Grassmann, W., Über die proteolytischen Enzyme der Hefe. (Naturwiss. **16**, 987, 1928.)
—, Neue Methoden und Ergebnisse der Enzymforschung. (Ergebn. Physiol. **27**, 407, 1928.)
—, Untersuchungen über die Spezifität proteolytischer Pflanzenenzyme. (München 1928.)
Graetz, E., Über einige Verdauungsfermente im Kropfsafte einheimischer Pulmonaten. (Zs. physiol. Chemie. **180**, 305, 1929.)
—, Über einige Verdauungsfermente im Kropfsafte einheimischer Pulmonaten. (Zool. Jahrb. Physiol. **46**, 375, 1929.)
Hartington, Ch. R., The physiology of the ship-worm (Teredo norvegica). (Biochem. J. **15**, 736, 1921.)
Heymans, I. A., Über Enzyme in den Austern. (XII. Nederl. Natururk. en Geneesk. Congr. te Groningen. 1911. 215.)
Hirsch, G. Ch., Probleme der intraplasmatischen Verdauung. Ihre Beziehungen zur Resorption, Diffusion, Nahrungsaufnahme, Darmbau und Nahrungswahl bei den Metazoen. (Zs. vgl. Physiol. **3**, 183, 1926.)
—, Der Weg des resorbierten Eisens und des phagozytierten Carmins bei Murex trunculus. (Ibid. **2**, 1, 1925.)
— und Jacobs, W., Der Arbeitsrhythmus der Mitteldarmdrüse von Astacus leptodactylus. I. Teil. Methodik und Technik. Der Beweis der Periodizität. (Zs. vgl. Physiol. **8**, 102, 1928.)
Howland, R. B., The p_h of gastric vacuoles. (Protoplasma. **5**, 127, 1928.)
Jameson, A. P. and Atkins, W. R. G., On the physiology of silkworms. (Biochem. J. **15**, 209, 1921.)
Janoušek, St., (Lipase bei Weichtieren.) (Biol. Listy. **11**, 442, 1926. — Ber. wiss. Biol. **1**, 1926.)
Karrer, P. und Schubert, P., Polysaccharide. XXXVII. Über das Verhalten verschiedener Cellulosen gegen Schneckencellulase. (Helv. Chim. Acta. XI, 229, 1928.)
Krijgsmann, B. I., Arbeitsrhythmus der Verdauungsdrüsen bei Helix pomatia. II. Teil. Sekretion, Resorption und Phagozytose. (Zs. vgl. Physiol. **8**, 187, 1928.)
Krüger, P. und Graetz, E., Die Fermente des Flußkrebs-Magensaftes. Ein Beitrag zur Chemie der Verdauungsvorgänge bei Wirbellosen. (Zool. Jahrb. Physiol. **45**, 463, 1928.)
Mouchet, S., Contribution à l'étude de la digestion chez les Gnathiidae. (Bull. Soc. Zool. France. **53**, 442, 1928.)
Murachi, Ryo., Über die desaminierten Polypeptide. 1. Mitteilung. Über die Wirkung des Erepsins auf die desaminierten Polypeptide. 2. Mitteilung. Über die Wirkung des Hefepreßsaftes auf die desaminierten Polypeptide. (Acta Scholae Med. Kioto. IX, 1927.)
Oppenheimer, C., Die Fermente und ihre Wirkungen. 5. Aufl., Bd. III. Die Methodik der Fermente. Leipzig 1928/29.
Patanè, L., Sui fermenti digerenti presenti nella cosidetta ghiandola pancreatica di Balanus perforatus (Brug.). (Arch. Sci. biol. **11**, 77, 1928.)
Potts, F. A., The structure and function of the liver of Teredo, the Shipworm. (Proc. Cambridge Phil. Soc. **I**, 1, 1923.)
Rona, P. und Itelsohn-Schechter, R., Weitere Beiträge zur stereochemischen Spezifität der Lipase. (Biochem. Zs. **197**, 482, 1928.)
—, Über die Spaltung des Milchsäureäthylesters durch Leberesterase. (Ibid. **203**, 293, 1928).
Sawano, Eishiro, On the digestive enzymes of Caudina chilensis (J. Müller). (Science Rep. Tohoku Imp. Univ. 4. Ser. Biol. Sendai Japan. III, 205, 1928.)
Shinoda, O., Über die eiweißlösenden Enzyme im Magensaft von Astacus. (Zs. vgl. Physiol. **7**, 323, 1928.)
Stober, W. K., Ernährungsphysiologische Untersuchungen an Lepidopteren. (Ibid. **6**, 530, 1927.)
Swingle, Digestive enzymes of an insect (Blatta orientalis). (Ohio J. Sci. **25**, 209, 1925.)
Vonk, H. J., Untersuchungen über die Verdauungsenzyme von Astacus fluviatilis und Testudo graeca. (Tijdschr. Ned. Dierkde. Vereen. 3. Ser. 1928.)
Waldschmidt-Leitz, E., Schäffner, A., Schlatter, H. und Klein, W., Zur Spezifität von Pankreas-Trypsin und Darm-Erepsin. (12. Mitt. Spezifität tierischer Proteasen.) (Ber. D. Chem. Ges. **61**, 299, 1928.)
Waldschmidt-Leitz, E. und Klein, W., Über Spezifität und Wirkungsweise von Erepsin, Trypsin und Trypsin-Kinase. (13. Mitt.) (Ibid. 640.)
Waldschmidt-Leitz, E., Klein, W. und Schäffner, A., Über die strukturellen Voraussetzungen der spezifischen Spaltbarkeit proteolytischer Substrate: Zur Spezifität von Trypsin, Trypsin-Kinase und Darm-Erepsin. (14. Mitt.) (Ibid. 2092.)

Waldschmidt-Leitz, E., Balls, A. K. und Graser, J. W., Über Dipeptidase und Polypeptidase aus Darmschleimhaut (16. Mitt.) (Ibid. **62**, 956, 1929.)
Weber, H. H. und Ammon, R., Die stereochemische Spezifität von Leber- und Pankreaslipase. (Biochem. Zs. **204**, 197, 1929.)
Weidenhagen, R., Zur Frage der enzymatischen Rohrzuckerspaltung. (Naturwiss. **16**, 657, 1928.)
Wiersma, C. A. G. und Veen, R. van der, Die Kohlehydratverdauung bei Astacus fluviatilis. (Zs. vgl. Physiol. **7**, 269, 1928.)
Wigglesworth, V. B., Digestion in the Cockroach. (Biochem. Journ. XXI. 791, 1927, XXII. 150, 1928.)
Willstätter, R., Kuhn, R., Lind, O. und Memmen, F., Über Hemmung der Leberesterase durch Ketokarbonsäureester. (Zs. physiol. Chemie. **167**, 303, 1927.)
Willstätter, R., Kuhn, R. und Bamann, E., Über asymmetrische Ester-Hydrolyse durch Enzyme (1. Mitt.). (Ber. D. Chem. Ges. **61**, 886, 1928.)
Willstätter, R. und Bamann, E., Über die Proteasen der Magenschleimhaut. Erste Abhandlung über die Enzyme der Leukocyten. (Ibid. **180**, 127, 1929.)
Yonge, C. M., The digestive diverticula in the Lamellibranchs. (Trans. Roy. Soc. Edinburgh. **54**, III. 703, 1926.)
—, The absence of a cellulase in Limnoria. (Nature. **119**, 855, 1927.)
—, Structure and function of the organs of feeding and digestion in the Septibranchs Cuspidaria and Poromya. (Trans. Roy. Soc. London. Ser. B. **216**, 221, 1928.)

Über ganze transzendente Funktionen von einem besonderen Typus.

(Beispiel einer allgemeinen Konstruktionsmethode.)

Von Harald Bohr
in Kopenhagen.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 24. Oktober 1929 [s. oben S. 508].)

Bei einer Untersuchung über analytische fastperiodische Funktionen, bei welcher es sich darum handelte, die Existenz regulärer fastperiodischer Funktionen mit gewissen besonderen Eigenschaften nachzuweisen, wurde ich auf eine Konstruktionsmethode derartiger Funktionen geführt, die, allgemein gesprochen, darin besteht, daß zunächst meromorphe Funktionen (statt reguläre Funktionen) gebildet wurden und dann nachher die künstlich eingeführten Pole durch ein bekanntes von Runge erdachtes Verfahren einer »Polverschiebung« und einen danach folgenden Grenzübergang wieder weggeschafft wurden. Aber auch außerhalb der Theorie der fastperiodischen Funktionen läßt sich diese Methode zur Behandlung verschiedener Probleme erfolgreich verwenden. In den folgenden Zeilen soll sie an einem möglichst einfachen Beispiel, nämlich der Konstruktion ganzer transzendenter Funktionen vom Typus der Mittag-Lefflerschen E-Funktion, aber mit noch ausgeprägteren Eigenschaften, erörtert werden. Dadurch findet eine von Borel (Intermédiaire des mathématiciens, April 1899) herrührende Fragestellung ihre endgültige Antwort.

Die von Runge nachgewiesene Möglichkeit einer Polverschiebung haben wir nur in dem folgenden prinzipiell einfachsten Falle zu benutzen:

Es sei G eine beliebige offene Punktmenge der komplexen z-Ebene, und es seien z^* und z^{**} zwei beliebige Punkte von G, die durch eine ganz in G verlaufende stetige Kurve k miteinander verbunden werden können. Ferner sei $P^*(x)$ ein beliebiges Polynom, das wir ohne konstantes Glied annehmen wollen. Dann gibt es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P^{**}(x)$, ebenfalls ohne konstantes Glied, so daß die Ungleichung

$$\left| P^{**}\left(\frac{1}{z - z^{**}}\right) - P^{*}\left(\frac{1}{z - z^{*}}\right) \right| < \varepsilon$$

in der ganzen zu G komplementären Menge Γ besteht, d. h. in allen Punkten z, die nicht zu G gehören[1].

Und nun zur Betrachtung ganzer transzendenter Funktionen. Es sei $F(z)$ eine beliebige solche Funktion, die nur keine Konstante ist; dann gibt es bekanntlich (vgl. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, S. 272) stetige ins Unendliche laufende Kurven K, so daß $|F(z)|$ längs diesen Kurven gegen Unendlich strebt. Es erweckte seinerseits ein gewisses Aufsehen, als Mittag-Leffler demgegenüber die Existenz einer ganzen Transzendenten nachwies, die auf allen Geraden gegen den Wert Null strebte. Später hat Grandjot (Math. Ann. Bd. 91, S. 316) durch Weiterführung der Mittag-Lefflerschen Konstruktionsmethode die Existenz einer ganzen Transzendenten bewiesen, die sogar auf allen ins Unendliche gehenden algebraischen Kurvenästen gegen Null strebt. Grandjot konnte nämlich eine Transzendente $F(z) = F(x+iy)$ angeben, die in der ganzen z-Ebene außerhalb eines Streifens

$$\frac{k_1 x}{\log x} < y < \frac{k_2 x}{\log x}$$

um die transzendente Kurve $y = \dfrac{x}{\log x}$ gleichmäßig gegen Null strebte, und es ist klar, daß jede algebraische Kurve, die ins Unendliche geht, von einem

[1] Der ebenso einfache wie elegante Beweis von Runge verläuft folgendermaßen (vgl. etwa Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, S. 294). Es sei d eine positive Zahl, die kleiner ist als der Abstand der Kurve k vom Rande des Gebietes G, und es seien die Punkte $z_0 = z^*, z_1, \cdots, z_{N-1}, z_N = z^{**}$ auf der Kurve k so gewählt, daß der Abstand je zweier aufeinander folgenden Punkte kleiner als d ist. Die Verschiebung des Poles von z^* nach z^{**} wird in N Schritten ausgeführt, indem nacheinander Polynome ohne konstantes Glied $Q_0(x) = P^*(x), Q_1(x), \cdots, Q_{N-1}(x), Q_N(x) = P^{**}(x)$ so bestimmt werden, daß für jedes $1 \leqq n \leqq N$ die Ungleichung

$$\left| Q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_{n-1}\left(\frac{1}{z-z_{n-1}}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{N}$$

im Gebiete Γ besteht. Es genügt offenbar, den ersten Schritt, d. h. den Übergang von z_0 zu z_1, auszuführen. Um den Punkt z_1 wird der Kreis $|z - z_1| = d$ geschlagen. Da der Punkt z_0 im Innern dieses Kreises gelegen ist, so ist die Funktion $Q_0\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ regulär in allen Punkten außerhalb dieses Kreises, auch im Punkte $z = \infty$, wo sie den Wert 0 hat. Für $|z - z_1| > d$ läßt sich also die Funktion $Q_0\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ in eine Potenzreihe in $\frac{1}{z-z_1}$ (ohne konstantes Glied) entwickeln, etwa

$$Q_0\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{(z-z_1)^\nu}.$$

Diese Potenzreihe konvergiert gleichmäßig im Gebiete Γ, weil dieses Gebiet ganz außerhalb des Kreises $|z - z_1| = d$ gelegen ist; wir können daher ein M so bestimmen, daß im ganzen Gebiete Γ

$$\left| Q_0\left(\frac{1}{z-z_0}\right) - \sum_{\nu=1}^{M} \frac{c_\nu}{(z-z_1)^\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{N}$$

ist, und das Polynom $Q_1(x) = \sum_{\nu=1}^{M} c_\nu x^\nu$ ist somit von der gewünschten Art.

gewissen Punkte an ganz außerhalb des genannten Streifens verläuft. Ich werde nun im folgenden zeigen, wie man durch die oben erwähnte Methode, d. h. indem man von einer meromorphen Funktion ausgeht und dann mit Hilfe des Rungeschen Verfahrens die Pole wieder wegräumt, in äußerst einfacher Weise zu ganzen Transzendenten gelangen kann, welche im obigen Sinne ein prinzipiell ausgeprägtestes Benehmen aufweisen.

Satz. *Es sei eine beliebige stetige ins Unendliche laufende Kurve K in der komplexen Ebene gegeben, etwa durch $z = z(t)$ $(0 \leqq t < \infty)$, wo $z(t)$ eine für $0 \leqq t < \infty$ stetige Funktion mit $|z(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$ bedeutet. Ferner sei eine (beliebig enge) Umgebung G von K gegeben, d. h. eine beliebige offene Punktmenge, welche K enthält. Dann gibt es eine, nicht identisch verschwindende, ganze Transzendente $F(z)$, die gleichmäßig gegen Null strebt, wenn z innerhalb der zu G komplementären Menge Γ ins Unendliche geht*; d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$, so daß die Ungleichung

$$|F(z)| < \varepsilon$$

in jedem Punkt z mit $|z| > \rho$ gilt, welcher außerhalb der Menge G gelegen ist.

Beweis. Wir wählen eine beliebige Zahlenfolge $0 < t_1 < t_2 \cdots$ $(t_n \to \infty)$ derart, daß bei jedem $n = 1, 2, \cdots$ die Ungleichung

$$|z(t)| > n \qquad \text{für } t \geqq t_n$$

besteht, und bezeichnen den auf der Kurve K gelegenen Punkt $z(t_n)$ mit z_n. Ferner bezeichne G_n die offene Menge, welche aus allen Punkten aus G besteht, die außerhalb des Kreises $|z| = n$ liegen, und es bezeichne Γ_n die Komplementärmenge von G_n. Die Kreisscheibe $|z| \leqq n$ gehört also ganz zu Γ_n, und die beiden Punkte z_n und z_{n+1} liegen in G_n und lassen sich durch eine stetige ganz in G_n verlaufende Kurve (nämlich das Kurvenstück $z = z(t)$, $t_n \leqq t \leqq t_{n+1}$) verbinden.

Mit $P_1(x), P_2(x), \cdots, P_n(x), \cdots$ soll eine Folge von Polynomen ohne konstantes Glied bezeichnet werden, die durch das folgende sukzessive Verfahren bestimmt werden. Wir gehen von dem einfachsten solchen Polynom, etwa $P_1(x) = x$, aus und bilden die Funktion

$$P_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right) = \frac{1}{z - z_1}.$$

Es sei z_0 ein beliebig gewählter Punkt von Γ, d. h. außerhalb G; wir bezeichnen die Zahl $\left|P_1\left(\frac{1}{z_0 - z_1}\right)\right| = \left|\frac{1}{z_0 - z_1}\right| > 0$ mit α und bestimmen eine Folge positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$, so daß $\sum \varepsilon_n < \frac{\alpha}{2}$ ist. Nach dem Rungeschen Verfahren bestimmen wir das Polynom $P_2(x)$ so, daß die Ungleichung

$$\left|P_2\left(\frac{1}{z - z_2}\right) - P_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right)\right| < \varepsilon_1$$

im ganzen Gebiete Γ_1 besteht. Danach bestimmen wir $P_3(x)$ so, daß in Γ_2

$$\left| P_3\left(\frac{1}{z-z_3}\right) - P_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right)\right| < \varepsilon_2$$

ausfällt. Und allgemein bestimmen wir $P_{n+1}(x)$ derart, daß die Ungleichung

$$\left| P_{n+1}\left(\frac{1}{z-z_{n+1}}\right) - P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\right| < \varepsilon_n$$

in allen Punkten von Γ_n gilt.

Ich behaupte, daß der Grenzwert

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$$

für alle z existiert und eine ganze Transzendente der gewünschten Art liefert. Bei diesem Nachweis wird es bequem sein, die Funktion $F(z)$ statt als Grenzwert einer Folge lieber als Summe einer Reihe

$$(1)\qquad F(z) = P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{P_{n+1}\left(\frac{1}{z-z_{n+1}}\right) - P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\right\}$$

zu bestimmen.

1. Zunächst existiert $F(z)$ und ist eine ganze Transzendente. Denn bei festem (beliebig großem) ganzzahligem N liegen die Punkte $z_n (n \geqq N)$ außerhalb des Kreises $|z| = N$, so daß die Funktionen $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)(n \geqq N)$ für $|z| < N$ alle regulär sind. Schreiben wir nun die Reihe (1) in der Form

$$(2)\qquad F(z) = P_N\left(\frac{1}{z-z_N}\right) + \sum_{n=N}^{\infty}\left\{P_{n+1}\left(\frac{1}{z-z_{n+1}}\right) - P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\right\},$$

so ist jedes Glied regulär für $|z| < N$, und die Reihe konvergiert daselbst gleichmäßig, weil die Kreisscheibe $|z| < N$ in jedem Γ_n mit $n \geqq N$ gelegen ist und daher für jedes $n \geqq N$ die Ungleichung

$$\left| P_{n+1}\left(\frac{1}{z-z_{n+1}}\right) - P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\right| < \varepsilon_n$$

in $|z| < N$ besteht.

2. Die Funktion $F(z)$ strebt gleichmäßig gegen Null, wenn z innerhalb Γ gegen Unendlich strebt. Zu einem gegebenen ε können wir nämlich ein N so wählen, daß $\sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Dann folgt aus (2) für jedes z in Γ_N, also a fortiori für jedes z in Γ, die Ungleichung

$$|F(z)| \leqq \left| P_N\left(\frac{1}{z-z_N}\right)\right| + \sum_{n=N}^{\infty}\varepsilon_n < \left| P_N\left(\frac{1}{z-z_N}\right)\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun strebt aber die Funktion $P_N\left(\frac{1}{z-z_N}\right)$ gleichmäßig gegen Null, wenn z (in der ganzen Ebene) über alle Grenzen wächst, und wir können somit ein

$\rho > 0$ so groß wählen, daß die Ungleichung $\left| P_N\left(\frac{1}{z - z_N}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle z außerhalb des Kreises $|z| = \rho$ besteht. Also gilt die Ungleichung

$$|F(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle z, die sowohl zu Γ gehören als auch numerisch größer als ρ sind.

3. Schließlich ist $F(z)$ nicht identisch Null. Denn in dem anfangs gewählten Punkte $z = z_0$, welcher in Γ und also a fortiori in allen Γ_n liegt, gilt ja nach (1) die Ungleichung

$$|F(z_0)| \geqq \left| P_1\left(\frac{1}{z_0 - z_1}\right)\right| - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n > \alpha - \frac{\alpha}{2} > 0 .$$

Nachtrag.

Angeregt durch eine Frage von Hrn. Bieberbach erlaube ich mir, zur Orientierung einige Bemerkungen allgemeiner Art hinzuzufügen.

1. Wenn ich den oben bewiesenen Satz als den bestmöglichen seiner Art bezeichnet habe, ist dies in dem genauen Sinne gemeint, daß er sofort zur vollständigen Beantwortung der folgenden allgemeinen Frage führt:

Wie muß eine Punktmenge D der komplexen Ebene beschaffen sein, damit es zu ihr eine (nicht identisch verschwindende) ganze Transzendente $F(z)$ gibt, welche in der zu D komplementären Menge Δ gleichmäßig für $z \to \infty$ gegen Null strebt?

Indem wir zur Abkürzung von einer offenen Punktmenge G der komplexen Ebene sagen, daß sie ein Streifen ist, wenn es eine stetige ins Unendliche gehende Kurve K gibt (und dann von selbst unendlich viele solche Kurven), von welcher G eine Umgebung ist, lautet die Antwort:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß D von der gewünschten Art ist, besteht darin, daß es einen Streifen G gibt, welcher ganz in D enthalten ist.

Nach unserem Satze ist diese Bedingung nämlich hinreichend, und daß sie notwendig ist, liegt auf der Hand; denn falls D eine Punktmenge der gewünschten Art ist und $F(z)$ eine im obigen Sinne zu ihr gehörige Funktion, wird ja $|F(z)|$ in der zu D komplementären Menge Δ beschränkt sein, etwa mit der oberen Grenze c, so daß alle Punkte z mit $|F(z)| > c$ zu D gehören müssen; die (offene) Menge aller dieser letzteren Punkte z bildet aber gerade einen Streifen G, weil sie gewiß eine ins Unendliche gehende stetige Kurve K enthält (nämlich sogar jede Kurve K, auf welcher $|F(z)|$ durchweg größer als c ist).

2. Aber auch die folgende anscheinend weitergehende Frage, wo nicht wie in 1. von einer Punktmenge, sondern von mehreren (endlich oder unendlich vielen) Punktmengen D_i die Rede ist, kann sofort durch unseren Satz erledigt werden.

Was ist die notwendige und hinreichende Bedingung, welche eine Gesamtheit von Punktmengen D_i erfüllen muß, damit es zu ihr eine ganze Transzendente $F(z)$ derart gibt, daß für jede der gegebenen Punktmengen D_i die Funktion $F(z)$ in der zu D_i komplementären Menge Δ_i gleichmäßig für $z \to \infty$ gegen Null strebt?

Falls die Anzahl der vorgelegten Punktmengen D_i eine endliche ist, fällt unsere Frage inhaltlich mit der unter 1. erledigten zusammen. Denn die Aussage, daß eine Funktion $F(z)$ in jeder der endlich vielen Komplementärmengen Δ_i gleichmäßig gegen Null strebt, ist ja damit gleichbedeutend, daß $F(z)$ in der Summe der Komplementärmengen Δ_i, d. h. in der Komplementärmenge Δ des Durchschnittes D der Mengen D_i, gleichmäßig gegen Null strebt, und die Antwort auf unsere Frage lautet also einfach, daß es einen Streifen G geben soll, welcher in den sämtlichen Punktmengen D_i enthalten ist.

Auch in dem Falle aber, wo die Anzahl der gegebenen Mengen D_i eine (abzählbar oder überabzählbar) unendliche ist, lautet die Antwort fast ebenso, nur muß man mit ihrer Formulierung etwas vorsichtiger sein:

Es soll einen festen Streifen G geben, von welchem in dem Sinne gesagt werden kann, daß sein »unendlich ferner Teil« in allen Punktmengen D_i enthalten ist, daß es zu jeder Menge D_i eine positive Zahl ρ_i so gibt, daß der Durchschnitt von G und $|z| > \rho_i$ ganz in D_i liegt[1].

Daß diese Bedingung hinreichend ist, ist wiederum eine unmittelbare Folge unseres Satzes (wir brauchen ja nur zu dem festen Streifen G eine Funktion $F(z)$ im Sinne dieses Satzes zu bestimmen). Sie ist aber auch notwendig. Wenn nämlich eine Gesamtheit von Mengen D_i von der gewünschten Art vorgelegt ist und $F(z)$ eine zu ihr gehörige Funktion bezeichnet, so können wir zunächst eine ins Unendliche gehende Kurve K bestimmen, längs welcher $|F(z)| \to \infty$, und danach (aus Stetigkeitsgründen) eine Umgebung G von K so eng wählen, daß die Relation $|F(z)| \to \infty$ gleichmäßig besteht, wenn z innerhalb G ins Unendliche geht. Dann muß aber der »unendlich ferne« Teil dieses Streifens G in jeder der Punktmengen D_i enthalten sein; denn falls c_i die (endliche) obere Grenze von $|F(z)|$ in der zu D_i komplementären Menge Δ_i bezeichnet und ρ_i so groß gewählt wird, daß für alle zu G gehörigen Punkte z mit $|z| > \rho_i$ die Ungleichung $|F(z)| > c_i$ besteht, muß ja der Durchschnitt von G und $|z| > \rho_i$ ganz in D_i liegen.

3. Als einfache Beispiele zur Erläuterung der Bemerkung 2 erwähnen wir:

I. Es sei K eine beliebige ins Unendliche gehende stetige Kurve, und es seien $D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots$ *abzählbar viele (beliebig gewählte) Umgebungen von K.* Dann *gibt* es eine Transzendente $F(z)$, die bei jedem n in der zu D_n komplementären Menge Δ_n gleichmäßig gegen Null strebt. In der Tat ergibt sich sofort durch eine einfache topologische Überlegung, daß die Gesamtheit dieser Mengen D_i der obigen Bedingung genügt. Wir können nämlich annehmen, daß bei jedem n die Menge D_{n+1} in der Menge D_n enthalten ist (sonst ersetze man nur für jedes n die Menge D_n durch den Durchschnitt der n ersten Mengen $D_1, D_2 \cdots D_n$);

[1] Hieraus folgt natürlich nicht, daß der Durchschnitt aller Mengen D_i einen Streifen enthält; der Durchschnitt kann sogar leer sein.

bezeichnet dann E_n den Durchschnitt von D_n etwa mit dem Kreisringe $n-1<|z|<n+1$, wird die offene Menge $G=E_1+E_2+\cdots+E_n+\cdots$, welche die ganze Kurve K enthält, offenbar ein Streifen G von der verlangten Art sein, weil der Durchschnitt von G und $|z|>n$ ja ganz in D_n liegt.

II. Dagegen gibt es *keine* Transzendente $F(z)$, die in der Komplementärmenge *jeder festen Umgebung D_i einer ins Unendliche gehenden Kurve K* gleichmäßig gegen Null strebt (abgesehen natürlich von dem uninteressanten Fall, wo K von der Art einer Peanokurve ist, in dem Sinne, daß die Punktmenge, welche aus der Kurve allein gebildet wird, einen Streifen enthält). Denn wie auch ein fester Streifen G gegeben wird, kann man immer eine solche Umgebung D_i unserer Kurve K bestimmen, daß der Durchschnitt von G und $|z|>\rho$ bei keinem noch so großem ρ ganz in D_i liegt. Wir brauchen ja nur innerhalb G eine Folge von Punkten z_n mit $z_n\to\infty$ zu wählen, welche nicht auf K gelegen sind, und danach (was aus Stetigkeitsgründen möglich ist) kleine abgeschlossene Kreisscheiben $|z-z_n|\leq\delta_n(<1)$ so zu bestimmen, daß diese ebenfalls in G liegen und mit K keinen gemeinsamen Punkt haben; die Komplementärmenge der Summe aller dieser Kreisscheiben wird ja alsdann eine Umgebung D_i von K von der gewünschten Art sein.

Ausgegeben am 25. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XXVII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Library of Congress
MAY 3 1929
Smithsonian Depository

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 7. November. (S. 573)
C. Wirtz: Experimentelles zur Photometrie des Rotationsellipsoids. (S. 574)
E. Ullrich: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. (Mitteilung vom 24. Oktober.) (S. 592)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XXVII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 7. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Joh. Stumpf berichtete über Dampfinjektoren im allgegemeinen und über die von ihm entworfene umstellbare Injektorbauart im besonderen, welche einen Einstellbereich von 1:4,5 ergeben hat. (Ersch. später.)

2. Hr. Ludendorff legte eine Arbeit des Hrn. Prof. C. Wirtz in Kiel, »Experimentelles zur Photometrie des Rotationsellipsoids«, vor. Wirtz hatte früher aus Beobachtungen des Uranus auf einen langperiodischen Lichtwechsel dieses Planeten geschlossen und vermutet, daß dieser Lichtwechsel eine Folge der Abplattung des Planeten sei. Photometrische Messungen im Laboratorium an kleinen Rotationsellipsoiden aus mattiertem Silber und aus Kreide bestätigen diese Vermutung. Sie ergeben außerdem interessante Folgerungen über die Photometrie zerstreut reflektierender Körper und neue Gesichtspunkte für die weitere experimentelle Behandlung dieses Problems.

Experimentelles zur Photometrie des Rotationsellipsoids.

Von Prof. Dr. C. Wirtz
in Kiel.

(Vorgelegt von Hrn. Ludendorff.)

1. Ziel der Untersuchung. — **2.** Die vier künstlichen Planeten; Aufbau des Versuchs. — **3.** Einzelheiten der experimentellen Anordnung. — **4.** Ausführung der Messungen. — **5.** Reduktion und Genauigkeit. — **6.** Ergebnisse. — **7.** Die ausgeglichenen Beobachtungen. — **8.** Darstellung der Beobachtungen durch die Ausgleichkurven. — **9.** Lambertsches und Lommelsches Gesetz. — **10.** Formeln für das Rotationsellipsoid. — **11.** Die theoretischen Helligkeiten der Versuchsplaneten. — **12.** Kurvengestalt nach Lamberts und Lommels Gesetz; Einfluß der Ungenauigkeit der Dimensionen. — **13.** Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung. — **14.** Die Verschiedenheit zwischen Silber- und Kreideplaneten. Neue Aufgaben. — **15.** Die Abplattung des Planeten Uranus.

1. Die Beschäftigung mit Beobachtungen der Helligkeit des Uranus führte im schließlichen Verlauf auf die Frage nach einer Abplattung des Planeten und ihrer Erkennbarkeit aus photometrischen Messungen. Damit hat man es mit der Beleuchtung eines Rotationsellipsoids zu tun; die Theorie ist im Jahre 1887 von H. Seeliger[1] entwickelt worden. In der Anwendung auf den Fall des Uranus schienen nun einige Zweifel nachzubleiben. Zu deren Aufklärung und Beseitigung sollen die experimentellen Untersuchungen dienen, über die der vorliegende Aufsatz in der Hauptsache berichtet.

Das Ziel der Arbeit bildet die Abhängigkeit zwischen der Helligkeit und der Abplattung eines zweiachsigen Ellipsoids mit kleiner Rotationsachse. Der Gang der Helligkeit mit dem Phasenwinkel blieb einflußlos; die Beobachtungen erfolgten vielmehr alle beim Phasenwinkel $\alpha = 0°$. Der Hauptgrund für diese Beschränkung beruht darin, daß zur Variation des Phasenwinkels neue mechanische Einrichtungen getroffen werden müssen, die einen ziemlich vollständigen Umbau der bisherigen experimentellen Anordnung nach sich ziehen.

2. Nach Erwägung verschiedener Möglichkeiten, bei denen auch große Strecken auf dem Terrain der Sternwarte in Betracht gezogen worden waren,

[1] H. Seeliger, Zur Theorie der Beleuchtung der großen Planeten. Abh. d. b. Akad. d. Wiss. II. Kl. **16.** München 1887. — Es verdient erwähnt zu werden, daß schon Zöllner sich mit dem Gesetz der Phasenerleuchtung eines Ellipsoids beschäftigte, in Photometr. Untersuch. 1865, S. 43. Vgl. dazu Seeligers Kritik in Vierteljahrsschr. d. Astr. Gesellsch. **21.** 227 (1886).

erwies sich der folgende Aufbau am bequemsten, der nur einen kleinen Raum im Laboratorium beansprucht, nicht mehr als die optische Bank von 2 m Länge.

Es wurden zunächst vom Mechaniker (Firma C. Zeiß, Jena) vier Rotationsellipsoide, künstliche Planeten, hergestellt:

Dimensionen der künstlichen Planeten.

Planet	Achsen $2a$	Achsen $2b$	Abplattung p
1	10.0 mm	$6^2/_3$ mm	1 : 3
2	10.0	8.0	1 : 5
3	10.0	9.0	1 : 10
4	10.0	10.0	0

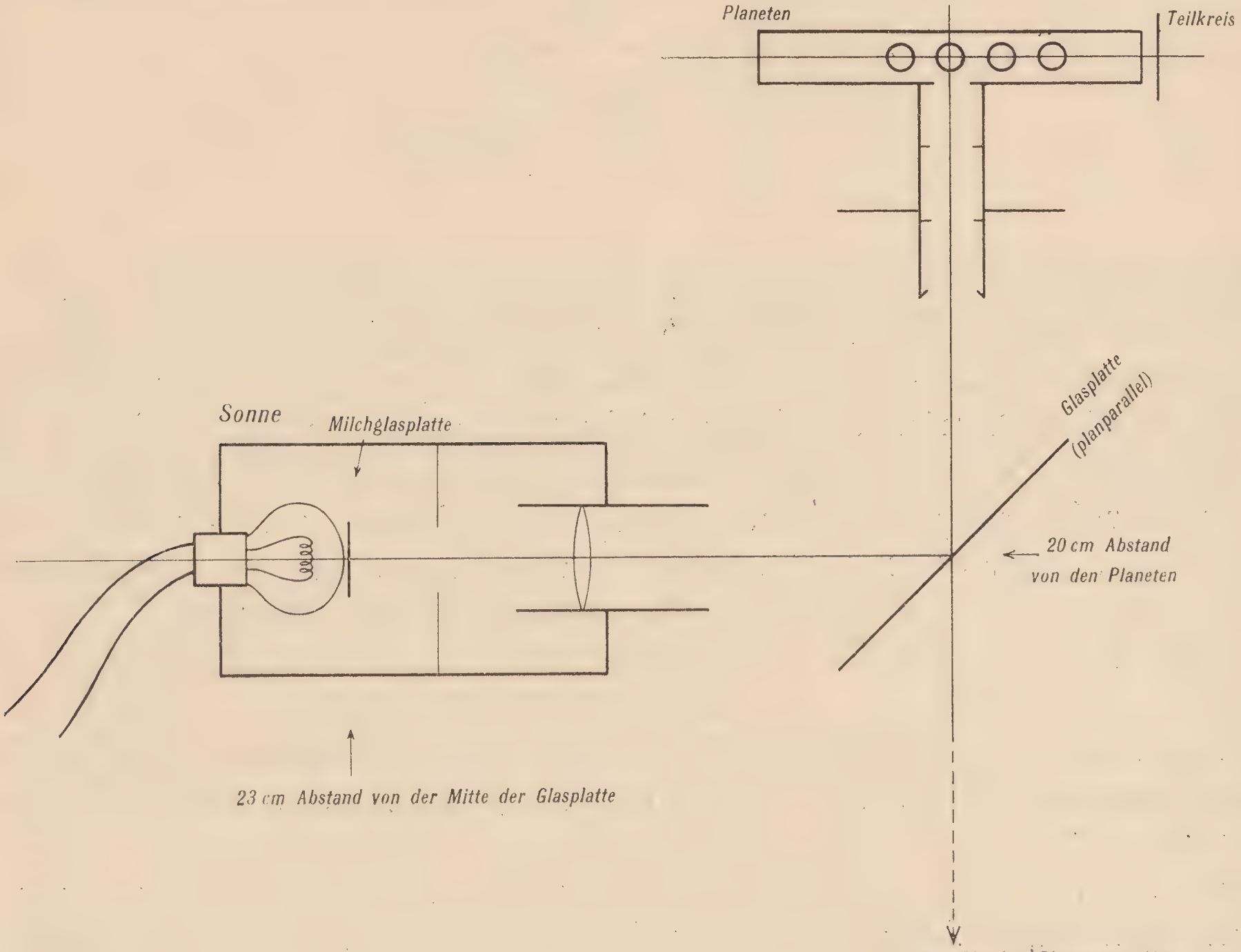
Die extremen Formen 1 und 2 kommen im Sonnensystem nicht vor. Planet 4 ist eine Kugel und zur Kontrolle der Messungen mitgenommen. Die Dimensionen sind innerhalb 0.1 mm als mathematisch korrekt verbürgt; was das in photometrischer Ungenauigkeit ausmacht, wird später zu sagen sein. Tatsächlich zeigten vorläufige Ausmessungen mit einer Mikrometerlehre, daß die Abweichungen von den aufgegebenen Maaßen 0.05 mm nicht überschreiten (vgl. Ziffer 11, 12). Es waren zwei Sätze von diesen vier künstlichen Planeten hergestellt, der eine aus Silber mit mattierter Oberfläche, der andere aus weißer Kreide. Die Kreideplaneten wurden von den »Nautischen Werkstätten« in Kiel nach den von Zeiß hergestellten Körpern kopiert, so daß sie in den Maaßen die gleiche zufällige Genauigkeit aufweisen wie die originalen Silberplaneten, eine Annahme, die eine spätere Nachmessung innerhalb 0.05 mm bestätigte.

Nun die Anordnung für die photometrischen Messungen, bei denen, wie erwähnt, von einer Veränderung des Phasenwinkels Abstand genommen und lediglich der photometrische Einfluß der ellipsoidischen Planetenfigur auf die Totalhelligkeiten studiert wurde. Als Vorbild des Strahlenganges diente jenes schöne Modell, das O. von und zu Aufsess[1] für seine »Untersuchungen über den Einfluß der Phase« beschrieben hat. Die vier Planeten kamen in einen lichtdichten Kasten, nebeneinander in passendem Abstand auf gemeinsamer Achse befestigt. Die Achse aus dünnem Draht war natürlich, gemäß dem Ziel der Versuche, durch den Äquator der Planeten geführt und die identische Orientierung der Körper so getroffen, daß man an einem äußeren Teilkreis 0° ablas, wenn die Polarachse des Planeten in die Gesichtslinie fiel, also größte Fläche (und größte Helligkeit) gesehen wurde.

3. Die Einzelheiten der Apparatur gehen hinreichend aus der Zeichnung hervor, in die auch einige Dimensionen eingetragen sind. Die durchsichtige planparallele Glasplatte von 2 mm Dicke wirft das parallele Licht der »Sonne« auf den Planeten, der in derselben Richtung, also in Phasen-

[1] O. von und zu Aufsess, Experimentelle Untersuchungen über den Einfluß der Phase und der Rotation auf die Helligkeit von Kugeln. Habil.-Schr. Techn. Hochsch. München 1910. Vgl. auch Astron. Abhandl. Nr. 17. Kiel 1910, S. 31—37.

winkel $\alpha = 0°$, beobachtet wird. In 56 cm Abstand vom Planeten befindet sich eine kurzbrennweitige Linse, der die Aufgabe zufällt, das Bild des Planeten sternartig zu verkleinern; weiter in 164 cm Abstand eine achromatische Projektionslinse mit 24 mm/180 mm; sie bildet mit dem Rosenbergschen Photometer[1] (vom Zöllner-Typus), das die Totalhelligkeiten der Planeten mißt, ein Fernrohr. Die Mitte des Photometerwürfels steht in 188 cm Abstand vom Planeten. Allenthalben, wo falsches Licht und störende Reflexe auf-



Skizze des Planetenmodells. Grundriß.

treten können, sorgen Blenden für die Beseitigung. So ist z. B. im Innern des Sonnenrohres eine verschiebbare Blende angebracht, und unmittelbar vor der Milchglasscheibe, von der das Licht der Sonne ausgeht, befindet sich eine Irisblende, so daß auch auf diese Weise Leuchtkraft und Durchmesser der Sonne reguliert werden kann.

Der Kasten, in den auf ein und derselben Achse die vier Planeten einmontiert sind, trägt in Richtung der Beobachtung eine lange, außen und innen geschwärzte Röhre, auf der noch eine große mattschwarze Scheibe sitzt. Und um auch die letzten Reflexe zu entfernen, wurde vorn in die Röhre ein Diaphragma eingedreht, konisch gestaltet mit 45° Neigung nach innen gegen die Röhrenwandung. Eine Einschnappvorrichtung bringt bei Verschiebung der langen Leitachse die einzelnen Planeten je in die richtige Stellung, in die Gesichtslinie. An dem Teilkreis stellt man dann den Winkel N ein, d. h. den

[1] H. Rosenberg, Astr. Nachr. **214**. 144 (1921).

Winkel, den der Gesichtsstrahl mit der Polarachse des Planeten bildet. Fällt die Polarachsenrichtung mit dieser Beobachtungsrichtung zusammen, so liest man am Kreis $N = 0°$ oder $180°$ ab; steht das Auge im Äquator des Planeten, so wird $N = 90°$ oder $270°$.

Auf die beschriebene Weise ist erreicht, daß die künstlichen Planeten sich als Sterne auf schwarzem Grunde im Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohrs darbieten, und daß sie völlig identisch erscheinen mit den künstlichen Vergleichsternen des Rosenbergschen Photometers. Die absolute Helligkeit der Bilder wurde so gewählt, daß auch die letzte Spur von Farbenunterschied zwischen Planet und Vergleichstern unter die bewußte Empfindungsschwelle des Auges trat. Als Stromquelle für Sonne und Photometerlampe diente zuerst der Stadtstrom, nach geeigneter Transformation durch einfache Klingeltransformatoren. Da sowohl Sonne wie Photometerstern vom selben Strom, wenn auch in verschiedener Umformung, gespeist werden, so gingen die Schwankungen des städtischen Stromes stark vermindert in die Helligkeitsmessungen ein, blieben aber, wie die Diskussion zeigt, nachweisbar in einer Vergrößerung des zufälligen Fehlers, vergrößert gegenüber den später benutzten Akkumulatoren, drei Varta-Batterien Type GO 22/4 R, die sich dann bis zum Schluß der Messungen ausgezeichnet bewährt haben.

Nicht ohne Interesse schien es, in summarischer Weise den Grad der Gleichförmigkeit des Komplexes {Helligkeitsauffassung + Lampen} nachzusehen, obwohl das für das Ergebnis der Messungen nur geringe Bedeutung hat. Zu dem Ende wurde für alle vollständigen Messungssätze der Unterschied [Letzte — Erste Einstellung für $N = 0°$] gebildet, getrennt nach der Stromquelle, Stadtstrom oder Akkumulatoren. Mit Hilfe von Verteilungstafeln findet man mühelos die folgenden mittleren Differenzen Δ und Streuungen σ:

Stadtstrom	$\Delta = -0^m.033$	$\sigma = 0^m.103$	$n = 39$
Akkumulatoren	$\Delta = -0.023$	$\sigma = 0.063$	$n = 97$

Das negative Vorzeichen heißt, daß am Schlusse schwächer gemessen wurde als am Anfang. Beide Stromquellen stimmen also in diesem Gang überein, bei beiden im Durchschnitt von geringem absoluten Ausmaße. Dagegen lehrt ein Blick auf die Werte σ, daß beim Stadtstrom die Änderung von Tag zu Tag, besser von Messungssatz zu Messungssatz, erheblich ungleichmäßiger war, stärker schwankte als bei den Akkumulatoren. In dem Verhältnis $0^m.103$ zu $0^m.063$ ist der Gewinn zu veranschlagen, den die Einführung der Akkumulatoren gegenüber dem städtischen Strom nach sich gezogen hat. Es läuft dem wahrscheinlichkeitstheoretischen Sprachgebrauch nicht zuwider, wenn man sagt, die Akkumulatoren hätten sich gut $2\,{}^1/_2$mal so gleichförmig verhalten als der Strom der Kieler Städtischen Elektrizitätswerke.

Zuerst wurden die Silber-, hernach die Kreideplaneten durchgemessen; die Kreideplaneten erschienen nach ihrer absoluten Helligkeit bei den Beobachtungen um nahe 0.5^m heller als die Silberplaneten.

4. Nach einigen Versuchen anderer Art wurde schließlich der folgende Modus der Messungen endgültig für jeden Planeten innegehalten. Die Reihe

begann mit $N = 0°$, Messung in den vier Quadranten des Intensitätskreises am Photometer, dann die nächsten Winkel N, z. B. in dieser Weise:

$$\begin{array}{l} N = 0° \rightarrow 30° \rightarrow 60° \rightarrow 90° \rightarrow 120° \rightarrow 150° \\ \qquad 180 \leftarrow 210 \leftarrow 240 \leftarrow 270 \leftarrow 300 \leftarrow 330 \quad \downarrow \quad 0°, \end{array}$$

so daß jeweils zwei um 180° verschiedene N zu gleichen Mittelzeiten gemessen waren und der Zeit proportionale Helligkeitsschwankungen irgendwelchen Ursprungs herausfielen. Diese beiden Helligkeitsmessungen mit gleichem N, aber für entgegengesetzte Oberflächenhälften der Planeten, wurden sofort vereinigt. Am Schluß erfolgte isoliert wieder eine Messung bei $N = 0°$, aus der in Verbindung mit der Anfangsmessung ein Urteil über die Konstanz gewonnen werden kann. Für die Reduktion kam diese Einstellung zumeist nicht in Betracht; nur für die ersten, noch nicht symmetrisch angelegten Messungen wurde mit ihrer Hilfe die Änderung des Lichtes abgeleitet, um auf konstante Helligkeit übergehen zu können.

In einem andern Satz wurde dann eingestellt:

$$\begin{array}{l} N = 0° \rightarrow 40° \rightarrow 80° \rightarrow 90° \rightarrow 100° \rightarrow 140° \\ \qquad 180 \leftarrow 220 \leftarrow 260 \leftarrow 270 \leftarrow 280 \leftarrow 320 \quad \downarrow \quad 0° \end{array}$$

usf. weitere Sätze, bis alle Winkel N von 10° zu 10° mit einer genügenden Anzahl Messungen besetzt waren. In jedem Satz erscheint $N = 90°/270°$, so daß dieser für Theorie und Beobachtung wichtige Punkt der Kurve besonders oft vorkommt. Auch in umgekehrter Richtung schritten die Messungen fort, aber stets begannen und schlossen die Messungsreihen natürlich mit $N = 0°$. Jeder vollständige Beobachtungssatz eines Planeten umfaßt 13 Werte des Winkels N, auf jeden Winkel N entfallen 4 Einstellungen am Photometerkreis. Die Dauer einer Reihe betrug etwa 25 Minuten, so daß eine Überanstrengung des Auges nicht eintrat. In besonderen kurzen Reihen wurden nur die Punkte 90° gemessen, in der Folge 0°, 90°, 270°, 180°; also wiederum eine Häufung der Beobachtungen auf diese Winkel.

5. Die Berechnung und Mitteilung der Messungen geschieht in der Weise, daß man die Differenzen der Totalhelligkeit bei bestimmtem N gegen die Totalhelligkeit für $N = 0°/180°$ angibt. Ferner findet eine weitere Kondensation der Ergebnisse in der Weise statt, daß die zu $90°/270°$ symmetrischen N nochmals in eine Helligkeit vereinigt und in den ersten Quadranten gelegt wurden; also z. B. aus $N = 70°$ und 110° geht ein Mittel für $N = 70°$ hervor. Auf diese Weise tritt demnach in überaus weitreichendem Maße eine Elimination der physikalischen und mechanischen Ungleichförmigkeiten der künstlichen Planeten ein; die Messungen repräsentieren somit sehr nahe die idealen Verhältnisse für Rotationsellipsoide aus dem betreffenden Material (mattes Silber und weiße Kreide).

Den Resultaten möge eine Diskussion ihrer Genauigkeit vorausgehen. Wir trennen dabei nach Stromquelle (Stadtstrom *St*, Akkumulatoren *A*) und Planetensubstanz (Silber, Kreide). Die in der vorliegenden Abhandlung bearbeiteten Beobachtungen erstrecken sich über die Zeit von 1928 Dezember 28

bis 1929 Juni 4. (Bis Februar 21 Stadtstrom, von Februar 25 an Akkumulatoren.) Bis April 11 werden die Silberplaneten gemessen, von April 19 an, nur mit Akkumulatoren, die Kreideplaneten.

Der mittlere zufällige Fehler einer Beobachtung einer Helligkeitsdifferenz für ein beliebiges $N/N+180°$ gegen $N = 0°/180°$ wurde aus den einzelnen Messungen mit den ersten Potenzen der Abweichungen gegen das zugehörige Mittel abgeleitet.

Mittlere Fehler μ einer Helligkeitsdifferenz gegen $N = 0°/180°$.

Planet	Silberplaneten						Kreideplaneten		
	Stadtstrom			Akkumulatoren			Akkumulatoren		
	μ	n	ν	μ	n	ν	μ	n	ν
1	$\pm 0^m.086$	68	17	$\pm 0^m.057$	81	17	$\pm 0^m.047$	58	17
2	.068	67	17	.057	81	17	.034	48	17
3	.070	67	17	.045	91	17	.035	48	17
4	.081	67	17	.044	71	17	.044	48	17
	± 0.076	269	68	± 0.051	324	68	± 0.039	202	68

n Zahl der Beobachtungen, ν Zahl der Unbekannten.

Man erkennt, daß mit der Einführung der Akkumulatoren eine erhebliche Verbesserung der Genauigkeit auftritt, und daß die Kreideplaneten genauer gemessen werden als die Silberplaneten. Das trifft wohl so im großen ganzen zu, aber gewiß lagert sich über die Tabelle noch der Vorgang wachsender Übung und vielleicht — wachsender unbewußter Voreingenommenheit mit vorschreitender Zeit. Denn die drei Kolonnen folgen von links nach rechts zeitlich aufeinander, und es kann wohl kaum daran gezweifelt werden, daß das Auge sich nach und nach an ein bestimmtes Aussehen der einzustellenden Lichtpunkte gewöhnte. Zur Herstellung dieser gewohnten Bilder hat es automatisch stets den gleichen Augenpunkt vor dem Okular aufgesucht. Das erhöhte dann wieder die innere Übereinstimmung der Messungen und schadete systematisch nichts, sobald die Gewöhnung wirklich festgeworden war.

6. Bei der Aufstellung der Ergebnisse sei wieder daran erinnert, daß die hier stehenden Argumentwinkel N des ersten Quadranten in der beschriebenen Weise aus vier symmetrischen N-Einstellungen hervorgingen, wie etwa z. B. aus 20°, 200°, 160°, 340°.

Für die Silberplaneten erfolgte die Mittelbildung zwischen Stadtstrom *St* und Akkumulatoren *A* in der Weise, daß die *A*-Mittel gegenüber den *St*-Mitteln doppeltes Gewicht erhielten. Bei den Planeten 1, 2, 3 haben alle Differenzen gegen $N = 0°$ positives Vorzeichen im Sinne der Größenklassenzählung, d. h. die Helligkeiten bei beliebigem N sind schwächer als bei $N = 0°$. Nur bei Planet 4 kommen negative Vorzeichen geringer Beträge vor, d. h. die betreffenden Helligkeiten sind größer als die für $N = 0°$. Man erkennt an der Zahl der Messungen, mit welcher Genauigkeit die theo-

Gemessene Helligkeitsdifferenzen für beliebiges N gegen $N = 0°$.

Planet 1.

N	Silber Helligk.	n St	n A	Kreide Helligk.	n A
0°	0m.000	—	—	0m.000	—
10	.055	4	6	.045	4
20	.095	4	8	.047	4
30	.184	8	8	.088	6
40	.244	4	8	.075	8
50	.334	4	6	.301	4
60	.438	8	8	.268	6
70	.510	4	8	.383	4
80	.521	4	8	.359	8
90	.569	28	21	.409	14

Planet 2.

N	Silber Helligk.	n St	n A	Kreide Helligk.	n A
0°	0m.000	—	—	0m.000	—
10	.019	4	6	.031	4
20	.055	4	8	.021	4
30	.105	8	8	.061	6
40	.136	4	8	.114	4
50	.193	4	6	.178	4
60	.236	8	8	.162	6
70	.329	4	8	.198	4
80	.318	4	8	.281	4
90	.371	27	21	.273	12

Planet 3.

N	Silber Helligk.	n St	n A	Kreide Helligk.	n A
0°	0m.000	—	—	0m.000	—
10	.004	4	8	.015	4
20	.018	4	8	.029	4
30	.059	8	8	.046	6
40	.067	4	10	.021	4
50	.098	4	8	.048	4
60	.132	8	8	.072	6
70	.144	4	8	.100	4
80	.142	4	10	.122	4
90	.180	27	23	.126	12

Planet 4.

N	Silber Helligk.	n St	n A	Kreide Helligk.	n A
0°	0m.000	—	—	0m.000	—
10	+ .035	4	6	— .002	4
20	— .013	4	6	— .007	4
30	— .015	8	8	+ .011	6
40	— .045	4	6	— .005	4
50	+ .010	4	6	— .022	4
60	— .010	8	8	+ .015	6
70	— .012	4	6	— .017	4
80	— .044	4	6	— .013	4
90	— .023	27	19	.000	12

retisch besonders hervorgehobenen Punkte $N = 90°$ festliegen, und daß auch noch die Zwischenpunkte $N = 30°$ und 60° manchmal eine Bevorzugung erfahren haben.

Bei den Silberplaneten zeigte sich, daß die Resultate für Stadtstrom *St* und Akkumulatoren *A* anscheinend nicht nur zufällig, sondern auch systematisch voneinander abweichen, und daß ein Unterschied besteht zwischen Kugel 4 einerseits und den Planeten 1, 2, 3 anderseits:

Unterschiede ($St - A$) für die 4 Planeten.

Planet	1	2	3	4
$St - A$	+ 0m.052	+ 0m.028	+ 0m.046	— 0m.021
n	9	9	9	9

Gesamtmittel $St - A = + 0^m.026$ ($n = 36$), für die Planeten 1, 2, 3 allein $St - A = + 0^m.042$ (27). Sollte dahinter ein Gang mit der absoluten Hellig-

keit stecken? Ordnung nach dem Mittel der Helligkeiten aus *St* und *A* ergibt:

für alle Planeten

Helligk.	*St* — *A*	*n*
— 0.m10	— 0.m018	7
.00	+ .016	11
+ .10	+ .058	8
+ .20	+ .040	6
+ .40	+ .048	4
+ .60		36

für die Planeten 1, 2, 3

Helligk.	*St* — *A*	*n*
0.m00	+ 0.m026	9
.10	+ .058	8
.20	+ .040	6
.40	+ .048	4
.60		27

Der Gang des ersten Täfelchens spiegelt lediglich den Unterschied zwischen Kugel 4 und Planeten 1, 2, 3 wieder. Und wenn man im zweiten Täfelchen nach dem Anblick noch einen Gang erkennen möchte, so lehrt der Korrelationskoeffizient r zwischen $(St - A)$ und Helligkeit mit $r = +0.14 \pm 0.19$, daß davon nicht die Rede sein kann. Die Ursache der Differenz — falls sie reell, nicht durch eine ungünstige zufällige Verteilung der Fehler entstanden ist — könnte in einem Färbungsunterschied der in Betracht kommenden Objekte (Planeten, Photometerlampe) bei *St* und *A* gesucht werden, der unter der bewußten Wahrnehmung geblieben wäre. Wahrscheinlich ist das nicht. Am wahrscheinlichsten hat man es wohl mit einer Überdiskutierung des für diesen Zweck nicht allzu reichhaltigen Materials zu tun.

7. Bevor die Vergleichung mit der Theorie stattfinden kann, sollen die unmittelbar aus der Beobachtung hervorgegangenen Daten noch einer graphischen Ausgleichung unterzogen werden, die, wie man dem Verlauf der Ziffern schon ansieht, zwar durchweg nicht viel Änderung bewirkt, die aber doch vor den theoretischen Überlegungen zur Glättung des Werteverlaufs erfolgen muß. Noch eins ist zu bemerken. In der photometrischen Theorie des Rotationsellipsoids sei nicht N der Argumentwinkel der Helligkeit, sondern sein Komplement E, so daß $E = 90° - N$. Der Winkel E bedeutet mithin den Erhebungswinkel der Gesichtslinie über der Äquatorebene des Planeten, d. h. die planetozentrische Breite der Erde. Diesen Winkel E wählen wir nun als Argument und schreiben die aus der ohne Zwang geführten glatten Kurve entnommenen Helligkeiten entsprechend um.

Ausgeglichene beobachtete Helligkeiten der vier Planeten.

E	Silber				Kreide			
	1	2	3	4	1	2	3	4
0°	0.m00	0.m00	0.m00	0.m00	0.m00	0.m00	0.m00	0.m00
10	.01	.01	.00	+ .02	.01	.01	.00	+ .01
20	.04	.04	.01	.00	.03	.04	.02	+ .01
30	.11	.10	.03	— .02	.09	.08	.05	— .01
40	.21	.16	.06	— .01	.16	.12	.07	+ .01
50	.30	.21	.09	+ .01	.25	.18	.08	.00
60	.38	.26	.12	+ .01	.31	.22	.09	.00
70	.46	.30	.14	— .02	.35	.25	.10	.00
80	.52	.33	.16	— .04	.36	.26	.11	.00
90	.53	.34	.16	— .04	.37	.26	.11	.00

Nun wächst die Helligkeit mit wachsendem Winkel E, während mit wachsendem Winkel N die Helligkeit abnahm. Das positive Vorzeichen gilt hier im Sinne der Intensitäten; es bedeutet in der vorstehenden Tabelle größere Helligkeit als bei $E = 0°$, worauf insbesondere bei Planet 4 zu achten ist.

8. Die Änderungen der unmittelbar beobachteten Werte durch die Ausgleichung blieben bei den Silberplaneten recht gering. Der (nicht wiedergegebene) Unterschied (Beob. — Kurve) erreicht maximal $0^m.02$. Bei den Kreideplaneten kommt merkwürdigerweise eine schlechtere Darstellung zum Vorschein; denn im Falle des Planeten 1 bleiben Reste bis $0^m.07$ übrig. Rechnet man mit den Differenzen (Beob. — Kurve) den m. F. aus unter der Annahme, die ausgleichende Kurve lasse sich durch vier Konstanten mathematisch reproduzieren, so ergibt sich der m. F. μ eines beobachteten Punktes für die

Silberplaneten	Kreideplaneten
zu $\mu = \pm 0^m.017$	$\pm 0^m.026$

Während das μ bei den Silberplaneten sehr nahe mit dem aus den zufälligen Fehlern der einzelnen Messung zu erwartenden Betrag zusammenstimmt, ist das bei den Kreideplaneten nicht mehr der Fall. Man möchte da einen m. F. von nicht mehr als etwa $\pm 0^m.018$ zulassen. Wahrscheinlich weist die Spannung auf kleine Ungleichmäßigkeiten in den Planetenfiguren hin, die bei der mechanischen Bearbeitung des spröden brüchigen Materials sich sehr leicht einstellen können (vgl. Ziffer 11 Ende).

An dem kugelförmigen Planeten 4 kann man abschätzen, welche photometrischen Fehler noch aus der Ungenauigkeit der mechanischen Ausführung der Planetenkörper zu erwarten sind. Legt man die nach Argument Winkel E geglätteten Beobachtungen zugrunde, so sollten bei Planet 4 für alle E die gleichen Werte sich ergeben, und zwar bei dem Silberplaneten $-0^m.01$, beim Kreideplaneten $0^m.00$. Aus den Abweichungen gegen diese konstanten Sollwerte folgt ein m. F. von $\pm 0^m.02$ bei Silber, und von weniger als $0^m.01$ bei Kreide. Da die eigentlichen Messungsfehler durch die mehrfache Mittelbildung und die graphische Ausgleichung sich im wesentlichen herausgehoben haben, so äußert sich in den jetzt gefundenen m. F. die kleine Unexaktheit, die aus der mechanischen Bearbeitung der Planeten und aus der optischen Inhomogenität der Oberflächenreflexion, der Albedo, fließt. Man empfindet diesen photometrisch wirksamen Fehler nicht als groß, um so weniger, als die linearen Dimensionen der Planeten ($2a = 10\,\text{mm}$) recht klein sind.

9. Wie stellt sich nun die photometrische Theorie zu unsern Beobachtungen an künstlichen Planeten aus mattem Silber und aus Kreide? Die Beleuchtung eines Rotationsellipsoids hat in erschöpfender Weise H. Seeliger behandelt. Er arbeitet die Theorie in zwei Formen aus, denen der Reihe nach jene beiden photometrischen Grundgesetze als Ausgang dienen, zwischen denen sich — vielleicht — das unbekannte wahre Gesetz für die äußeren

Planeten bewegen dürfte, während für irdische Substanzen im Laboratorium das gesuchte wahre Gesetz nahe bei dem einen Rande (Lambert) des Intervalls liegt und gewiß nicht nach der Richtung der andern Grenze (Lommel) hin tendiert. Es sind die beiden Formeln von Lambert (1760) und Lommel (1880). In Kürze sei das Wesentliche rekapituliert. Die Normale eines beleuchteten Elementes ds bilde mit der Richtung zur Sonne den Einfallswinkel i, mit der Richtung zur Erde den Reflexions- oder Emanationswinkel ε; dann ist die Lichtmenge, die ds dem irdischen Beobachter zusendet, proportional mit

$$ds \cos i \cos \varepsilon \qquad \text{nach Lambert,}$$

und mit

$$ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon} \qquad \text{nach Lommel.}$$

In Lommels Term ist $\lambda = \frac{k}{k'}$, wenn k den Absorptionskoeffizienten der reflektierenden Substanz für die bis zu einer gewissen Tiefe unter die Oberfläche eindringenden Strahlen, k' den Absorptionskoeffizienten für die austretenden Strahlen bezeichnet. Mit der Annahme $k = k'$ und $\lambda = 1$ wird man aber noch am ehesten der heutigen physikalischen Auffassung von der diffusen Reflexion gerecht.

Die beiden Grundgesetze bedingen ein gegensätzliches Aussehen einer idealen Planetenscheibe bei voller Beleuchtung ($\alpha = 0°$). Zur Lambertschen Formel gehört eine beständige Abnahme des Lichtes von der Mitte (größte Helligkeit) zum Rande, wo die Helligkeit auf Null herabsinkt. Nach Lommels Formel hingegen bleibt die scheinbare Helligkeit über die ganze Planetenscheibe hin konstant.

10. In den Experimenten wurde bei voller Beleuchtung (Phasenwinkel $\alpha = 0°$) die Abhängigkeit der Helligkeit lediglich von dem Erhebungswinkel E des Beobachters über dem Äquator des planetaren Rotationssphäroids untersucht. Es werden daher auch hier die theoretischen Formeln nur soweit hingeschrieben, als sie die Helligkeit als Funktion von Winkel E darstellen.

Mit Lamberts Grundgesetz gelangen wir zu einer Beziehung für die gesamte zugestrahlte Lichtmenge Q_L, die in Hinsicht auf das Ziel so lautet:

$$Q_L = c_L \{ P \cos^2 E + R \sin^2 E \}.$$

Da es nur auf das Verhältnis der Q_L bei verschiedenen Erhebungswinkeln E ankommt, so fällt die Konstante c_L heraus; sie bestimmt sich durch die Leuchtkraft der Sonne, durch die Albedo, durch den Phasenwinkel, durch den scheinbaren Radius der Sonne vom Planeten aus und des Planeten von der Erde aus, Größen, die in unserm Falle für die Messungen als konstant anzusehen sind.

Ferner hat man die Hilfsgrößen

$$P = \frac{M - N}{2} \qquad R = \left(\frac{a}{b}\right)^4 N$$

$$\cos\phi = \frac{b}{a}$$

$$M = -\frac{1}{2}\cos^2\phi\left\{1 - \frac{2+\cos^2\phi}{\sin\phi}\,\lg\,\text{nat}\,\text{tg}\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right)\right\}$$

$$N = \frac{1}{2}\frac{\cos^4\phi}{\sin^2\phi}\left\{1 - \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}\,\lg\,\text{nat}\,\text{tg}\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right)\right\}.$$

Einfacher sieht die Formel im Falle der Gültigkeit des Lommelschen Gesetzes aus. Unterscheidet man die auftretenden Größen durch den Index S (Seeliger) von den vorigen L (Lambert), so entsteht die wieder auf das für uns Notwendige beschränkte Formel:

$$Q_S = c_S\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin^2 E}\,.$$

c_S hängt in anderer Weise von denselben Größen ab wie c_L. Für die Rechnung macht man bequem Gebrauch von der Identität $\frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1-e^2}$.

Im speziellen Fall unserer Experimente ($\alpha = 0^\circ$) muß die Totalhelligkeit des Planeten proportional sein zu seiner sichtbaren Fläche. Denn diese Fläche ist gleich $a\,b\,\pi\sqrt{1 + \frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2 E}$. Infolgedessen hat man für die Amplitude des Lichtwechsels in Größenklassen zwischen $E = 0^\circ$ und $E = 90^\circ$ den zur Kontrolle geeigneten einfachen Ausdruck $-2.5\,\lg(1-p)$, wo p die Abplattung bezeichnet.

11. In den Formeln stecken keine Vernachlässigungen in bezug auf die Abplattung. Sie gelten streng auch für den stark abgeplatteten Planeten 1 (mit $p = \frac{1}{3}$), allerdings nur wegen $\alpha = 0^\circ$.

Photometrische Konstanten der Rotationsellipsoide.

Planet	Abplattung p	Lambert $\lg M$	Lambert $\lg N$	Lambert $\lg P$	Lambert $\lg R$	Lommel $\lg\frac{a^2-b^2}{b^2}$
1	1 : 3	9.6805	8.8794	9.3048	9.5838	0.0969
2	1 : 5	9.8169	9.1710	9.4046	9.5586	9.7501
3	1 : 10	9.9110	9.3575	9.4675	9.5405	9.3703
4	0	0.0000	9.5229	9.5229	9.5229	—

Mit Hilfe der Formeln und der danach berechneten Konstanten wurde nun, getrennt für Lamberts und Lommels Grundgesetz, der theoretische

Verlauf der Helligkeit der Rotationsellipsoide mit dem Erhebungswinkel E abgeleitet und in Größenklassen ausgedrückt. Die Helligkeit für $E = 0°$ ist zu $0^m.000$ gesetzt, von da an wachsen die theoretischen Helligkeiten mit wachsendem E. Wenn dann trotzdem das positive Vorzeichen für die Beträge in Größenklassen beibehalten bleibt, so widerspricht das allerdings der Zählung der Sterngrößen. Bei Planet 4 muß es natürlich für alle E heißen $0^m.000$.

Theoretische Totalhelligkeiten der Rotationsellipsoide abhängig vom Erhebungswinkel E, für $\alpha = 0°$.

Helligkeitsdifferenzen gegen $E = 0°$ in Größenklassen.

E	Lambert 1		Lambert 2		Lambert 3		Lommel 1		Lommel 2		Lommel 3	
0°	$0^m.000$		$0^m.000$		$0^m.000$		$0^m.000$		$0^m.000$		$0^m.000$	
		29		14		6		20		9		4
10	.029		.014		.006		.020		.009		.004	
		79		39		17		54		25		11
20	.108		.053		.023		.074		.034		.015	
		112		57		26		73		38		16
30	.220		.110		.049		.147		.072		.031	
		123		66		30		79		42		19
40	.343		.176		.079		.226		.114		.050	
		118		66		31		72		41		20
50	.461		.242		.110		.298		.155		.070	
		99		59		30		61		36		18
60	.560		.301		.140		.359		.191		.088	
		75		46		23		45		28		14
70	.635		.347		.163		.404		.219		.102	
		47		28		14		27		17		9
80	.682		.375		.177		.431		.236		.111	
		15		10		5		9		6		3
90	.697		.385		.182		.440		.242		.114	

Es mag zu Planet 1 bemerkt sein, daß die Anweisung für die Herstellung nicht $2b = 6^2/_3$ mm lautete, sondern $2b = 6.7$ mm. Dem entspricht dann streng die Abplattung $p = 1 : 3.0303$, und dazu gehören die photometrischen Konstanten:

lg M	lg N	lg P	lg R	lg $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$
9.6841	8.8874	9.3075	9.5831	0.0891.

Zum Übergang auf dieses Ellipsoid müßte man an die theoretischen Totalhelligkeiten des Planeten 1 anbringen die

(Planet 1) Korrektionen an die tabulierten Werte zum Übergang auf $2b = 6.70$ mm. In Einheiten $0^m.001$.

E	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Lambert	0	−1	−1	−2	−4	−6	−7	−7	−8	−8
Lommel	0	0	−1	−2	−3	−4	−5	−5	−5	−5

Das sind für visuelle Photometrie bedeutungslose Differenzen. Eine genaue Ausmessung der Planeten bietet sich im Verlaufe einer weiteren photometrischen Untersuchung dar, die im Gange ist. Übrigens verdient es noch erwähnt zu werden, daß eine Ungenauigkeit der Orientierung im Strahlengang des Planetenmodells ohne Einfluß bleibt für das vorliegende Ziel. Denn der Effekt der Abplattung auf die Helligkeitsdifferenz mit der Schwankung des Winkels E ist unabhängig von dem (konstanten) Phasenwinkel.

12. Die Unterschiede nach den beiden Gesetzen sind so erheblich, daß sie für die Planeten 1 und 2 leicht in den Beobachtungen auffallen, und bei Planet 3 können die Messungen eine Entscheidung, ob LAMBERT oder LOMMEL, sicher möglich machen — wenn das Material der Planeten überhaupt die gemeinsame Voraussetzung beider Gesetze, ideale diffuse Reflexion, erfüllt. Trifft das aber nicht zu — und Abweichungen sind immer vorhanden —, so kann man daran denken, daß zwar die Amplitude geändert werde, aber die allgemeine Form der Kurve erhalten bleibt, so daß aus der Gestalt der Kurve auf das eine oder andere Gesetz geschlossen werden könne. Freilich nur dann, wenn die theoretischen Kurven nach den beiden Gesetzen hinreichend voneinander abweichen. Wir sehen rasch die tatsächlichen Verhältnisse nach, reduzieren zu dem Ende für jeden Planeten die LAMBERTschen Kurven auf Kurven mit der LOMMELschen Amplitude desselben Planeten und bilden die Differenzen (LOMMEL — LAMBERT).

Differenzen (LOMMEL — LAMBERT) für die theoretischen Kurven von gleicher Amplitude.

In Einheiten $0^m.001$.

E	Planeten 1	2	3
0°	0	0	0
10	+2	0	0
20	+6	+1	+1
30	+8	+3	0
40	+9	+3	+1
50	+7	+3	+1
60	+6	+2	0
70	+3	+1	0
80	0	0	0
90	0	0	0

Man sieht: die Kurven differieren kaum. Selbst im extremen Falle des Planeten 1 wird $0^m.01$ nicht ganz erreicht, und für die im Sonnensystem wirklich vorkommenden Abplattungen existiert überhaupt kein Unterschied (Planet 3).

Vor der Vergleichung mit den Beobachtungen hat man noch zu überlegen, wie eine Abweichung der faktischen Dimensionen der künstlichen Planeten von den vorgeschriebenen, der theoretischen Berechnung zugrunde gelegten Maaßen auf die photometrische Kurve wirkt. Es wurde deshalb die kleine Achse 2b in einer zweiten Rechnung um 0.1 mm geändert. Daraus fließen Variationen in der photometrischen Amplitude von folgendem Betrage:

Änderungen der Amplitude durch Änderungen der kleinen Achse um 0.1 mm.

Planet	1	2	3	4
Gesetz LAMBERT	$0^m.024$	$0^m.020$	$0^m.018$	$0^m.018$
» LOMMEL	.016	.013	.011	.011

Fehler von demselben Range haben sich aus den photometrischen Beobachtungen des kugelförmigen Planeten 4 wirklich ergeben (vgl. Ziffer 8). Durch die unvermeidlichen Ungenauigkeiten in der mechanischen Herstellung der Rotationsellipsoide erscheint also unser Ergebnis nicht gefährdet.

Die Genauigkeit der mechanisch-photometrischen Ausführung der Planeten konnte noch in anderer Weise revidiert werden. Benutzt sind dazu alle die kurzen Reihen, in denen die vier Planeten nacheinander je nur in den Punkten $N = 0°/180°$ und $90°/270°$ gemessen sind. Wären die vier Körper genau gleich und aus gleichartigem Material, so müssen die Messungen bei $N = 0°/180°$ fast dieselbe absolute Helligkeit (mit einem kleinen Gang) für alle vier Körper liefern; denn sie kehren dem Beobachter dann gleichgroße kreisförmige Flächen zu. Beeinträchtigend wirkt die mangelnde Konstanz der Beleuchtungsquelle, deren Einfluß aber dadurch verringert ist, daß die Reihenfolge der Planeten ständig wechselte, also $1 \rightarrow 4$ und $4 \rightarrow 1$. Dabei dauerte ein Messungssatz nicht übermäßig lange, 25 bis 30 Minuten. Bildet man nun die Differenz der Helligkeit jedes Planeten gegen die mittlere Helligkeit der vier Planeten innerhalb der einzelnen Beobachtungsreihe — die Messungen bei Akkumulatorenlicht erhalten wieder doppeltes Gewicht —, so entsteht die folgende Übersicht für die

Relative Helligkeit der vier Planeten
bei $N = 0°/180°$.

Planet	Planet — Mittel		Anzahl
	Silber	Kreide	
1	$+0^{m}.03$	$+0^{m}.06$	25, 3
2	+ .04	+ .02	25, 3
3	+ .01	— .06	25, 3
4	— .08	— .02	25, 3

Positives Vorzeichen bedeutet größere Helligkeit.

Man erkennt zweierlei: die nach den Silberplaneten kopierten Kreideplaneten stimmen recht befriedigend zu den Originalen; der Widerspruch erscheint nicht größer, als man bei nur drei Beobachtungen der Kreideplaneten erwartet. Wenn ferner die Kugel 4 schwächer leuchtet als die zunehmend abgeplatteten Oberflächen von 3, 2, 1, so hat das einen leicht erkennbaren photometrisch-physikalischen Grund. Die generelle Abnahme der Helligkeit mit Anwachsen der Wölbung der reflektierenden Oberflächen von 1 nach 4 hin prägt sich recht gut aus. Darin äußert sich der Vorgang, dessen Grenzfall unter Annahme des Lambertschen Gesetzes der folgende Satz ausspricht, der sich leicht aus zwei von Zöllner bewiesenen Sätzen ableiten läßt: Die von einer vollbeleuchteten Kugel ($\alpha = 0°$) erzeugte Beleuchtung verhält sich zu der Beleuchtung durch die zum Sehstrahl senkrechte gleichgroße ebene Kreisfläche wie 2 : 3. D. h. die Kreisfläche ist $0^{m}.440$ heller als die Kugel.

Aus dem bearbeiteten Material fließen noch Werte für die Streuung σ. Trennt man nach der Herkunft des Stromes, so findet sich für den Stadtstrom $\sigma = 0^{m}.044$ ($n = 76$), und für die Akkumulatoren $\sigma = 0^{m}.031$ ($n = 36$); d. h. erhebliche (doppelte) Überlegenheit der Akkumulatoren in der Konstanz des Lichtes.

13. Überblicken wir die ausgeglichenen beobachteten Helligkeiten (Ziffer 7) und die eben gefundenen theoretischen Helligkeiten (Ziffer 11), so läßt sich zunächst allgemein qualitativ sagen: die Silberplaneten schließen sich am nächsten dem Lambertschen Gesetz an, die Kreideplaneten dem Lommelschen Gesetz. Im einzelnen deckt die nachstehende Tabelle die Enge des wechselseitigen Anschlusses auf.

Abweichungen (Beobachtung — Theorie)
für die Rotationsellipsoide.

In Einheiten $0^{m}.01$.

E	Silber Lambert 1	Silber Lambert 2	Silber Lambert 3	Kreide Lommel 1	Kreide Lommel 2	Kreide Lommel 3	Silber Lommel 1
0°	0	0	0	0	0	0	0
10	− 2	0	− 1	− 1	0	0	− 1
20	− 7	− 1	− 1	− 4	+ 1	0	− 3
30	− 11	− 1	− 2	− 5	+ 1	+ 2	− 4
40	− 13	− 2	− 2	− 6	+ 1	+ 2	− 2
50	− 16	− 3	− 2	− 5	+ 2	+ 1	0
60	− 18	− 4	− 2	− 5	+ 3	+ 1	+ 2
70	− 18	− 5	− 2	− 5	+ 3	0	+ 6
80	− 17	− 5	− 2	− 7	+ 2	0	+ 9
90	− 17	− 5	− 2	− 7	+ 2	0	+ 9

Die überwiegenden negativen Vorzeichen lehren hier, daß die beobachteten Helligkeiten die theoretischen unterschreiten. An ein paar Stellen fand eine leichte Glättung statt, die indes in den Einzelwerten nur Änderungen unterhalb $0^{m}.01$ nach sich zog.

Bei den Planeten 2 und 3, Silber und Kreide, übertreffen die Differenzen nicht die Spannung der Fehler, wie sie aus der Unsicherheit der Beobachtung und der mechanischen Ausführung der Planeten in der Werkstatt zu erwarten sind, eine Spannung, die $0^{m}.04$ bis $0^{m}.05$ betragen darf. Bei Planet Kreide 1 wird der maximal zugelassene Widerspruch in drei Argumenten E um ein weniges überschritten, ohne daß die Gültigkeit des Lommelschen Gesetzes dadurch widerlegt würde. Nur für Planet Silber 1 gilt bestimmt nicht das verglichene Lambertsche Gesetz, während das Lommelsche Gesetz auch da sich besser den Beobachtungen anschmiegt; vgl. die letzte Kolonne der Tabelle.

14. Die Ursache für die generelle Tendenz: Silber zu Lamberts Gesetz, Kreide zu Lommels Gesetz, läßt sich m. E. unschwer angeben. Dem Beweis des vereinfachten Lommelschen Gesetzes liegt die Vorstellung zugrunde, daß die Lichtstrahlen bis zu einer gewissen Tiefe in den diffus reflektierenden Körper eindringen und auf diesem Hin- und Rückwege eine Absorption erleiden, während nach Lambert ein diffus reflektierendes Element sich wie ein selbstleuchtendes verhält, und die physikalischen Vorgänge sich an und dicht unter der Oberfläche abspielen. Nun ist klar, daß die poröse Kreide mit ihrer feinpulvrigen Oberfläche fast ideal der Lommelschen Annahme entspricht und die Strahlen

vergleichsweise tief eindringen läßt, während das Silber, auch das mattierte, mit seinem vielleicht noch vorhandenen Rest von Metallglanz eher die Lambertsche Hypothese erfüllt. Jedenfalls dringt das Licht bei weitem nicht so tief unter die Oberfläche ein als bei der Kreide. Man wird an den schönen von F. Zöllner (1865)[1] ausgesprochenen Satz erinnert: »Die von den Phasen einer Planetenkugel ausgesandten Lichtmengen werden um so vollkommener der Lambertschen Theorie entsprechen, je dichter die auf dem Planeten befindliche Atmosphäre ist und aus je geringerer Tiefe demnach noch Strahlen aus derselben zum Beobachter gelangen.« In der postulierten Allgemeinheit gilt der Satz allerdings und leider nicht. Dennoch durfte die gefundene Zuordnung, mattes Silber zu Lambert, weiße Kreide zu Lommel, von vornherein erwartet werden. Physikalisch wirkt die Erklärung nicht überzeugend.

Nicht ohne Interesse ist es aber in diesem Zusammenhange, wenn an den allgemeinen Ausfall der vielen experimentellen direkten Prüfungen der photometrischen Grundgesetze, Lambert und Lommel, erinnert wird: die Beobachtungen im Laboratorium an eben begrenzten, diffus reflektierenden Medien konvergieren dahin, daß gerade die einer theoretischen Begründung entbehrende Lambertsche Formel die Beleuchtungsphänomene in der Natur weit besser wiedergibt als irgendeine andere einfache Formel[2]. Auch für die Phasenhelligkeit von Kugeln hat das Lambertsche Gesetz die beste Darstellung gegeben (Messerschmitt[3], v. Aufsess). Die Verbesserung der Lambertschen Formel, die von vielen Beobachtungsreihen gefordert wird, liegt nicht einmal in der Richtung zu der physikalisch abgeleiteten Lommelschen Formel hin. Wird aber die theoretisch plausibel fundierte Lommelsche Formel in der physikalischen Welt nicht erfüllt, so darf man dem zitierten aus der Lambertschen Vorstellung fließenden Zöllnerschen Satz über den Phaseneffekt der Planeten wieder eine größere Bedeutung zuschreiben. Astrophotometrische Beobachtungen haben ihn zum mindesten nicht widerlegt.

Es bedeutet offenbar einen nicht unerheblichen Beitrag zur Photometrie, wenn die hier begonnenen experimentellen Untersuchungen nach andern Richtungen ausgedehnt würden: einmal über die Variation der Totalhelligkeit der Rotationsellipsoide mit der Phase unter Bevorzugung großer und sehr großer Phasenwinkel und Abplattungen; dann Studium der Verteilung der Flächenhelligkeit auf der scheinbaren Oberfläche des künstlichen ellipsoidischen Planeten. Derartige Versuche führen voraussichtlich mit großer Sicherheit an die Grundgesetze der Photometrie und ihren Geltungsbereich heran. Die vier Planeten erweisen sich durch die vorliegende Diskussion als hinreichend genaue mathematische Körper, und dem Material nach stehen mattes Silber und weiße Kreide an den entgegengesetzten Enden diffuser Reflexionsfähig-

[1] F. Zöllner, Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865, S. 25.

[2] Vgl. die Zusammenstellungen in E. Liebenthal, Praktische Photometrie. Braunschweig 1907, S. 84ff.; E. Schoenberg, Untersuchungen zur Theorie der Beleuchtung des Mondes. Acta soc. sc. fenn. **50**, Nr. 9. Helsingfors 1925, S. 41ff.

[3] I. B. Messerschmitt, Über diffuse Reflexion. Ann. d. Phys. N. F. **34** (1888), 867.

keit. Allerdings, es könnte eintreten, daß der Fortgang einer solchen Untersuchung den Fragepunkt erheblich verschiebt. Das ist kein Einwand.

Von hohem Wert wäre es, die objektiven physikalischen Methoden der Helligkeitsmessung, z. B. das Elektrophotometer[1], für einen Teil der neuen Experimente zu verwenden.

15. Noch eine kurze Bemerkung über die Abplattung des Planeten Uranus, durch die hauptsächlich diese Untersuchung veranlaßt wurde. Wir nehmen an, daß der Rotationsäquator mit der mittleren Bahnebene seiner vier Monde zusammenfällt. Mit Innehaltung derselben Bezeichnung wie im vorliegenden Aufsatz muß dann eintreten

um das Jahr	der Erhebungswinkel E	die Helligkeit des Planeten
1861	90°	Maximum
1882	0	Minimum
1903	90	Maximum
1924	0	Minimum

Und so verlaufen auch die Erscheinungen, in Übereinstimmung mit den Experimenten und der durch sie qualitativ und nahe quantitativ bestätigten photometrischen Theorie. Das wurde schon näher dargelegt in dem Aufsatz »Helligkeit und Abplattung des Uranus« (Astr. Nachr. **227**. 273, 1926). Die Überlegungen l. c. bilden demnach die physikalischen Verhältnisse am Himmel im richtigen Sinne ab, und die Bemerkung »Zur Gestalt des Uranus« in AN **227**. 391, 1926 ist zu streichen.

Auf die l. c. benutzten Beobachtungen soll nicht nochmals eingegangen werden, denn inzwischen kamen erhebliche Beiträge an neuen Beobachtungen von verschiedenen Autoren hinzu, und an weiteren Messungen wird es wohl nicht fehlen. Eine zusammenfassende Bearbeitung des Gegenstandes mag später wünschenswert sein. Die vorläufige Durchsicht der zugänglichen Messungen scheint indes zu zeigen, daß die l. c. mit einigem Vorbehalt ausgesprochenen Ergebnisse qualitativ unberührt bleiben: »Immerhin darf man die photometrische Amplitude des Uranus wegen Abplattung seiner Figur zwischen die Grenzen $0^m.15$ und $0^m.25$ einschließen« (p. 275). ..... »Unter diesen Umständen scheint es von Bedeutung, daß photometrische Beobachtungen für eine starke Abplattung des Planeten sprechen mit einer durch den Pol der Satellitenbahnen festgelegten Polarachse und so qualitativ Mikrometermessungen bestätigen, denen man hohes Vertrauen entgegenzubringen geneigt wäre« (p. 276).

Allerdings, der Gang der 8 einzelnen Jahresmittel der Uranushelligkeiten von G. Müller[2] (1878—1888) zeigt ein Maximum um 1882 an. Möglicherweise überlagert aber den Abplattungslichtwechsel des Planeten (42 Jahre) eine Schwankung der Sonnenhelligkeit, für die man eine Periode von 11 Jahren erwarten möchte. Es scheint ferner, daß zeitweise ein kurzperiodischer

[1] Z. B.: H. Rosenberg, Sternphotometrie mit Photozelle und Verstärkerröhre. Naturwiss. **9**. 359, 389. 1921.

[2] G. Müller in Publ. Astroph. Obs. Potsdam **8**, 1893, S. 350.

Rotationslichtwechsel auftritt, der am deutlichsten um die Zeit der Minimumepoche des langperiodischen Abplattungslichtwechsels sein müßte und der bei dessen Maximumepoche verschwände. Man sieht, in welcher Richtung sich die definitive Bearbeitung der beobachteten Größenklassen des Planeten zu bewegen hätte.

Die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft hat durch die dem Verfasser gewährte Unterstützung die Konstruktion der Versuchsanordnung möglich gemacht.

An dem Aufbau im Laboratorium ist H. Rosenberg nicht nur mit Rat und Tat, sondern auch durch Hergabe eigener Instrumente beteiligt.

Über die Ableitung einer meromorphen Funktion.

Von Dr. Egon Ullrich
in Jena.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 24. Oktober 1929 [s. oben S. 508].)

1. Die Theorie der meromorphen Funktionen gipfelt bekanntlich im zweiten Hauptsatze von Hrn. R. Nevanlinna[1]. Aus ihm folgen als Korollare der Satz von Picard, auch in der Form von Borel, und ein noch wesentlich schärferer Satz, den wir hier — etwas beiläufig — so aussprechen: *Die Dichte der z-Stellen einer meromorphen Funktion $f(x)$ in der Umgebung einer isolierten wesentlichen Singularität ist für alle z dieselbe (gleich 1) — abgesehen von höchstens abzählbar vielen (Nevanlinnaschen) Ausnahmewerten z_k, für die sie ihre normale Größe unterschreitet; die Summe aller Unterschreitungen oder Defekte $\delta(z_k)$ ist nicht größer als 2.* Es entsteht nun die Frage nach den Eigenschaften dieser Ausnahmewerte.

In dieser Arbeit wiederholen wir zunächst den Beweis des zweiten Hauptsatzes, aber von einem etwas anderen Ausgangspunkte her, als man es bisher tat, und gewinnen dadurch eine Hauptungleichung, die die Charakteristik $T(r, f')$ der Ableitung einer meromorphen Funktion nach beiden Seiten abschätzt. Sie enthält den Hauptsatz, gestattet aber darüber hinaus eine Reihe von Folgerungen über die Ableitung, insbesondere über ihre Ausnahmewerte, wenn solche für die Funktion bekannt sind. Die Sätze in dieser Richtung haben die Gestalt: *Besitzt $f(x)$ endliche Ausnahmewerte, so $f'(x)$ den Ausnahmewert Null; und hat $f(x)$ den Ausnahmewert Unendlich, so gilt gleiches für $f'(x)$.* Dabei ist es ganz gleichgültig, welche Definition des Ausnahmewertes man zugrunde legt — die ältere Picard-Borelsche oder die neuere und schärfere Nevanlinnasche.

Es wird die Bedeutung dieses Ergebnisses beleuchten, wenn wir erwähnen, daß man die Ausnahmewerte vermutlich unter den logarithmischen Singularitäten der Umkehrfunktion zu suchen hat und daß für algebraische Singularitäten ähnlich gilt: Hat $f(x)$ eine p-fache a-Stelle, so $f'(x)$ eine $(p-1)$-fache Nullstelle (a endlich; ähnlich für $a = \infty$). Aber auch umgekehrt: unser Ergebnis stützt obige Vermutung über die Lage der Ausnahmewerte.

2. Nicht alle unsere Ergebnisse haben die erwünschte Schärfe; daß z. B. f und f' von gleicher Ordnung sind, kann man aus der Hauptungleichung

[1] Das Literaturverzeichnis steht am Schluß der Arbeit.

noch nicht allgemein beweisen, obwohl sie für weite Funktionenklassen viel mehr liefert als diesen Satz. Dieselbe Unvollkommenheit trifft man bei einer Folgerung des II. Hauptsatzes. Er liefert als Verschärfungen des Picardschen Satzes die Defektrelationen, deren einfachste eingangs erwähnt wurde; sie sagen aus, daß die Summe gewisser Größen, die den Verzweigungscharakter der Umkehrfunktion einer meromorphen messen, nicht größer als 2 sein kann. Es ist wahrscheinlich — aber beim Stande der Theorie noch nicht beweisbar —, daß hier eine Gleichung statt der Ungleichung zu erwarten ist. Das käme auf eine Umkehrung der Picardschen Sätze hinaus. Es dürfte darum nicht ohne Interesse sein, wenn wir am Schlusse der Arbeit die Defektrelationen diskutieren und an Beispielen aufzeigen, wo eine Verschärfung der Theorie einzusetzen hätte.

I. Beweis der Hauptungleichung.

3. Vorbereitungen. Wir verwenden die Bezeichnungen des Buches von Hrn. Nevanlinna [4b]. Unter einer *Stellensorte* z verstehen wir die Gesamtheit der Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad f(x)-z=0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{f(x)}=0 \quad (\text{wenn } z=\infty),$$

anderseits aber auch die Gesamtheit aller Punkte mit der Koordinate z auf der Riemannschen Fläche der meromorphen Funktion; die beiden Mengen entsprechen sich eineindeutig; es sei gestattet, kurz von der *Riemannschen Fläche einer meromorphen Funktion* zu sprechen: wir verstehen darunter jene Fläche, auf die die punktierte Ebene durch die meromorphe Funktion und ihre Umkehrung eineindeutig bezogen ist.

Ist $n(r,z)$ die *Anzahl* der Lösungen von (1) für $|x|\leqq r$, so definiert man die *Anzahlfunktion*

$$(2) \quad N\left(r,\frac{1}{f-z}\right)=N(r,z)=\int_0^r \frac{n(t,z)-n(0,z)}{t}\,dt+n(0,z)\log r;$$

eine p-fache z-Stelle wird dabei ebensooft gezählt; bei der analogen Bildung $N_1(r,z)$ wird sie dagegen nur mit $p-1$, bei $\overline{N}(r,z)$ nur einfach berücksichtigt, und es ist daher

$$(3) \qquad N(r,z)=N_1(r,z)+\overline{N}(r,z).$$

Wie üblich, erklären wir

$$(4) \qquad N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right)=\sum N_1(r,z),$$

wo die Summe über alle z zu erstrecken ist; es gibt ja auch in jedem Kreise von endlichem Radius r nur endlich viele z, für die Summanden ungleich Null sind.

Daneben brauchen wir die Größe

$$(5)\quad m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\,|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\,,\qquad m\left(r,\frac{1}{f-z}\right)=m(r,z)\,.$$

Wie üblich, ist dabei $\overset{+}{\log}\,u=\max(0,\log u)$; dafür gelten die Rechenregeln

$$(6)\quad \overset{+}{\log}\left|\sum_{i=1}^{p}u_i\right|\leqq\sum_{i=1}^{p}\overset{+}{\log}\,|u_i|+\log p,\quad \overset{+}{\log}\left|\prod_{i=1}^{p}u_i\right|\leqq\sum_{i=1}^{p}\overset{+}{\log}\,|u_i|\,.$$

Wir stützen uns auf zwei fundamentale Sätze der Nevanlinnaschen Theorie, nämlich:

Erster Hauptsatz: *Die Summe $N(r,f)+m(r,f)=T(r,f)$ ist für jede nichtkonstante meromorphe Funktion $f(x)$ eine konvex in $\log r$ wachsende Funktion, die wir als Charakteristik von $f(x)$ bezeichnen; für jedes endliche a besteht die Beziehung*

$$(7)\qquad T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)+O(1)\,.$$

Hilfssatz 1. *Die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion $f(x)$ erfüllt für jedes endliche a die Abschätzung*

$$(8)\qquad m\left(r,\frac{f'}{f-a}\right)=O\,[\log r\,T(r,f)]\,,$$

ausgenommen höchstens im Falle unendlicher Ordnung eine Wertmenge r, die mit einer Intervallfolge von endlicher Gesamtlänge überdeckt werden kann.

4. Durchführung des Beweises. Sei also $f(x)$ eine meromorphe Funktion. Wir stellen uns die Aufgabe, die Charakteristik ihrer Ableitung, $T(r,f')$, nach beiden Seiten abzuschätzen, wobei wir auf Schranken lossteuern wollen, die nur auf $f(x)$ bezogene Größen enthalten.

Zur Abschätzung nach *oben* folgt wegen $f'=f\frac{f'}{f}$ und (6)

$$(9)\quad T(r,f')=N(r,f')+m(r,f')\leqq N(r,f)+\overline{N}(r,f)+m(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right).$$

Zur Abschätzung nach *unten* beachte man zuerst den Ersten Hauptsatz

$$(10)\qquad T(r,f')=T\left(r,\frac{1}{f'}\right)+O(1)=N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+m\left(r,\frac{1}{f'}\right)+O(1)\,.$$

Seien nun $a_1,\ldots,a_q$ $(q\geqq 1)$ verschiedene, endliche komplexe Zahlen; wir bilden das Polynom in f

$$\Psi(x)=(f-a_1)(f-a_2)\cdots(f-a_q)$$

und haben dann wieder wegen (6) die Ungleichung

$$m\left(r,\frac{1}{\Psi}\right)\leqq m\left(r,\frac{1}{f'}\right)+m\left(r,\frac{f'}{\Psi}\right),$$

aus der wir eine untere Schranke für das zweite Glied in (10) eintragen:

$$(11) \qquad T(r, f') \geqq N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{1}{\psi}\right) - m\left(r, \frac{f'}{\psi}\right) + O(1).$$

Wir wenden den Ersten Hauptsatz ein zweites Mal an, diesmal auf die Funktion $\psi(x)$:

$$m\left(r, \frac{1}{\psi}\right) = N(r, \psi) - N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + m(r, \psi) + O(1)$$

$$= qN(r, f) - \sum_{1}^{q} N(r, a_k) + m(r, \psi) + O(1).$$

In der nächsten Nummer werden wir den Beweis der Ungleichung geben

$$(12) \qquad m(r, \psi) \geqq q\, m(r, f) + O(1).$$

Trägt man dies alles in (11) ein und faßt nach dem Ersten Hauptsatz $N(r, f) + m(r, f) - N(r, a_k) = m(r, a_k) + O(1)$ zusammen, so ergibt sich

$$(13) \qquad T(r, f') \geqq N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{k=1}^{q} m(r, a_k) - m\left(r, \frac{f'}{\psi}\right) + O(1).$$

Die a_k sind als verschieden angenommen; wegen der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\psi}$ und (6) ist auf $m\left(r, \frac{f'}{\psi}\right)$ der Hilfssatz 1 anwendbar und man erhält, zusammenfassend aus (9) und (13) den

Satz 1 (Hauptungleichung): *Die Charakteristik $T(r, f')$ der Ableitung einer meromorphen Funktion $f(x)$ genügt der Ungleichung*

$$(14) \qquad N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{k=1}^{q} m(r, a_k) - O[\log r\, T(r, f)]$$

$$\leqq T(r, f') \leqq N(r, f') + m(r, \infty) + O[\log r\, T(r, f)],$$

ausgenommen höchstens im Falle unendlicher Ordnung eine Wertmenge der r von endlichem Gesamtmaß. Die a_k sind $q \geqq 1$ verschiedene, endliche komplexe Zahlen.

Berücksichtigt man noch

$$(15) \quad N\left(r, \frac{1}{f'}\right) = N_1(r) - N_1(r, \infty), \quad N(r, f') = N(r, f) + \bar{N}(r, f),$$

so kann man den beiden Außengliedern eine Gestalt geben, in der nur auf $f(x)$ bezogene Größen erscheinen.

5. Nachtrag; Beweis der Ungleichung (12). Aus der Identität

$$f^q \prod_{k=1}^{q} \left(1 - \frac{a_k}{f}\right) \equiv \psi$$

folgt, sobald $|f(x)| > 2a$ ist, mit $a = max\,|a_k|$,

$$|f(x)|^q < 2^q\, |\psi(x)|.$$

Wir schätzen $q\,m(r, f)$ ab, indem wir das Integral zerlegen und diese Ungleichung benutzen:

$$q\,m(r, f) \equiv \frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi}{}^{+}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{q}{2\pi}\int_{|f|\leqq 2a}{}^{+}\log|f|\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{|f|>2a}{}^{+}\log|f|^q\,d\varphi$$

$$< q\,\log^{+} 2a + q\,\log 2 + m(r, \psi)$$

w. z. b. w.

II. Unmittelbare Folgerungen aus der Hauptungleichung.

6. Der zweite Hauptsatz. Läßt man in der Hauptungleichung das Mittelglied fort, trägt (15) ein, benutzt (3) und fügt dann beiderseits $m(r, \infty)$ hinzu, so folgt

$$N_1(r) + \sum_{k=1}^{q} m(r, a_k) + m(r, \infty) \leqq 2\,T(r, f) + O\,[\log r\,T(r, f)]\,.$$

Während in der Hauptungleichung endliche und unendliche Stellensorten getrennt erschienen, sind sie hier gleichberechtigt; um das zum Ausdruck zu bringen, ändern wir die Bezeichnung und formulieren

Zweiter Hauptsatz: *Sind z_k $q \geqq 1$ endliche oder unendliche, aber untereinander verschiedene Stellensorten, so gilt die Ungleichung*

$$(16)\qquad N_1(r) + \sum_{k=1}^{q} m(r, z_k) \leqq 2\,T(r, f) + O\,[\log r\,T(r, f)]$$

für alle r, ausgenommen höchstens im Falle unendlicher Ordnung eine Wertmenge von endlichem Gesamtmaß.

Gewöhnlich findet man den Hauptsatz in einer etwas anderen Gestalt, nämlich

$$(17)\qquad (q-2)\,T(r, f) \leqq \sum_{k=1}^{q} N(r, z_k) - N_1(r) + O\,[\log r\,T(r, f)]\,.$$

Sie geht aus der obigen hervor, wenn man nach dem ersten Hauptsatz $m(r, z_k) = T(r, f) - N(r, z_k) + O(1)$ einträgt. Wie man unmittelbar abliest, gibt die Abschätzung von $T(r, f)$ nach oben erst für $q \geqq 3$ ein nichttriviales Resultat. Die beiden Formeln (16) und (17) sind einander völlig äquivalent.

Eine meromorphe Funktion nehme drei Werte z_1, z_2, z_3 nur endlich oft an; dann ist nach (2) und (17) $T(r, f) = O(\log r)$ und nach dem ersten Hauptsatz *werden auch alle andern Werte nur endlich oft angenommen*: also ist die Funktion rational und hat im Unendlichen keine wesentliche Singularität. Das ist der Picardsche Satz. Es kann also höchstens *zwei* Picardsche Ausnahmewerte geben, die nur endlich oft angenommen werden. Ebenso leicht folgt der Picard-Borelsche Satz: *es kann höchstens zwei Borelsche Ausnahmewerte geben, für die die Anzahlfunktion $N(r, z)$ von kleinerer Wachstumsordnung ist als $T(r, f)$.*

7. Die Defektrelation. Um weitere Folgerungen aus dem Hauptsatz zu ziehen, bezeichnen wir als (Nevanlinnaschen) *Defekt der Stellensorte z* die Größe

$$\delta(z) = \underline{\lim}\, \frac{m(r, z)}{T(r, f)} = 1 - \overline{\lim}\, \frac{N(r, z)}{T(r, f)} . \tag{18}$$

Wir lassen nun in (16) — vorläufig — das Glied $N_1(r)$ weg, teilen durch $T(r, f)$ und gehen dann zur Grenze über, wobei wir links immer den $\underline{\lim}$ bilden[2]. Es folgt $\sum_{k=1}^{q} \delta(z_k) \leqq 2$. Nun beachte man: wenn von irgendeiner Menge nichtnegativer Zahlen die Summe aus je endlich vielen unter einer festen Schranke liegt, so enthält die Menge nur abzählbar viele positive Zahlen, die eine konvergente Reihe bilden. Es besteht also der schon eingangs genannte Satz:

Eine meromorphe Funktion besitzt nur höchstens abzählbar viele Stellensorten mit positivem Defekt $\delta(z_k)$, und es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta(z_k) \leqq 2 . \tag{19}$$

Man sieht aus der Definition des Defekts, was dieser Satz bedeutet: im allgemeinen ist der $\overline{\lim}\, \frac{N(r, z)}{T(r, f)} = 1$, nur für gewisse Ausnahmewerte ist er kleiner. Man wird mit Recht diese Größe als eine Art »(obere) Dichte der Verteilung der z-Stellen« ansprechen können.

Einen Wert z_k mit positivem Defekt nennen wir im folgenden einen Nevanlinnaschen Ausnahmewert.

Unsere Defektrelation enthält den Picardschen Satz, weil ja für einen Picardschen Ausnahmewert notwendig $\delta = 1$ sein muß; dagegen liegt der Picard-Borelsche Satz nach einer etwas anderen Richtung, so daß wir Borelsche Ausnahmewerte gesondert behandeln müssen.

---

[2] Für Funktionen unendlicher Ordnung muß bei den Grenzübergängen das Restglied beachtet werden, das wir immer nur kurz durch $O[\log r T]$ angedeutet haben. Man erinnere sich, daß nach (9) und (13) der Rest aus mehreren Posten der Form $m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right)$, die in Hilfssatz 1 betrachtet war, und aus $O(1)$-Größen bestand; wie üblich, bezeichnen wir sie zusammenfassend mit $S(r)$. In den Ausnahmeintervallen von endlichem Gesamtmaß gilt nun nicht mehr wie sonst $S(r) = O[\log r T]$, und es ist durch nichts ausgeschlossen, daß S hier nahe an T heranreicht — sei es, daß es von gleicher Ordnung ist oder daß doch wenigstens der $\lim S : T > 0$ wird.

Man hat also bei unendlicher Ordnung entweder ein für allemal die Ausnahmeintervalle auszuschließen — oder man formuliert die Sätze für eingeschränkte Funktionenklassen, bei denen das Restglied keinen Schaden stiftet, etwa jene, wo Ausnahmeintervalle zwar auftreten können, für die aber doch $S(r) = o[T(r)]$ gilt. Da man einen ziemlich großen Spielraum in der Größenordnung hat, wird man hoffen können, daß diese Voraussetzung einen weiten Bereich der Funktionen unendlicher Ordnung erfaßt.

Ohne eine solche Einschränkung kann man nur schwächere Aussagen machen, die sich nach derselben Methode gewinnen lassen, die wir anwenden. Es dürfte sich erübrigen, bei jedem Satze an diese Dinge zu erinnern. Andere Restabschätzungen, die aber diese Schwierigkeit auch nicht beheben, findet man in [4 a b] und [7 b].

8. Nevanlinnasche Ausnahmewerte der Ableitung. Wir betrachten die erste Hälfte der Hauptungleichung und ersetzen $T(r, f')$ nach (10); es bleibt die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{q} m(r, a_k) - O[\log r T(r, f)] \leqq m\left(r, \frac{1}{f'}\right). \tag{20}$$

Nun teilen wir durch die zweite Hälfte der Hauptungleichung, die man nach (9) ja auch so schreiben kann

$$T(r, f) + \overline{N}(r, f) + O[\log r T(r, f)] \geqq T(r, f'), \tag{21}$$

und erhalten

$$\frac{1}{1 + \overline{N}(r, f) : T(r, f)} \sum_{k=1}^{q} \frac{m(r, a_k)}{T(r, f)} - \frac{O[\log r T(r, f)]}{T(r, f) + \overline{N}(r, f)} \leqq \frac{m\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')}. \tag{22}$$

Wir setzen $\overline{\lim}\, \overline{N}(r, f) : T(r, f) = 1 - \vartheta(\infty)$; die Größe $\vartheta(\infty)$, eine dem Defekt ähnliche Bildung, liegt wegen (3) und dem ersten Hauptsatz im Intervall $0 \leqq \delta(\infty) \leqq \vartheta(\infty) \leqq 1$. Wir kommen im III. Abschnitt ausführlicher auf solche Größen zu sprechen und werden dort ihre Bedeutung erläutern. Nach dieser Vorbereitung bilden wir in (22) die unteren Häufungswerte und erhalten als eine der wichtigsten Anwendungen der Hauptungleichung den

Satz 2. *Hat eine meromorphe Funktion endliche Nevanlinnasche Ausnahmewerte a_k, so hat ihre Ableitung den Nevanlinnaschen Ausnahmewert Null mit dem Defekt*

$$\delta'(0) \geqq \frac{1}{2 - \vartheta(\infty)} \sum_{1}^{\infty} \delta(a_k).$$

Die Summe über 1 bis ∞ konnten wir aus derselben Überlegung heraus schreiben wie im vorigen Paragraphen. Wegen der Bedeutung dieses Ergebnisses verweisen wir auf den letzten Absatz von § 1 und auf § 11.

9. Picardsche und Borelsche Ausnahmewerte. Für diese kann man ganz ähnliche Sätze gewinnen; dafür genügt es schon, von der Ungleichung (16) auszugehen, die wir für $q = 2$ benutzen. Aus (15) und (16), zusammen mit dem ersten Hauptsatz, folgt

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \leqq N_1(r) \leqq 2\, T(r, f) - m(r, z_1) - m(r, z_2) + O[\log r T]$$

oder

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \leqq N(r, z_1) + N(r, z_2) + O[\log r T(r, f)]. \tag{23'}$$

Ferner ist nach (15)

$$N(r, f') \leqq 2\, N(r, f). \tag{23''}$$

Hat nun $f(x)$ zwei Borelsche Ausnahmewerte z_1, z_2, d. h. ist die Ordnung von $N(r, z)$ für diese zwei Stellensorten kleiner als die Ordnung von $T(r, f)$,

so gilt dasselbe wegen (23′) für $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ und, falls einer der Ausnahmewerte gleich ∞ ist, auch für $N(r, f')$. Nach Valiron [7b, § 5] sind die Ordnungen von $T(r, f)$ und $T(r, f')$ dieselben; daher gilt[3]

Satz 3. *Hat eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung zwei Borelsche Ausnahmewerte z_1, z_2, so hat ihre Ableitung den Borelschen Ausnahmewert Null. Ist einer der beiden Ausnahmewerte gleich ∞, so hat auch die Ableitung zwei Borelsche Ausnahmewerte, nämlich Null und Unendlich.*

Der Satz gilt wörtlich ebenso, wenn man von Picardschen Ausnahmewerten spricht, weil ja bei Funktionen endlicher Ordnung das Restglied überall $= O[\log r]$ ist. Er gilt bei Borelschen Ausnahmewerten auch für jene Funktionen unendlicher Ordnung, deren Restglied von kleinerer Ordnung[2] bleibt als $T(r, f)$. — Hat $f(x)$ einen endlichen, einen unendlichen Ausnahmewert (in obigem Sinne), so haben *alle* Ableitungen die Ausnahmewerte 0 und ∞. Sind aber beide Ausnahmewerte endlich, so hat zwar f' noch den Picard- oder Borelschen Ausnahmewert 0, bei f'' dagegen kann diese Eigenschaft schon verlorengehen; ja dies muß sogar eintreten, sobald f zwei endliche Picardsche, Borelsche oder Ausnahmewerte mit dem extremen Defekt $\delta = 1$ besitzt. Der Beweismethode wegen müssen wir aber diese Dinge auf den nächsten Abschnitt verschieben (vgl. § 15).

Seit einigen Jahren kennt man den Satz (Pólya-Saxer [6a]): *Hat eine ganze transzendente Funktion nur endlich viele a-Stellen* (den Picardschen Ausnahmewert a), *so nehmen alle ihre Ableitungen $f'(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$ jeden endlichen Wert unendlich oft an bis auf höchstens Null* (höchstens 0 ist Picardscher Ausnahmewert). Während hier nur die *Möglichkeit* eines Ausnahmewertes in der Sorte Null offenbleibt, haben wir durch unsere Sätze 2, 3 Genaues über die *Notwendigkeit* erfahren, daß — und wie stark — ein Ausnahmecharakter der Sorte Null schon unter weit schwächeren Voraussetzungen eintritt.

III. Weitere Folgerungen der Hauptungleichung.

10. Definitionstabelle der Defekte und Verzweigungsgrößen. Für die weitere Ausnutzung der Hauptungleichung brauchen wir eine Reihe von Größen, die teils in der Literatur schon mehrfach benutzt wurden; der Übersicht halber geben wir eine kurze Tabelle dieser Bezeichnungen, auf die man bei der Lektüre des Folgenden bei Bedarf zurückgreifen möge. Einheitlich bezeichnen kleine Buchstaben untere, große die entsprechenden oberen Häufungswerte, so daß wir nicht alle Formeln in extenso anzuschreiben brauchen.

a) Nevanlinnascher Defekt oder Defekt schlechthin

$$\delta(z) = \underline{\lim}\,\frac{m(r, z)}{T(r, f)} = 1 - \overline{\lim}\,\frac{N(r, z)}{T(r, f)}.$$

[3] Hr. Saxer findet [6b] ähnliche, aber minder scharfe Aussagen für Picardsche Ausnahmewerte. Für Borelsche Ausnahmewerte ganzer Funktionen ist Satz 3 auch schon von Hrn. Varopoulos [8] angegeben.

Es gibt höchstens abzählbar viele Stellensorten mit positivem $\delta(z)$ (Nevanlinnasche Ausnahmewerte).

b) Valironscher Defekt[4]

$$\Delta(z) = \overline{\lim} \frac{m(r,z)}{T(r,f)} = 1 - \underline{\lim} \frac{N(r,z)}{T(r,f)}.$$

Die Stellensorten mit $\Delta(z) > 0$ (Valironsche Ausnahmewerte[5]) aus dem Kreise $|z| \leqq R$ der z-Ebene, über der sich die Riemannsche Fläche von $f(x) = z$ ausbreitet, kann man einschließen in eine Menge von Kreisen, deren Radiensumme beliebig klein vorgegeben werden kann: Sie bilden eine Menge vom linearen Maß Null. [7 b.]

c) Index der algebraischen Verzweigtheit einer Stellensorte

$$\mu(z) = \underline{\lim} N_1(r,z) : T(r,f).$$

d) Gesamtindex der algebraischen Verzweigtheit für die Riemannsche Fläche der meromorphen Funktion

$$\phi = \underline{\lim} N_1(r) : T(r,f).$$

e) Gesamtindex der algebraischen Verzweigtheit im endlichen Teil der Riemannschen Fläche

$$\phi_e = \underline{\lim} N\left(r, \frac{1}{f'}\right) : T(r,f) = \underline{\lim} [N_1(r) - N_1(r,\infty)] : T(r,f).$$

f) Verzweigtheit einer Stellensorte

$$\vartheta(z) = \underline{\lim} [1 - \overline{N}(r,z) : T(r,z)] = 1 - \overline{\lim} \overline{N}(r,z) : T(r,f).$$

Wegen (3) und (4) gelten übrigens die Ungleichungen

$$\vartheta(z) \geqq \delta(z) + \mu(z), \quad \phi \geqq \sum \mu(z). \tag{24}$$

11. Allgemeine Defektrelationen. Nach (3) und (4) könnte man der linken Seite von (16) auch eine der Formen geben

$$\sum_{k=1}^{q} N_1(r, z_k) + \sum_{k=1}^{q} m(r, z_k), \tag{16'}$$

$$\sum_{k=1}^{q} [T(r,f) - \overline{N}(r, z_k)]. \tag{16''}$$

[4] Man kann Picard- und Borelsche Ausnahmewerte nicht durch Vorschriften über Defekte charakterisieren. Wohl aber ist für jene $\delta(z) = 1$ (trivial), für diese $\Delta(z) = 1$. Zum Beweise bemerke man, daß aus der Annahme $\Delta(z) = 1 - k$, mit $k = \underline{\lim} N(r,z) : T(r) > 0$ folgt: Für jedes ε aus $k > \varepsilon > 0$ und alle $r > R(\varepsilon)$ ist

$$N(r,z) > (k-\varepsilon) T(r) \quad \text{oder} \quad \frac{\log N(r,z)}{\log r} > \frac{\log (k-\varepsilon)}{\log r} + \frac{\log T(r)}{\log r}.$$

Daraus aber — weil das erste Glied rechts mit $r \to \infty$ gegen 0 strebt, ein Widerspruch gegen die Annahme eines Borelschen Ausnahmewertes. Genau so schließt man für den verallgemeinerten Ordnungsbegriff von Lindelöf.

[5] Für Valironsche Ausnahmewerte liefert (22) ein Analogon zu Satz 2. Auch eine obere Schranke wie in Satz 5 erhält man leicht.

Durch Grenzübergang wie in § 7 folgen aus (16—16″) der Reihe nach die Beziehungen

$$(25—25'') \qquad \phi + \sum_1^\infty \delta(z_k) \leqq 2\,, \qquad \sum_1^\infty \mu(z_k) + \sum_1^\infty \delta(z_k) \leqq 2\,, \qquad \sum_1^\infty \vartheta(z_k) \leqq 2\,,$$

die wir als Defektrelationen bezeichnen[6]. Man kann übrigens, wenn $f(x)$ der Funktionenklasse angehört, deren Restglied $S = o(T)$ ist, bzw. unter den in Anmerkung 2 genannten Einschränkungen noch etwas schärfere Relationen erhalten, indem man in einem der Posten einen limes superior bildet[7]; diese Bemerkung kann manchmal von Nutzen sein.

Die Defektrelationen verschärfen die früher gegebene, speziellere Formel (19) und damit die Picardschen Sätze und werfen ein neues Licht auf sie: neben die Ausnahmewerte treten die multiplen Stellen — die algebraischen Singularitäten der Umkehrfunktion. Eine Funktion, die viele multiple Stellen hat, hat keine oder doch nur schwache Ausnahmewerte.

Man wird fragen, welche Rolle den Ausnahmewerten zukommt, die nun mit den algebraischen Singularitäten der Umkehrfunktion in einer Reihe stehen. Ein Defekt $\delta(z)$ gibt einerseits an, daß $f(x)$ den Wert z weniger oft annimmt als es die Regel ist, oder auf der Riemannschen Fläche von $f(x)$ gedeutet, daß die Fläche den Wert z mit weniger Blättern überdeckt als andere Werte: sie hat also über z eine Lücke, mit anderen Worten eine logarithmische Verzweigungsstelle. Dies bleibt freilich nur eine heuristische Überlegung. Man kann die Defekte noch anders deuten, aus ihrer Definition mittels $m(r, z)$. Hier wird man auf die Vermutung geführt, daß ein Wert z mit $\delta(z) > 0$, ein Nevanlinnascher Ausnahmewert, ein asymptotischer Wert von $f(x)$ sein müsse[8]. Nun sind aber die Menge der asymptotischen Werte von $f(x)$ einerseits und die der transzendenten Verzweigungsstellen der Riemannschen Fläche von $f(x)$ anderseits nach einem bekannten Satze gleich. Es gibt nach Iversen [3] zwei Arten transzendenter Verzweigungsstellen: indirekt kritische, die z. B. durch Häufung algebraischer Verzweigungen entstehen und logarithmische oder direkt kritische. Erstere können aber, wenn man von der Fläche von f zu der von f' übergeht, verlorengehen: Die Fläche der Ableitung braucht gar keine transzendenten Stellen zu haben, wenn die Fläche von f selbst nur indirekt kritische Stellen aufwies. Unsere Sätze des vorigen Abschnitts und einige im folgenden lehren aber gerade, daß dies bei transzendenten

[6] Nach (24) ist die zweite Relation am schwächsten. Ist $\phi > 0$ und hat etwa $f(x)$ in jeder Stellensorte höchstens endlich viel mehrfache Stellen, so ist die erste Relation besser als die dritte.

[7] Das Recht dazu gibt uns das Lemma: *Sind $u_i(r)$ endlich viele nicht negative Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich, dann gelten, sobald man r gegen einen Grenzwert streben läßt, die Beziehungen*

$$\overline{\lim} \sum u_i(r) \geq \overline{\lim}\, u_k(r) + \sum_{i \neq k} \underline{\lim}\, u_i(r)$$

und ähnliche für die Abschätzung des $\underline{\lim}$ einer Summe nach oben bzw. eines Produktes.

[8] Man vergleiche zu diesem Abschnitt [4b, § 46]. Auf Mischtypen transzendenter Stellen gehen wir nicht ein.

Stellen, die Ausnahmewerten entsprechen, gewiß nicht eintreten kann. Wir können also die NEVANLINNAsche Vermutung[9], daß jeder Wert mit positivem Defekt asymptotischer Wert von $f(x)$ sei, dahin präzisieren:

VERMUTUNG: *Die Werte mit positivem Defekt (NEVANLINNAsche Ausnahmewerte) sind direkt-kritische transzendente Verzweigungsstellen der RIEMANNschen Fläche von $f(x)$.*

Die Defektrelationen geben also Bedingungen für den Verzweigungscharakter einer meromorphen Funktion (bzw. ihrer Inversen) und sind in diesem Sinne ebenso wie die PICARDschen Sätze Aussagen topologischer Natur. Sie geben aber nur eine Auskunft über eine *obere* Grenze des Verzweigungscharakters. Wie steht es mit einer *unteren* Grenze? Man sieht unmittelbar, daß es einer gewissen Mindestzahl von Verzweigungsstellen bedarf, um eine unendlich-vielblättrige Fläche »zusammenzuhalten«. Es liegt nahe, zu vermuten — und man kann das auch durch eine ganze Reihe heuristischer Überlegungen stützen —, daß der Verzweigungscharakter einer RIEMANNschen Fläche *genau gleich* 2 sein muß, sobald es sich um die Fläche einer meromorphen Funktion handelt. Aus dieser Vermutung folgt spezieller, daß der Gesamtverzweigungscharakter der Fläche außerhalb einer Stellensorte (etwa in ihrem endlichen Teil) nicht kleiner als 1 sein kann.

Es gibt viele meromorphe Funktionen, für die die linke Seite der Defektrelationen den Wert 2 schon annimmt; wir sagen dann, *die Defektrelation sei genau*; in diesem Abschnitt werden wir einige Sätze geben, die von der Voraussetzung, man kenne eine genaue Defektrelation, Gebrauch machen. Im letzten Abschnitt beschäftigen wir uns dagegen mit Funktionen, deren Defektrelation Mängel aufweist — wenigstens in der jetzigen Gestalt. Es wird sich dabei zeigen, daß die linke Seite der Hauptungleichung bzw. des II. Hauptsatzes eine zu unscharfe untere Schranke bildet.

12. Der Quotient $T(r, f') : T(r, f)$. Aus der Hauptungleichung erhält man nach Division durch $T(r, f)$ und Grenzübergang den

SATZ 4. *Der Quotient aus den Charakteristiken der Ableitung und der meromorphen Funktion selbst genügt den Ungleichungen*

$$(26)\quad v_e \leqq \underline{\lim}\,\frac{T(r, f')}{T(r, f)} \leqq 2 - \Theta(\infty), \quad V_e \leqq \overline{\lim}\,\frac{T(r, f')}{T(r, f)} \leqq 2 - \vartheta(\infty).$$

Dabei steht v_e zur Abkürzung für einen beliebigen der Ausdrücke

$$(27)\qquad \phi_e + \sum \delta(a_k), \qquad \sum \mu(a_k) + \sum \delta(a_k), \qquad \sum \vartheta(a_k)$$

und V_e für einen dieser Ausdrücke, in dem ein limes superior einen limes inferior ersetzt. Die Summe ist über alle endlichen Stellensorten zu erstrecken.

Es ist ein bekannter Satz der Theorie der ganzen Funktionen [7a], daß Funktion und Ableitung von gleicher Wachstumsordnung sind. Hr. VALIRON gibt eine Beweisskizze für denselben Satz bei meromorphen Funktionen [7b]. Lieferten unsere Abschätzungen (26) stets positive untere Schranken v_e, so folgte dieser Satz unmittelbar aus obigem; das ist aber keineswegs immer der Fall: es gibt meromorphe Funktionen, für die alle Ausdrücke (27) verschwinden (ein Beispiel besprechen wir im IV. Abschnitt). Immerhin kann

man den Satz von der Gleichheit der Ordnung für alle die Funktionen erschließen, die einen endlichen Nevanlinnaschen Ausnahmewert haben. Aus $T(r, f') \geqq N(r, f') \geqq N(r, f) \geqq N_1(r, \infty)$ kann man einen ähnlichen Schluß mit Hilfe des Verzweigungsverhaltens im Unendlichen ziehen, da ja durch Grenzübergang folgt:

$$\underline{\lim}\ T(r, f') : T(r, f) \geqq 1 - \Delta(\infty) \geqq \mu(\infty) .$$

Man bezeichnet als Typus τ einer Funktion endlicher Ordnung ρ den $\lim T(r, f) : r^\rho$ und spricht von Minimal-, Normal- oder Maximaltyp, je nachdem $\tau = 0$, endlich oder unendlich ist. Der Typus der Ableitung τ' genügt dann der Beziehung

$$v_e \tau \leqq \tau' \leqq (2 - \vartheta(\infty))\,\tau \tag{28}$$

und ist also sicher von derselben Art wie der der Funktion selbst, wenn uns die Defektrelationen nicht im Stiche lassen, sondern ein positives v_e liefern. Dasselbe gilt für die Valironschen Konvergenz- und Divergenzklassen. Wir bemerken, daß kein Beispiel einer Funktion endlicher Ordnung bekannt ist, wo v_e verschwindet.

In seinem Buche über die Theorie der meromorphen Funktionen [4 b, S. 104] hat Hr. Nevanlinna die Vermutung geäußert, daß die Unbestimmtheitsgrenzen des Quotienten $T(r, f') : T(r, f)$ zusammenfallen mit denen von $\overline{N}(r, f) : T(r, f)$ vermehrt um 1. Man kann dies noch nicht allgemein beweisen, wohl aber in dem wichtigen Spezialfall, daß man für $f(x)$ schon eine genaue Defektrelation der Form $v_e + \Theta(\infty) = 2$ bzw. $V_e + \vartheta(\infty) = 2$ kennt; dann folgt die Richtigkeit der Vermutung unmittelbar aus Satz 4.

13. Obere Schranke für den Defekt $\delta'(0)$. Wir benutzen die Identität

$$\frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f)} \equiv \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')} \cdot \frac{T(r, f')}{T(r, f)} \tag{29}$$

und gehen zur Grenze über, wobei überall die lim gebildet werden mögen. Nach den Definitionen von § 10 und Satz 4 ist dann $\Phi_e \leqq (1 - \delta'(0))(2 - \vartheta(\infty))$; Auflösung nach $\delta'(0)$ gibt sofort

Satz 5. *Der Defekt $\delta'(0)$ für die Stellensorte Null der Ableitung von $f(x)$ liegt nicht über der Schranke $\dfrac{2 - \vartheta(\infty) - \Phi_e}{2 - \vartheta(\infty)}$; hat $f(x)$ eine genaue Defektrelation der Form $\Phi_e + \sum \delta(a_k) + \vartheta(\infty) = 2$, so ist wegen Satz 2 und obiger Schranke genau $\delta'(0) = \dfrac{\sum \delta(a_k)}{2 - \vartheta(\infty)}$.*

14. Unendlich als Ausnahmewert. Ähnlich wie eben gehen wir aus von der Identität

$$\frac{N(r, f')}{T(r, f')} \equiv \left[\frac{N(r, f)}{T(r, f)} + \frac{\overline{N}(r, f)}{T(r, f)}\right] \cdot \frac{T(r, f)}{T(r, f')} \tag{30}$$

und schätzen mit ihrer Hilfe den $\overline{\lim}\, N(r, f') : T(r, f')$ nach oben ab. Die Definitionen von § 10 und Satz 4 liefern

$$(31) \qquad 1 - \frac{2 - \delta(\infty) - \vartheta(\infty)}{v_e} \leqq \delta'(\infty) .$$

Daraus ziehen wir einen zweifachen Schluß:

1. $f(x)$ habe einen Ausnahmewert in ∞ mit extremem Defekt $\delta(\infty) = 1$. Dann ist auch $\vartheta(\infty) = 1$ und damit auch $\delta'(\infty) = 1$, wenn nur $v_e > 0$ bekannt ist. Insbesondere: hat $f(x)$ einen starken Ausnahmewert in ∞ mit $\delta(\infty) = 1$ und im Endlichen irgendwelche Ausnahmewerte, derart, daß $\sum \delta(z_k) = 2$, so haben auch alle Ableitungen eine genaue Defektrelation, und zwar die Ausnahmewerte 0, ∞ mit extremen Defekten 1.

2. Ist irgendeine genaue Defektrelation für $f(x)$ von der Form $v_e + \vartheta(\infty) = 2$ bekannt, so ist

$$(31') \qquad \delta'(\infty) \geq \delta(\infty) : v_e .$$

Eine obere Schranke für $\delta'(\infty)$ ergibt sich aus (30) in ähnlicher Weise, wenn man den $\overline{\lim}\, N(r, f') : T(r, f')$ nach unten abschätzt und das Lemma in Fußnote 7 ausnutzt. Man erhält, mit einer Unschärfe, die durch das Rechnen mit Häufungswerten bedingt ist, z. B.

$$(32) \qquad \delta'(\infty) \leqq \Delta(\infty) : [2 - \vartheta(\infty)] .$$

15. Ergänzungen zu § 9. Wie schon bemerkt, hat Hr. Saxer ein dem Satz 3 ähnliches Ergebnis gefunden; er benutzt dabei ein Zwischenergebnis, das wir etwas allgemeiner hier wiedergeben. Nicht jede meromorphe Funktion ist als Ableitung einer meromorphen aufzufassen; ist dies aber möglich, so gelten besondere Eigenschaften. Eine solche Funktion kann natürlich keine einfachen Pole haben, sie hat also nur mehrfache Pole, oder sie ist ganz. Daraus schließen wir

Satz 6. *Ist eine meromorphe Funktion Ableitung einer meromorphen, so kann sie nicht zwei endliche Ausnahmewerte mit dem extremen Defekt Eins haben. Hat sie zwei Werte mit extremem Defekt, so ist notwendig einer davon unendlich.*

In der Tat, wir brauchen nur den Fall betrachten, daß die Funktion mehrfache Pole hat; weil eine genaue Defektrelation n. V. vorliegt, muß der Index der algebraischen Verzweigtheit $\mu(\infty)$ verschwinden, und daraus folgt, wegen der evidenten Beziehung $N(r, \infty) \leq 2 N_1(r, \infty)$, sofort $\Delta(\infty) = 1$. Wären nun die vorausgesetzten Ausnahmewerte beide endlich, so hätte man $\delta(z_1) + \delta(z_2) + \Delta(\infty) = 3$ im Widerspruch mit den Defektrelationen.

Ein paralleler Satz gilt wieder für Borelsche *Ausnahmewerte, wenn die Funktion $f(x)$ der Restgliedbedingung $S(r) = o[T(r)]$ genügt*[2]*, jedenfalls also für Funktionen endlicher Ordnung.*

Zum Beweise werde eine Folge $r_1, r_2, \cdots$ so gewählt, daß bei ihrer Durchlaufung der $\lim_{i \to \infty} \frac{\log T(r_i, f)}{\log r_i}$ vorhanden und gleich der Ordnung $\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$ von $f(x)$ ist. Sind dann z_k $(k = 1, 2)$ Borelsche Ausnahmewerte, so ver-

schwindet für diese Folge $\lim_{i\to\infty} \frac{N(r_i, z_k)}{T(r_i, f)}$, weil sonst gegen die Annahme $N(r, z_k)$ und $T(r, f)$ von gleicher Wachstumsordnung wären. Der erste Hauptsatz lehrt dann $\lim_{i\to\infty} \frac{m(r_i, z_k)}{T(r_i, f)} = 1$. Nach dem zweiten Hauptsatz (16) muß deshalb $\lim_{i\to\infty} \frac{N_1(r_i)}{T(r_i, f)} = 0$ sein, und daraus folgt wegen $N_1(r) \geqq N_1(r, \infty)$ $\geqq \frac{1}{2} N(r, \infty)$ wie oben $\lim_{i\to\infty} \frac{m(r_i, \infty)}{T(r_i, f)} = 1$. Wären nun z_1, z_2, ∞ verschieden, so gälte $m(r_i, z_1) + m(r_i, z_2) + m(r_i, \infty) > (3 - \varepsilon)\, T(r_i, f)$ für $\varepsilon > 0$ und $r_i > R(\varepsilon)$ im Widerspruch mit (16); wegen der Voraussetzung $S(r) = o[T(r)]$ müßte ja die linke Seite für *alle* genügend großen r kleiner als $(2 + \varepsilon)\, T(r, f)$ bleiben.

Ein Beispiel zu diesen Dingen liefert die Funktion $f(x) = tg\, x$, mit den zwei endlichen Picardschen Ausnahmewerten $i, -i$. Wie in § 9 bemerkt, brauchen dann die höheren Ableitungen keine Picardschen Ausnahmewerte mehr zu haben. Satz 6 lehrt schärfer, daß sie von f'' an keine solchen Ausnahmewerte mehr haben können. Es ist $f'(x) = \cos^{-2} x$, wofür man leicht $\delta'(0) = 1$ (Picardscher AW), $\Phi_e = \mu(1) = \frac{1}{2}$ und $\vartheta(\infty) = \mu(\infty) = \frac{1}{2}$ berechnet. Daher folgt nach Satz 2 und einer dem Beweis von Satz 4 ähnlichen Abschätzung für die Sorte Null von $f''(x) = 2 \sin x \cos^{-3} x$ $\delta''(0) = \Delta''(0) = \frac{2}{3}$; es kann also nicht einmal ein Borelscher Ausnahmewert vorliegen, weil da $\Delta''(0) = 1$ sein müßte[4].

IV. Einige Beispiele zu offenen Fragen der Theorie.

16. Wir wollen in diesem Abschnitt noch kurz auf einige meromorphe Funktionen hinweisen, die geeignet scheinen, gewisse offene Fragen der Theorie zu beleuchten. Dazu werden wir den folgenden Hilfssatz mit Nutzen[9] anwenden können.

Hilfssatz 2. *Sind a, b irgend zwei endliche oder unendliche Stellensorten, so gilt zwischen den Anzahlen n und den Anzahlfunktionen N stets die Beziehung*

$$(33)\quad 0 \leqq \lim \frac{n(r, a)}{n(r, b)} \leqq \underline{\lim} \frac{N(r, a)}{N(r, b)} \leqq \overline{\lim} \frac{N(r, a)}{N(r, b)} \leqq \overline{\lim} \frac{n(r, a)}{n(r, b)} \leqq \infty.$$

Insbesondere zieht die Existenz von $\lim n(r, a) : n(r, b)$ die des $\lim N(r, a) : N(r, b)$ nach sich, und beide Grenzwerte sind gleich.

[9] Man wird es als eine Stütze für die bisher unbewiesene Nevanlinnasche Vermutung, daß Werte mit $\delta > 0$ asymptotische Werte seien, ansehen können, wenn man für bekannte Funktionenklassen, die *gar keine* asymptotischen Werte besitzen, zeigen kann, daß sie *auch keine* Nevanlinnaschen Ausnahmewerte haben. Dazu verhilft eine Schlußweise wie in § 17 auf Grund des Hilfssatzes 2 für die *Juliaschen Ausnahmefunktionen*; Hr. Ostrowski hat gezeigt, daß für eine solche $|n(r, 0) - n(r, \infty)|$ für alle r unter einer festen Konstanten liegt [5]. Daraus folgt, da auch $f(x) - a$ eine Juliasche Ausnahmefunktion ist, sofort, daß für alle a der $\lim n(r, a) : n(r, \infty) = 1$ ist, so daß keine Stellensorte einen positiven Defekt haben kann.

Wegen der Symmetrie bedarf es eines Beweises nur für die vorletzte Ungleichung, wenn $\overline{\lim}\, n(r,a):n(r,b) = k$ endlich ist. Dies ist der Behauptung äquivalent, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R_1(\varepsilon)$ existiert, so daß für jedes $r > R_1(\varepsilon)$

$$n(r,a) - k\,n(r,b) < \varepsilon\, n(r,b)$$

gilt. In jedem endlichen Kreis liegen nur endlich viele a- und b-Stellen, so daß $n(r,a) - k\,n(r,b) < c(R_1)$ für $r \leqq R_1$. Es bedeutet nur Einschränkung der Schreibarbeit, wenn man annimmt, daß im Nullpunkt keine a- oder b-Stelle liege; der Beweis gilt sonst genau so. Nach (2) wird also

$$N(r,a) - k\,N(r,b) = \int_\varrho^r [n(t,a) - kn(t,b)]\frac{dt}{t} = \int_\varrho^{R_1} + \int_{R_1}^r$$

$$< c(R_1)\log\frac{R_1}{\varrho} + \varepsilon[N(r,b) - N(R_1,b)]$$

$$\leqq 2\varepsilon\, N(r,b)$$

für $r > R(\varepsilon)$, woraus die Behauptung abzulesen ist.

17. Die Wertverteilung bei additiv-periodischen Funktionen. So bezeichnen wir eine meromorphe Funktion, die der Funktionalgleichung

$$f(x+\omega) = f(x) + \eta \tag{34}$$

genügt, wobei ω, η als komplexe Zahlen *ungleich* 0, ∞ vorausgesetzt werden.

Satz 7. *Eine additiv-periodische Funktion nimmt alle endlichen Werte gleich oft an in dem Sinne, daß für je zwei endliche a, b der* $\lim n(r,a):n(r,b)$ *vorhanden und gleich* 1 *ist.*

Zum Beweise sei an einen Satz von Valiron [vgl. § 10b] erinnert, nach dem es unendlich viele Stellensorten gibt, für die $N(r,z):T(r,f) \to 1$ strebt. Sei b eine solche. Angenommen für ein gewisses endliches a sei $\overline{\lim}\,\dfrac{n(r,a)}{n(r,b)} = k < 1$, so folgt nach (33)

$$\overline{\lim}\,\frac{N(r,a)}{T(r,f)} \leqq \overline{\lim}\,\frac{n(r,a)}{n(r,b)} \cdot \lim\,\frac{N(r,b)}{T(r,f)} = k < 1,$$

und die Stellensorte a hätte positiven Defekt $\delta(a)$. Das kann aber nicht sein, weil nach der Funktionalgleichung (34) mit a auch alle Stellensorten aus dem Modul

$$a_k = a + k\eta \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{35}$$

denselben positiven Defekt haben müßten, im Widerspruch mit den Defektrelationen.

Wir bemerken noch, daß jede additiv-periodische Funktion, die *einen* endlichen asymptotischen Wert a besitzt, wieder wegen (34) auch *alle* a_k aus (35) zu asymptotischen Werten hat und daher — wenn sie überdies eine ganze Funktion ist — nach dem bekannten Satze von Denjoy-Carleman-Ahlfors [1, 2] von unendlich hoher Ordnung sein muß.

18. Beispiele additiv-periodischer Funktionen findet man unter den Integralen periodischer Funktionen, sofern sie wieder meromorph sind.

Wir betrachten zunächst die Weierstrasssche *Zetafunktion*

$$\zeta(x) = \int^{x} p(u)\, du\,.$$

Sie hat keinen endlichen asymptotischen Wert, wohl aber ist ∞ ein solcher. Nimmt man nämlich den Bereich, der aus dem abgeschlossenen Periodenparallelogramm (o , o) durch Fortlassen aller Punkte einer offenen ε-Umgebung der Pole entsteht, so hat $|\zeta(x)|$ dort ein Maximum M. Auf der entsprechenden Punktmenge im Parallelogramm $(m\,,\, n)$ ist also $|\zeta(x)| \geq |m\eta_1 + n\eta_2| - M$ und strebt daher gegen Unendlich für jeden Weg, der schließlich nach ∞ führt und in die ε-Umgebung der Polstellen nicht eindringt. Wörtlich dieselbe Schlußweise gilt für alle additiv doppeltperiodischen Funktionen.

Die Sorten, in denen die Riemannsche Fläche von $\zeta(x)$ algebraisch verzweigt ist, liegen wieder in zwei Moduln, die sich aus den Nullstellen u'_o, u''_o von $p(u)$ im Fundamentalparallelogramm ableiten lassen als

$$z'_{m,n} = \zeta(u'_o) + m\eta_1 + n\eta_2\,, \quad z''_{m,n} = \zeta(u''_o) + m\eta_1 + n\eta_2\,. \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

In jeder dieser Stellensorten liegt nur *eine* zweifache Windungsstelle; der Index $\mu(z)$ verschwindet also für jedes z. Ähnliches gilt, wenn $p(u)$ eine doppelte Nullstelle hat.

Es ist wahrscheinlich, daß für die Zetafunktion $\delta(\infty) = 1$ und $\phi_e = \Phi = 2$ ist; hat sie überhaupt eine genaue Defektrelation, so ist das wegen (31) sicher richtig, weil ja die p-Funktion gar keinen Ausnahmewert hat. Die Stellensorte ∞ ist indirekt kritisch im Sinne von Iversen.

19. Hr. Nevanlinna hat [4b, S. 103] ohne nähere Ausführungen ein sehr interessantes Beispiel genannt, für das alle Ausdrücke (27) für die Verzweigtheit der Riemannschen Fläche in ihrem endlichen Teil versagen, nämlich

$$f(x) = \int_{o}^{x} e^{e^t} dt\,.$$

In der Tat: $f(x)$ ist ganz, daher $\delta(\infty) = 1$; die Ableitung ist überall von Null und Unendlich verschieden, daher hat $f(x)$ keine multiplen Stellen, so daß $\phi = 0$. Durch eine elementare Abschätzung überzeugt man sich leicht, daß $f(2\pi i) = \eta \neq 0$, und deshalb ist $f(x)$ eine *additiv-periodische Funktion, bei der* nach § 17 *keine endliche Stellensorte positiven Defekt haben kann.*

Um den Verzweigungscharakter der Riemannschen Fläche festzustellen, untersuchen wir die asymptotischen Werte (kurz asW.). Wir schicken voraus, daß $f'(x) = e^{e^x}$ die asW. hat:

(36) ∞ für die Geraden $\Im(x) = 2k\pi$ der rechten Halbebene,

(37) o für die Geraden $\Im(x) = (2k+1)\pi$ der rechten Halbebene, $(k = 0, \pm 1, \ldots)$

(38) 1 für einen Weg, der schließlich links von jeder Parallelen zur imaginären Achse verläuft.

Zu diesen Werten gehören der Reihe nach die Defekte $\delta'(\infty) = 1$, $\delta'(0) = 1$, $\delta'(1) = 0$. — $f(x)$ hat entsprechend auf (36) den asW. ∞, auf (37) die end-

lichen asW. des Moduls a_k, weil ja das Integral $f(\pi i + s)$ für reelles $s \to +\infty$ gegen ein endliches a konvergiert; endlich für (38) wieder den asW. ∞, der aber sehr schwach angestrebt wird und daher auf den Defekt $\delta(\infty)$ ohne Einfluß bleibt. Die Riemannsche Fläche hat daher direkt kritische (logarithmische) transzendente Stellen in den Sorten a_k und eine direkt kritische Stelle in ∞.

Die Verzweigungen der Fläche im Endlichen und im Unendlichen sind also gleich stark. Trotzdem sind die Defektrelationen nicht imstande, den Verzweigungscharakter im Endlichen zum Ausdruck zu bringen. Dies liegt daran, daß im II. Hauptsatz die einzelnen Stellensorten mit Ausnahmecharakter stets nur in endlicher Anzahl erscheinen, also im wesentlichen jede für sich allein betrachtet werden. Hier sind die algebraischen Verzweigungsstellen ausgezeichnet: durch $N_{\text{I}}(r)$ werden alle solchen mit einem Schlage erfaßt, und so ist der *Gesamtindex* $\phi = \underline{\lim} \dfrac{N_{\text{I}}(r)}{T(r, f)}$ der *Indexsumme* $\sum\limits_{\text{I}}^{\infty} \mu(z_k) = \sum\limits_{\text{I}}^{\infty} \underline{\lim} \dfrac{N_{\text{I}}(r, z_k)}{T(r, f)}$ wesentlich überlegen. Hätte man ein Analogon für die Ausnahmewerte, einen *Gesamtdefekt* gegenüber der *Defektsumme* $\sum\limits_{\text{I}}^{\infty} \delta(z_k)$, so ist kein Zweifel, daß man für unsere Funktion $f(x)$ eine schöne, genaue Defektrelation erhielte.

Diesen Mangel des II. Hauptsatzes zu beheben, scheint aber nicht ganz einfach. Man muß an die Wurzel gehen: der Beweis des Hauptsatzes beruht ganz wesentlich auf dem Kunstgriff von Littlewood und Collingwood, den wir in § 4 auch benutzt haben, nämlich das Polynom $\psi(x) = \prod\limits_{k=1}^{q} (f - a_k)$ zu untersuchen; alle Abschätzungen würden aber versagen, wenn man hier etwa eine ganze Funktion eintragen wollte. An dieser Stelle scheint es also nötig, einen neuen Weg zu finden, um die Theorie zu verschärfen.

Literaturverzeichnis.

1. Ahlfors, L., Sur le nombre des valeurs asymptotiques etc. (C. R. Acad. Sc. **188**, 1929, S. 688).
2. Carleman, T., Sur les fonctions inverses des fonctions entières d'ordre fini (Arkiv för mat., astr. och fysik **15**, 1921, No. 10).
3. Iversen, F., Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes (Thèse, Helsingfors 1914).
4. Nevanlinna, R., a) Zur Theorie der meromorphen Funktionen (Acta math. **46**, 1925, S. 1). — b) Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des fonctions méromorphes (Coll. Borel, Paris 1929).
5. Ostrowski, A., Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes (Math. Zeitschrift **24**, 1925, S. 246).
6. Saxer, W., a) Über die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten (Math. Zeitschrift **17**, 1923, S. 210). — b) Sur les valeurs exceptionnelles des dérivées successives des fonctions méromorphes (C. R. Acad. Sc. **182**, 1926, S. 831).
7. Valiron, G., a) Integral functions (Toulouse 1923, S. 35). — b) Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes (Acta math. **47**, 1926, S. 117).
8. Varopoulos, Th., Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions dérivées etc. (Acta math. **51**, 1928, S. 23).

Ausgegeben am 10. Dezember.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XXVIII. XXIX

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Library of Congress
MAY 8
Smithsonian Deposit

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 14. November. (S. 609)
Klassensitzung am 21. November. (S. 611)
Bieberbach: Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen. (S. 612)
Bieberbach: Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen. (S. 620)
Warburg: Über die Photolyse der Lösungen von Schwefelwasserstoff in Hexan und in Wasser. Nach Versuchen mit Dr. Rump. (Mitteilung vom 24. Oktober.) (S. 624)
R. Brauer: Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe. (Mitteilung vom 24. Oktober.) (S. 626)
M. J. Belinfante: Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen. (Mitteilung vom 24. Oktober.) (S. 639)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

XXVIII. Gesamtsitzung. 14. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

*1. Hr. Petersen sprach über »die generationsbildenden Faktoren der Literaturgeschichte«.

Nicht die längst übliche praktische Anwendung der Generationsgruppen in Darstellung literar-historischer Entwicklung ist das aktuelle Problem, sondern die theoretische Unterbauung einer längst geübten Praxis. Drei Theorien stehen sich gegenüber: Die Auffassung der Generation als objektives Zeitmaß vom Umfang eines Dritteljahrhunderts (O. Lorenz), die Auffassung als Geburtsgleichheit (Pinder), die Auffassung als geistige Gleichrichtung (Ranke, Dilthey). Bei der Auseinandersetzung zwischen den beiden letzten Theorien handelt es sich darum, ob die Generationseinheit geboren wird oder sich bildet, ob der neue Wille schon durch den Zeitpunkt der Geburt als Prädestination künftiger Leistungen in die Generation gelegt ist oder ob er unter dem Eindruck von in gleichem Lebensalter aufgenommenen gleichartigen Erlebnissen sich erzeugt. Daß nur die dritte Theorie für die literarische Gruppenbildung Geltung haben kann, wird durch Aufstellung der generationsbildenden Faktoren bewiesen, als welche 1. Vererbung, 2. Geburt, 3. Bildungselemente, 4. Persönliche Gemeinschaft, 5. Generationserlebnisse, 6. Führertum, 7. Generationssprache, 8. Erstarren der älteren Generation betrachtet werden. Das Generationsgebilde kann weder als regelmäßiges Zeitmaß, das in durchschnittlicher Wirkungsdauer des einzelnen gegeben ist, gelten, noch als eine durch Geburt bestimmte Gleichheit, sondern als ein Einssein durch Schicksalsgemeinschaft. Die Generationsfolge bedeutet den Taktschlag des Schicksals, durch den unzählige Einzelexistenzen in einen Rhythmus der Arbeit gezwungen werden. Aber Taktschlag ist nicht Melodie, und es ist unmöglich, aus diesem Ordnungsprinzip die Fülle der Einzelleistungen in ihren Farben und Lichtern zwingend zu erschließen. Das Generationsprinzip ist für die Literaturgeschichte das Korrelat zu dem Stamm- und Landschaftssystem; die Kategorie der zeitlichen Einordnung ergänzt die der räumlichen. Alles, was in der räumlichen Betrachtung fest ist, wie Heimat, Stammescharakter, Sprache und an die Sprache gebundener Stil, wird hier in Bewegung aufgelöst; alles, was in der räumlichen Betrachtungsweise fließend ist, als Veränderung und Entwicklung, wird hier befestigt.

Ein soziologisches Problem ist die Generationsfolge auf der ersten Stufe einheitlicher Lagerung, die die Voraussetzung des Generationszusammenhanges bildet (K. Mannheim). Ein geistesgeschichtliches Problem wird sie in dem Generationszusammenhang, der eine wurzelhafte Verbindung und Wechselwirkung zwischen politischen und religiösen Bewegungen, Weltanschauungen und Parteiprogrammen, wissenschaftlichen und künstlerischen Leistungen begründet. Aber eine Sonderbetrachtung verdient jede der Generationseinheiten, die innerhalb des großen Zusammenhanges sich auf dem Gebiete der Politik, der Wissenschaft, der einzelnen Künste bilden, parallel in ihren Richtungen, verbunden durch Wechselwirkungen, aber vereinzelt in der Besonderheit ihrer Mittel und Zwecke. In diesem Sinne gibt es ein besonderes literarisches Generationsproblem.

2. Hr. Burdach überreichte Band IV und Band II, 5 seines Werkes »Vom Mittelalter zur Reformation«: »Aus Petrarcas ältestem deutschen Schülerkreise«, Texte und Untersuchungen unter Mitwirkung Richard Kienasts, hrsg. von

Konrad Burdach mit Beiträgen von Heinrich Anz, Ludwig Bertalot und Paul Piur (Berlin 1929), und »Briefwechsel des Cola di Rienzo«, hrsg. von Konrad Burdach und Paul Piur, 5. Teil: Nachlese zu den Texten und Kommentar, mit Beiträgen von Fritz Kühn † (Berlin 1929).

3. Hr. Petersen überreichte den 3. und 4. Band der I. Abteilung der Jean-Paul-Ausgabe: »Hesperus«, hrsg. von Hans Bach und Eduard Berend (Weimar 1929), sowie die von Dr. Waldemar von Olshausen bearbeiteten Anmerkungen zu den philosophischen Schriften Lessings (Sonderabdr.).

4. Hr. Bieberbach überreichte seine »Analytische Geometrie« (Leipzig und Berlin 1930).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Paul Wernle übersandte seine Selbstbiographie (Sonderabdr.).

Ausgegeben am 13. Januar 1930.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

XXIX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 21. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Bieberbach hielt einen Vortrag »Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen«.

Zum gleichen Typus gehören zwei Raumformen, welche eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung aufeinander zulassen. Es wird bewiesen, daß bei gegebener Dimension die Anzahl dieser Typen endlich ist.

2. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit vor »Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen«.

Es wird ein Analogon des Koebe-Faberschen Viertelsatzes bewiesen.

3. Hr. Hesse überreichte die 53. Lieferung des Werkes »Das Tierreich«: Crustacea Copepoda II. Cyclopoida Gnatostoma, bearbeitet von F. Kiefer (Berlin und Leipzig 1929).

Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen.

Von Ludwig Bieberbach.

Ein n-dimensionaler, im kleinen[1] metrischer Raum heißt eine Euklidische Raumform E_n oder auch ein lokal Euklidischer Raum, wenn er sich so auf den n-dimensionalen Euklidischen Raum R_n abbilden läßt, daß diese Abbildung im ganzen R_n eindeutig erklärt ist, und daß sie in der Umgebung einer jeden Stelle des R_n umkehrbar eindeutig und entfernungstreu ist. Ist also

$$E_n = \mathfrak{A} R_n, \quad R_n = \mathfrak{A}^{-1} E_n,$$

so sei[2]

1. $\mathfrak{A}$ eindeutig im großen,
2. $\mathfrak{A}$ entfernungstreu im kleinen.

Daß $\mathfrak{A}^{-1}$ im kleinen eindeutig ist, ergibt sich aus 2.

Daß es Euklidische Raumformen gibt, die sich nicht umkehrbar eindeutig und längentreu auf einen R_n abbilden lassen, lehrt jede Bewegungsgruppe des R_n, welche einen Fundamentalbereich besitzt. Man nehme insbesondere eine solche Gruppe, deren Bewegungen sämtlich[3] frei von Fixpunkten sind, und verstehe unter einem Punkt des E_n die Gesamtheit der untereinander durch die Gruppe äquivalenten Punkte des R_n. Unter der Umgebung eines Punktes verstehe man die Gesamtheit der zu der Umgebung eines Punktes des R_n äquivalenten Umgebungen (die wegen der Fixpunktfreiheit der Gruppe und wegen der Existenz eines Fundamentalbereiches bei genügend kleiner Wahl der Umgebung punktfremd sind). Unter Abstand zweier genügend benachbarter Punkte des E_n verstehe man den Abstand derjenigen Bildpunkte im R_n, welche der gleichen der eben erwähnten Umgebungen angehören.

---

[1] Ich nenne einen Raum »metrisch im kleinen« wenn *für gewisse* seiner Punktepaare eine Entfernung erklärt ist, derart, daß jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die ein metrischer Raum ist. Zur Begriffsbestimmung der Euklidischen Raumform vergleiche man auch H. Hopf: Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Ann. Bd. 95 (1925), S. 313—339.

[2] Aus diesen Annahmen folgt, daß $\mathfrak{A}^{-1}$ längs jeder Kurve bestimmt ist, sowie über seinen Wert in einem Punkt der Kurve verfügt ist. Anders ausgedrückt: $\mathfrak{A}^{-1}$ ist auf dem universellen Überlagerungsraum von E_n eindeutig bestimmt, sowie sein Wert in einem Punkt desselben verfügt ist. Dieser universelle Überlagerungsraum erscheint durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^{-1}$ umkehrbar eindeutig auf den R_n abgebildet. Man kann also auch so erklären: Ein im kleinen metrischer Raum heißt eine E_n, wenn sein universeller Überlagerungsraum ein R_n ist, der auf den E_n im kleinen längentreu bezogen ist, wenn man die natürliche Abbildung des R_n auf den E_n heranzieht.

[3] Mit Ausnahme des Einheitselementes der Gruppe.

Ist umgekehrt ein E_n gegeben, der vom R_n verschieden ist, so gehen die Bilder desselben Punktes des E_n im R_n bekanntlich[1] auseinander durch die Operationen einer Gruppe fixpunktfreier Bewegungen hervor.

Das Problem, alle E_n zu ermitteln, ist daher gelöst, sobald alle Bewegungsgruppen des R_n mit Fundamentalbereich aus lauter fixpunktfreien Bewegungen ermittelt sind.

Faßt man alle die E_n in eine Klasse zusammen, die sich umkehrbar eindeutig und längentreu aufeinander abbilden lassen, so gibt es unendlich viele verschiedene solcher Klassen. Wir sagen kurz, *es gebe unendlich viele metrische Typen von Raumformen E_n.*

Ordnet man nämlich jeder Klasse von Raumformen die Klasse von Bewegungsgruppen zu, welche sich bei irgendwelchen lokal umkehrbar eindeutigen längentreuen Abbildungen auf den R_n ergeben können, so sind die Gruppen einer Klasse kongruent. Kongruent heißen dabei zwei Bewegungsgruppen, G_1, G_2, wenn eine Bewegung $\mathfrak{B}$ existiert derart, daß

$$G_1 = \mathfrak{B}^{-1} G_2 \mathfrak{B}$$

ist. Dies beruht darauf, daß die umkehrbar eindeutige längentreue Abbildung in ihrem Gesamtverlauf festgelegt ist, sowie ihr Verlauf in der Umgebung eines Punktes gegeben ist. Man erkennt dies, wenn man den Abbildungsverlauf längs einer Kurve verfolgt, in ähnlicher Weise, wie man dies in der Lehre von der analytischen Fortsetzung zu tun pflegt. Da aber die verschiedenen umkehrbar eindeutigen Abbildungen der Umgebung eines Punktes von E_n auf R_n durch Bewegungen des R_n auseinander hervorgehen, so ist unsere Behauptung bewiesen. Bemerkt man nun, daß schon unter den Translationsgruppen unendlich viele Klassen inkongruenter Gruppen vorkommen, so ergibt sich die Existenz unendlich vieler inkongruenter E_n.

Die geschlossenen E_n entsprechen bei dieser Zuordnung den Gruppen mit endlichem Fundamentalbereich. Nun habe ich in meinen beiden Arbeiten über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume[2] gezeigt, daß isomorphe Bewegungsgruppen mit endlichem Fundamentalbereich affin verwandt sind, und daß es nur endlich viele Klassen nicht affinverwandter Gruppen mit endlichem Fundamentalbereich gibt. Affinverwandt heißen dabei zwei Gruppen G_1 und G_2, wenn es eine affine Transformation $\mathfrak{A}$ gibt, derart, daß

$$G_1 = \mathfrak{A}\, G_2 \mathfrak{A}^{-1}.$$

Sind dann P_1 und P_2 durch G_2 äquivalente Punkte, gibt es also eine Bewegung Γ_2 aus G_2, so daß

$$P_1 = \Gamma_2 (P_2)$$

ist, so ist

$$\mathfrak{A}(P_1) = \mathfrak{A}\Gamma_2 \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A}(P_2),$$

so daß

$$\mathfrak{A}(P_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}(P_2)$$

---

[1] Um nur neuere Literatur zu nennen: z. B. H. HOPF, a. a. O.; E. CARTAN, Leçons sur la géometrie des espaces de RIEMANN. Paris 1928.

[2] Mathematische Annalen Bd. 70 und 72.

durch eine Operation

$$\Gamma_1 = \mathfrak{A}\,\Gamma_2\,\mathfrak{A}^{-1}$$

aus G_1 äquivalent sind. Daher ist[1] $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_2^{-1}$ eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung von E_n^2 auf E_n^1, wo E_n^1 zu G_1 und E_n^2 zu G_2 gehört. Nur der Charakter der umkehrbaren Eindeutigkeit im großen bedarf eines Nachweises. Ist aber P'' ein Punkt von E_n^2, so seien seine Bilder durch $\mathfrak{A}_2^{-1}$ im R_n die P_k''. Sie sind durch G_2 äquivalent. Die Abbildung $\mathfrak{A}$ führt sie in durch G_1 äquivalente Punkte P_k' über. Alle diese P_k' gehen durch $\mathfrak{A}_1$ in denselben Punkt von E_n^1 über. Ebenso sieht man, daß $\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{A}_1^{-1}$ in E_n^1 eindeutig ist.

Nennt man nun die Klasse der durch umkehrbar eindeutige stetige (sogenannte topologische) Abbildung äquivalenten E_n einen topologischen Typus von Raumformen, *so gibt es* nach dem erwähnten Satz meiner beiden Arbeiten über Bewegungsgruppen *nur endlich viele topologische Typen geschlossener Euklidischer Raumformen gegebener Dimension.*

Unerledigt ist damit aber die Frage, ob es endlich oder unendlich viele verschiedene Typen *offener* E_n gibt. Denn der herangezogene Satz meiner älteren Arbeiten, wonach isomorphe Gruppen ähnlich sind, entscheidet hier die Frage nicht, weil isomorphe Gruppen nicht immer ähnlich sind. Ist z. B. S eine beliebige Schraubung des R_3 und $G(S)$ die Gruppe der Potenzen von S, so haben die zu beliebigen solchen Gruppen gehörigen Raumformen alle denselben Typus. Die Gruppen sind aber doch gewiß nicht alle isomorph oder affin verwandt. Um das einzusehen, betrachte ich zwei Schraubungen um die x_3-Achse. Die eine S_0 möge um $\phi_0\,(0 \leqq \phi_0 < 2\pi)$ drehen und um $a_0 > 0$ in der Richtung der positiven x_3-Achse verschieben; die andere S_1 möge im gleichen Drehsinn um ϕ_1 drehen $(0 \leqq \phi_1 < 2\pi)$ und in derselben Richtung um $a_1 > 0$ verschieben. Als Fundamentalbereiche kann man die Streifen

$$0 \leqq x_3 \leqq a_0$$

und

$$0 \leqq x_3 \leqq a_1$$

nehmen. Kann man nun eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung des einen Fundamentalbereiches auf den anderen angeben, derart, daß dabei Randpunkte, die sich durch S_0 entsprechen, in Randpunkte übergehen, die sich durch S_1 entsprechen, so hat man damit eine topologische Abbildung der beiden zugehörigen Raumformen aufeinander. Diese stetige Abbildung kann man deshalb leisten, weil die Schraubung S_0 stetig in S_1 deformiert werden kann. Dazu dienen die Schraubungen S_t mit dem Drehwinkel

$$\phi_0 + t(\phi_1 - \phi_0)$$

und der Schiebung

$$a_0 + t(a_1 - a_0). \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

[1] $\mathfrak{A}_1$ bilde R_n auf E_n^1, $\mathfrak{A}_2$ den R_n auf E_n^2 ab.

Unterwirft man dann die Ebene

$$x_3 = t a_0$$

der Schraubung mit dem Drehwinkel

$$\phi_0 + t(\phi_1 - \phi_0)$$

und der Schiebung

$$t(a_1 - a_0),$$

so ist damit im Streifen

$$0 \leq x_3 \leq a_0$$

die verlangte Abbildung erklärt.

Damit ist nun auch schon die Methode angedeutet, durch die in jedem Fall der folgende Satz bewiesen wird:

Es gibt nur endlich viele topologische Typen offener Euklidischer Raumformen gegebener Dimension.

Ich zeige nämlich zunächst, daß es nur endlich viele Kontinua von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich gibt, und zeige dann weiter, daß die Gruppen eines Kontinuums Euklidische Raumformen des gleichen Typus liefern. Es mag aber von vornherein gesagt werden, daß es sehr wohl denkbar ist, daß auch Gruppen aus verschiedenen Kontinua zum gleichen topologischen Typus führen.

Ich zeige also zunächst, daß die Zahl der Kontinua von Bewegungsgruppen des R_n mit Fundamentalbereich endlich ist. Dieser Nachweis knüpft an die Sätze an, die ich Math. Ann. Bd. 70 bewiesen habe. In Betracht kommen die Sätze X, XIII, XIV. Satz X besagte:

Eine Bewegungsgruppe, welche Operationen mit irrationalem Drehwinkel enthält, und die von infinitesimalen Operationen frei ist, ist zerlegbar. Es gibt dann also eine Zahl $2k < n$ so, daß die Matrix einer jeden Bewegung so geschrieben werden kann:

$$\begin{pmatrix} A_{2k} & 0 & 0 \\ 0 & A_h & T_h \end{pmatrix}, \qquad h = n - 2k > 0$$

Dabei kommen unter den (A_h, T_h) Operationen vor, die keinen Punkt festlassen, weil sonst wegen der irrationalen Drehwinkel infinitesimale Operationen in der Gruppe wären. Die A_h enthalten, wie man annehmen darf, keine irrationalen Drehwinkel mehr. Auch ist die Gruppe (A_h, T_h) selbst von infinitesimalen Operationen frei. Andernfalls seien $P_0, P_1 \cdots P_n$ keinem R_{n-1} angehörige Punkte des R_n. $\bar{P}_0, \cdots \bar{P}_n$ seien die Projektionen auf den R_h, auf den die Gruppe (A_h, T_h) einwirkt, und $P_0^{(\nu)}, \cdots P_n^{(\nu)}$ sei eine Folge von äquivalenten Punkten, für die $\bar{P}_0^{(\nu)} \cdots \bar{P}_n^{(\nu)}$ Häufungspunkte im Endlichen besitzen. Da aber die $2k$ ersten Koordinaten der $P_i^{(\nu)}$ eine feste Quadratsumme haben, so haben auch die $P_0^{(\nu)}, \cdots, P_n^{(\nu)}$ Häufungspunkte im Endlichen, und somit gibt es nach Ann. 70 S. 314 in der Gruppe infinitesimale Operationen. Nach Satz XIII Ann. 70 enthält die Gruppe (A_h, T_h) Translationen. Liegen alle Translationen von (A_h, T_h) in einem R_j $(j < h)$, so ist die Gruppe nach Satz XIV weiter zerlegbar. Wir dürfen aber annehmen, daß die gegebene Gruppe so-

weit als möglich zerlegt ist, und dürfen also annehmen, daß (A_h, T_h) h linear unabhängige Translationen enthält. Dabei ist sicher $h > 0$, weil sonst die gegebene Gruppe homogen wäre und wegen der irrationalen Drehwinkel infinitesimale Operationen enthielte. (A_h, T_h) ist also eine Gruppe mit *endlichem* Fundamentalbereich.

Zu analogen Ergebnissen führt Ann. 70 auch dann, wenn in der Gruppe irrationale Drehwinkel fehlen. Dann enthält sie nach Satz XIII jedenfalls Translationen, die für den Fall eines unendlichen Fundamentalbereiches einem $R_h (h < n)$ angehören. Die Gruppe ist nach Satz XIV zerlegbar. Also haben wir es stets mit Gruppen

$$\begin{pmatrix} A_{2k} & 0 & 0 \\ 0 & A_h T_h \end{pmatrix}$$

zu tun, wo (A_h, T_h) eine Gruppe mit endlichem Fundamentalbereich ist. Dabei gehört zu jeder Matrix (A_h, T_h) genau eine Matrix A_{2k}, da sonst Operationen in der Gruppe wären, die Fixpunkte besitzen. Aus zwei Operationen nämlich, die sich nur in A_{2k} unterscheiden, kann man durch Zusammensetzung eine dritte gewinnen, die in den h letzten Zeilen mit der Identität übereinstimmt. Die homogene Gruppe (A_{2k}) ist also zur Gruppe (A_h, T_h) isomorph in dem Sinne, daß ihre Elemente durch (A_h, T_h) eindeutig bestimmt sind, daß aber zum gleichen Element (A_{2k}) mehrere (A_h, T_h) gehören können.

Nun ist bekannt, daß es nur endlich viele topologische Typen (A_h, T_h) gibt. Daraus soll geschlossen werden, daß die zugehörigen (A_{2k}) sich auf endlich viele Kontinua verteilen.

Dazu sind zunächst die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu finden, daß (A_{2k}) eine Darstellung von (A_h, T_h) im angegebenen Sinn ist. Diese Bedingung ist die, daß jedesmal, wenn das Produkt einer Anzahl von Elementen der Gruppe (A_h, T_h) der Identität gleich ist, auch das Produkt der entsprechenden Elemente der (A_{2k}) der Identität gleich ist. Nun aber gibt es in (A_h, T_h) endlich viele erzeugende Elemente, d. h. Elemente derart, daß sich jedes andere Element als Produkt derselben darstellen läßt. Es ist nämlich die Gruppe der A_h für sich eine endliche Gruppe, von einer Ordnung, die N heißen möge. Sind aber (A_h, T_h') und (A_h, T_h'') zwei Elemente mit dem gleichen A_h, so ist

$$(A_h, T_h')^{-1} (A_h, T_h'')$$

eine Translation der Gruppe. Die Translationen der Gruppe sind Produkte aus h derselben. Also genügen $N + h$ Elemente der Bewegungsgruppe, um daraus alle anderen als Produkte darzustellen. Zwischen diesen $N + h$ Elementen bestehen nun noch gewisse Relationen, insofern, als gewisse Produkte dem Einheitselement der Gruppe gleich sind. Man könnte zeigen, daß sich diese Relationen auf endlich viele zurückführen lassen, doch wollen wir das dahingestellt sein lassen. Die Gruppe der (A_{2k}) kann nach dem Gesagten auch aus $N + h$ ihrer Elemente dargestellt werden und zwischen denselben bestehen genau die gleichen Relationen wie zwischen den (A_h, T_h). Wir deuten nun die $\nu = (N + h)\, 4\, k^2$ Elemente der Matrizen A_{2k} als Koordinaten

eines ν-dimensionalen kartesischen Raumes. Zwischen denselben bestehen dann zunächst die Orthogonalitätsrelationen, dazu die algebraischen Gleichungen. welche die definierenden Relationen der Gruppe ausmachen.

Da die (A_h, T_h) eine Gruppe mit endlichem Fundamentalbereich bilden, so kommen nur endlich viele Typen in Betracht. Zu jedem Typus gehören nur endlich viele Kontinua von Matrizen A_{2k}. Dies folgt daraus, daß die Punkte eines R_ν, die einem algebraischen Gebilde angehören, d. h. gewissen algebraischen Gleichungen genügen, sich auf endlich viele Kontinua verteilen[1]. Wir brauchen innerhalb des einzelnen Kontinuums der A_{2k} nur Gruppen mit demselben (A_h, T_h) zu betrachten, weil man dies stets durch eine affine Transformation innerhalb der letzten h Koordinaten erreichen kann. Somit haben wir es in der Tat nur noch mit endlich vielen Kontinuis von Gruppen zu tun. Wir haben dann weiter zu zeigen, daß innerhalb des Kontinuums der topologische Typus der zugehörigen E_n sich nicht ändert[2].

Die Aussage von der Endlichkeit der Anzahl der topologischen Typen der offenen Euklidischen n-dimensionalen Raumformen ergibt sich nun aus folgenden Überlegungen:

1. Sind G_0 und G_1 zwei Gruppen aus demselben Kontinuum, so kann man eine stetig von einem Parameter t $(0 \leqq t \leqq 1)$ abhängige Schar von Gruppen $G(t)$ des Kontinuums angeben, so daß $G_0 = G(0)$, $G_1 = G(1)$ ist.

2. Am Rande eines konvexen Polyeders Π eines R_j sei eine Abbildung $\bar{\mathfrak{A}}$ erklärt, die diesen Rand umkehrbar eindeutig und stetig auf sich abbildet. Die Abbildung gehöre einer stetigen Schar[3] $\bar{\mathfrak{A}}(t)$ von umkehrbar eindeutigen stetigen Abbildungen des Randes in sich an, derart, daß $0 \leqq t \leqq 1$ ist und daß $\bar{\mathfrak{A}}(0)$ die identische Abbildung, $\bar{\mathfrak{A}}(1)$ die gegebene Abbildung $\bar{\mathfrak{A}}$ ist. Dann gibt es eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung $\mathfrak{A}$ der aus Π und seinen endlichen Randpunkten bestehenden Menge auf sich, die am Rande mit $\bar{\mathfrak{A}}$ übereinstimmt.

Wir wählen zum Beweis in Π einen Punkt P und machen ihn zum Zentrum einer stetigen Folge von Ähnlichkeitstransformationen: $\alpha(t)$. Wählen wir P z. B. als Koordinationsanfangspunkt, so wollen wir $\alpha(t)$ durch

$$x_i = \bar{x}_i \tfrac{1}{2}(1 + t), \qquad 0 \leqq t \leqq 1 \tag{1}$$

erklären. Hier bedeuten $\bar{x}_i$ die Koordinaten der Randpunkte von Π. Für $t = 0$ haben wir in (1) die Abbildung des Polyeders Π auf ein halb so großes Teilpolyeder $\Pi\frac{1}{2}$. Die in Π gelegene Komplementärmenge seines Inneren wird bedeckt von den Bildern, die man mit (1) bei $0 \leqq t \leqq 1$ aus dem Rande von Π erhält, so daß also in (1) eine Parameterdarstellung dieser Komplementär-

[1] Vgl. meine Arbeit »Über die reellen Züge der algebraischen Gebilde«. Math. Zeitschr. Bd. 31 (1929).

[2] Wie denn derselbe auch nach früheren Überlegungen durch affine Transformation der (A_h, T_h) nicht beeinflußt wird.

[3] Darunter wird verstanden, daß die Abbildung durch Funktionen der Koordinaten $\bar{x}_i$ der Randpunkte und von t vermittelt wird, die als Funktionen dieser sämtlichen Veränderlichen stetig sind.

menge vorliegt, wenn $\bar{x}_i$ den Rand von Π durchläuft und $0 \leqq t \leqq 1$ ist. Die verlangte Abbildung kann dann so erklärt werden:

$$\mathfrak{A} = \text{Identität im Inneren von } \Pi_{\frac{1}{2}} \text{ und auf } \Pi_{\frac{1}{2}}$$

$$\mathfrak{A} = \alpha(t)\,\bar{\mathfrak{A}}(t)\,\alpha^{-1}(t) \text{ für } x_i = \bar{x}_i\left(\frac{1+t}{2}\right), \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

3. Es seien nun G_0 und G_1 wieder zwei Gruppen desselben Kontinuums. Als Fundamentalbereich beider Gruppen kann ein und derselbe Bereich des R_n gewählt werden. Nur ist die Ränderzuordnung je nach Gruppe verschieden. Man hat ja nur im R_h einen als endliches konvexes Polyeder wählbaren Fundamentalbereich der G_0 und G_1 gemeinsamen Gruppe (A_h, T_h) zu nehmen. Der Fundamentalbereich der G_0 und G_1 ist dann dasjenige Polyeder des R_n, dessen Projektion auf den R_h der eben genannte Fundamentalbereich der (A_h, T_h) ist. Einen Fundamentalbereich der Gruppen G_0 und G_1 bilden also diejenigen Punkte $(x_1 \cdots x_n)$ des R_n, deren Koordinaten $(x_{h+1} \cdots x_n)$ einen Punkt des Fundamentalbereiches der (A_h, T_h) bestimmen. Jedes Randpolyeder wird durch die beiden Gruppen demselben anderen Randpolyeder zugeordnet. Nur unterscheiden sich beide Gruppen darin, wie diese Zuordnung innerhalb der ersten $2k$ Koordinaten verläuft. Da auch die in 1. genannten Gruppen $G(t)$ demselben Kontinuum angehören, so gibt es einen stetigen Übergang von der Ränderzuordnung von G_0 zu der Ränderzuordnung von G_1. Wir wollen zeigen, daß man den Fundamentalbereich so umkehrbar eindeutig und stetig auf sich abbilden kann, daß dabei die Ränderzuordnung von G_0 in die von G_1 übergeht. Nach 2. genügt es dazu, zu zeigen, daß man den Rand des Fundamentalbereiches so umkehrbar eindeutig und stetig auf sich selbst abbilden kann, daß dabei die Ränderzuordnung von G_0 in die von G_1 übergeht, und daß diese Randabbildung stetig in die identische Abbildung deformiert werden kann.

Wir wollen nun am Rande R des Fundamentalbereiches eine solche stetige Folge umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildungen definieren. Wir bezeichnen sie mit $F(t)\,R$. Wir beschränken t auf das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$. Es soll $F(0)\,R$ die identische Abbildung sein, und es soll $F(t)\,R$ die Abbildung sein, die die Ränderzuordnung von G_0 in die von $G(t)$ überführt. $F(t)\,R$ wird sich als eine stetige Funktion der Koordinaten von R und von t erweisen.

Wir beginnen die Erklärung von $F(t)\,R$ mit den $2k$-dimensionalen Kanten des Fundamentalbereiches, deren Projektion auf R_h die Ecken des Fundamentalbereiches der (A_h, T_h) sind. In einer solchen ersten Kante $K_{2k}^{(1)}$ schreiben wir $F(t)\,K_{2k}^{(1)}$ als umkehrbar eindeutige stetige Abbildung der Kante auf sich beliebig so vor, daß für $t = 0$ die identische Abbildung herauskommt. Wenn dann die Operationen $s_i(t)$ der Gruppe die Kante $K_{2k}^{(1)}$ in weitere Kanten $K_{2k}^{(i)}$ überführen[1], so definieren wir

$$F(t)\,K_{2k}^{(i)} = s_i(t)\,F(t)\,s_i^{-1}(0)\,K_{2k}^{(i)}. \tag{2}$$

[1] Wir drücken das durch die Schreibweise

$$K_{2k}^{(i)} = s_i(t)\;K_{2k}^{(1)}$$

aus.

Diese Abbildung ist wieder umkehrbar eindeutig und stetig in allen Variablen, und wieder ist

$$F(0)\,K_{2k}^{(i)}$$

die Identität.

Es gibt stets in der Gruppe höchstens eine Operation, welche ein beliebiges Randpolyeder des Fundamentalbereiches in ein anderes überführt. Denn anderenfalls gebe es auch Operationen, die ein Randpolyeder in sich überführen, ohne die identische Operation zu sein. Also gebe es eine von der Identität verschiedene Operation (A_h, T_h), die ein Randpolyeder des Fundamentalbereiches dieser Gruppe in sich überführt. Die Randpolyeder dieser mit endlichem Fundamentalbereich versehenen Gruppe sind aber beschränkt, während die Operationen (A_h, T_h) fixpunktfreie Bewegungen sind, durch deren Iteration daher ein beliebig gegebener Punkt in beliebige Weiten entführt werden kann.

Durch unsere Vorschrift wird daher $F(t)\,R$ in allen mit $K_{2k}^{(1)}$ äquivalenten Kanten $K_{2k}^{(i)}$ eindeutig erklärt. Der Erfolg der Abbildung ist der, daß die Kanten $K_{2k}^{(i)}$ nunmehr durch $s_i(t)$ aus $K_{2k}^{(1)}$ hervorgehen, während sie vor der Abbildung durch $s_i(0)$ aus $K_{2k}^{(1)}$ hervorgingen. Es ist nämlich nach (2)

$$F(t)\,K_{2k}^{(i)} = s_i(t)\,F(t)\,K_{2k}^{(1)},$$

weil

$$s_i^{-1}(0)\,K_{2k}^{(i)} = K_{2k}^{(1)}$$

ist.

Ist so für alle mit $K_{2k}^{(1)}$ äquivalenten Kanten die Abbildung $F(t)\,R$ erklärt, und sind noch weitere $2k$-dimensionale Kanten vorhanden, so behandeln wir diese ebenso wie $K_{2k}^{(1)}$. Nach endlich vielen Schritten sind alle erschöpft, weil der endliche Fundamentalbereich von (A_h, T_h) nur endlich viele Ecken hat. Hiernach nehmen wir die $2k+1$-dimensionalen Kanten in Angriff. Sei $K_{2k+1}^{(1)}$ eine solche, so ist in ihren $2k$-dimensionalen Enden die Abbildung $F(t)\,R$ erklärt. Nach (2) kann damit die Erklärung auf die ganze $K_{2k+1}^{(1)}$ ausgedehnt werden. Nach dem bei $K_{2k}^{(1)}$ beschriebenen Verfahren wird dann die Erklärung für alle äquivalenten $2k+1$-dimensionalen Kanten gegeben. In den Enden wird dabei nach den früheren Darlegungen die alte Erklärung bestätigt. Innerhalb der Kanten ist damit die Erklärung auch eindeutig fixiert, weil es ja wie gesagt höchstens eine Operation gibt, die eine Kante in eine andere überführt. Sind dann alle $2k+1$-dimensionalen Kanten erledigt, so verfahren wir analog bei den $2k+2$-dimensionalen, bis endlich am ganzen Rande die Erklärung von $F(t)\,R$ vollendet ist.

Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen.

Von Ludwig Bieberbach.

Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen ist noch wenig bekannt[1]. Namentlich ist das Analogon des Koebe-Faberschen Viertelsatzes[2] in der eben genannten Literatur noch nicht berührt. Kürzlich hat nun Montel in einer hübschen Arbeit[3] einen dahin zielenden Satz ausgesprochen. Er formuliert ihn wörtlich folgendermaßen:

Soit une famille, sans limite constante, des fonctions méromorphes et univalentes pour $|z|<1$: il existe un nombre positif δ tel que toute fonction de la famille couvre soit l'intérieur d'un cercle de rayon δ, soit l'extérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{\delta}$[4].

[1] Dahin gehören die Arbeiten: L. Bieberbach: Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung. Math. Ann. 77 (1916) S. 153—172, insbesondere Satz I S. 154. L. Bieberbach: Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Sitzungsber. d. Pr. Akad. d. Wiss. 1916 S. 940—955. K. Löwner: Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Einheitskreises. Math. Zeitschr. Bd. 3 (1919) S. 65—77. Z. W. Birnbaum: Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen. Studia mathematica Bd. 1 (1929) S. 159—190. In diesen Arbeiten handelt es sich meist um die Abbildung des $|z|>1$ durch Funktionen, die bei $z=\infty$ einen Pol haben. Ist aber $f(z)$ in $|z|<1$ meromorph und schlicht, und ist $f(0)=0$, so ist $\frac{1}{f}\left(\frac{1}{z}\right)$ in $|z|>1$ außer bei $z=\infty$ regulär und schlicht.

[2] Es ist der Satz gemeint, daß eine in $|z|<1$ schlichte und reguläre Funktion $w=z+a_2z^2+\cdots$ einen Bildbereich liefert, der die Kreisscheibe $|w|<\frac{1}{4}$ enthält, während $w=\frac{1}{(1-z)^2}$ einen Bildbereich besitzt, dem keine größere Kreisscheibe um $w=0$ angehört. P. Koebe: Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1907 (191—210) S. 204—205. G. Faber: Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung. Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1916 S. 39—42. Vgl. auch L. Bieberbach: Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Sitzungsber. d. Pr. Akad. d. Wiss. 1916 (S. 940—955) S. 943, Fußnote. Und L. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. 2, Leipzig 1927, S. 86.

[3] P. Montel: Sur les domaines formés par les points représentants les valeurs d'une fonction analytique. Ann. ec. norm. sup. ser. 3 t. 46 (1929) S. 1—23.

[4] L. c. S. 20.

Zunächst überrascht die Formulierung, wenn man bedenkt, daß doch im Äußeren eines Kreises vom Radius $\frac{1}{\delta}$ viele Kreisscheiben vom Radius δ zu finden sind. Wozu also die Fallunterscheidung? Man kommt so zu der Vermutung, daß Kreise mit $w = 0$ als Mittelpunkt gemeint sein können. Aber dem steht wieder im Wege, daß es doch schlichte Abbildungen durch Funktionen gibt, die im Einheitskreis regulär sind und dort nirgends verschwinden. So kommt man endlich zu der Vermutung, man müsse sich auf schlichte Abbildungen des $|z| < 1$ durch Funktionen beziehen, die bei $z = 0$ verschwinden und dort die Ableitung 1 haben, die aber sonst in $|z| < 1$ meromorph sind, und man müsse Kreise um $w = 0$ als Mittelpunkt nehmen. So kommt man endlich zu der Vermutung, es möchte der folgende Satz gelten, den man auch tatsächlich aus den übrigen MONTELschen Ausführungen entnehmen kann, wenn man die von ihm passim gemachten Annahmen in ihrer Tragweite gehörig berücksichtigt.

Die Funktionen

$$w = f(z) \equiv z + a_2 z^2 + \cdots$$

seien in $|z| < 1$ *meromorph und vermitteln eine schlichte Abbildung des* $|z| < 1$. *Dann gibt es eine positive Zahl* δ *derart, daß jede solche Funktion einen Bildbereich liefert, welcher entweder das Innere der Kreisscheibe vom Radius* δ *um* $w = 0$ *oder das Äußere des Kreises mit dem Radius* $\frac{1}{\delta}$ *vom gleichen Mittelpunkt bedeckt.*

Ich füge noch hinzu, daß man $\delta = \sqrt{5} - 2$ *nehmen und durch keine größere Zahl ersetzen kann.*

Dieser Satz aber ist eine unmittelbare Folge des KOEBE-FABERschen Viertelsatzes. Dies werde im folgenden kurz dargelegt.

Ich nehme zum Beweise an, die Zahl a sei so gewählt, daß zwar für jedes $|a_1| < |a|$ die Gleichung $f(z) = a_1$ in $|z| < 1$ eine Lösung besitzt, daß aber $f(z) = a$ selbst in $|z| < 1$ keine Lösung hat. Es ist keine Beschränkung anzunehmen, daß a reell und positiv sei. (Andernfalls betrachte man $\frac{|a|}{a} f\left(\frac{a}{|a|} z\right)$.) Dann ist

$$F(z) = \frac{-a f(z)}{f(z) - a}$$

in $|z| < 1$ regulär und schlicht. Es ist $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. Also nimmt $F(z)$ alle Werte aus $|\mathfrak{z}| < \frac{1}{4}$ genau einmal an. Da nun

$$f(z) = \frac{a F(z)}{F(z) + a}$$

ist, so nimmt $f(z)$ in $|z| < 1$ alle Werte an, die demjenigen Bereich angehören, der aus $|\mathfrak{z}| < \frac{1}{4}$ durch die Abbildung

$$w = \frac{a\zeta}{\zeta + a}$$

entsteht. Ist $a < \frac{1}{4}$, so ist dies das Äußere des Kreises über

$$\frac{a}{1+4a} < w < \frac{a}{1-4a}$$

als Durchmesser, so daß also in diesem Falle $f(z)$ alle Werte aus

$$|w| > \frac{a}{1-4a}$$

genau einmal annimmt. Nun ist die Gleichung

$$\frac{\delta}{1-4\delta} = \frac{1}{\delta}$$

im Gebiete positiver δ nur für $\delta = \sqrt{5} - 2 < \frac{1}{4}$ erfüllt. Ist $a < \sqrt{5} - 2$, so ist

$$\frac{a}{1-4a} < \frac{1}{\sqrt{5}-2},$$

so daß dann $f(z)$ die Werte aus $|w| > \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ sicher alle annimmt. Ist aber $a \geq \sqrt{5} - 2$, so nimmt $f(z)$ die Werte aus $|w| < \sqrt{5} - 2$ sicher alle an.

Nun bleibt noch zu zeigen, daß es kein $\delta > \sqrt{5} - 2$ gibt, für das der eben bewiesene oben ausgesprochene Satz gilt. Dazu gebe ich ein Beispiel einer Funktion an, die in $|z| < 1$ meromorph und schlicht ist, für die $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ist, und die sowohl die Werte aus $|w| < \sqrt{5} - 2$ wie aus $|w| > \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ annimmt, die aber für kein $\delta_1 > \sqrt{5} - 2$ die Werte aus $|w| < \delta_1$ oder aus $|w| > \frac{1}{\delta_1}$ alle annimmt. Es ist interessant, daß man ein solches Beispiel wieder mit der Funktion $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ bilden kann. Diese Funktion bildet ja $|z| < 1$ auf einen Bereich ab, der von $-\infty < w < -\frac{1}{4}$ begrenzt ist und aus der ganzen übrigen Ebene besteht. Jetzt betrachte ich

$$f(z) = \frac{\delta \frac{z}{(1-z)^2}}{\frac{z}{(1-z)^2} + \delta} = \frac{\delta z}{z + \delta(1-z)^2}. \qquad \delta = \sqrt{5} - 2$$

Hier ist $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Es wird $|z| < 1$ auf einen Bereich abgebildet, der aus der vollen Ebene dadurch entsteht, daß man den Schlitz

$$\delta < w < \frac{\delta}{1 - 4\delta} = \frac{1}{\delta}$$

wegläßt. Dieser Bildbereich enthält also weder eine Kreisscheibe

$$|w| < \delta_1 \text{ mit } \delta_1 > \delta$$

noch ein Kreisäußeres

$$|w| > \frac{1}{\delta_1} \text{ mit } \delta_1 > \delta.$$

Über die Photolyse der Lösungen von Schwefelwasserstoff in Hexan und in Wasser.

Nach Versuchen mit Dr. Rump.

Von E. Warburg.

(Vorgetragen am 24. Oktober 1929 [s. oben S. 507].)

Wäßrige Lösungen von Photolyten zeigen im allgemeinen gegenüber nichtwäßrigen Lösungen ein abnormes Verhalten. In einer früheren Arbeit haben wir Lösungen von Jodwasserstoff in Hexan und in Wasser untersucht und gefunden, daß das abnorme Verhalten der wäßrigen Lösungen hier in erster Linie von der elektrolytischen Dissoziation des Jodwasserstoffs herrührt. Um zu ermitteln, welche Besonderheiten wäßrige Lösungen unabhängig von der elektrolytischen Dissoziation zeigen, haben wir nunmehr Lösungen von Schwefelwasserstoff in Hexan und in Wasser untersucht, bei welchen die elektrolytische Dissoziation zu vernachlässigen ist. Schwefelwasserstoff wird durch Strahlung in Wasserstoff und Schwefel gespalten, die gespaltenen Mol bestimmten wir nach dem Vorgang von Otto Warburg manometrisch aus der Druckzunahme im Gasraum über der Lösung in Folge des Wasserstoffs, welcher aus dem gespaltenen Schwefelwasserstoff in den Gasraum gelangt. Wenn jede beanspruchte oder »quantierte« Schwefelwasserstoffmolekel zerfällt, so gilt das Äquivalentgesetz, es sind dann für eine vom Schwefelwasserstoff absorbierte g-cal. die zersetzten Mol Schwefelwasserstoff, welche ich ϕ nenne, gleich den beanspruchten oder quantierten Mol, welche ich p nenne, also $\phi = p$. In der Tat lieferte der Versuch für Lösungen von Schwefelwasserstoff in Hexan $\phi = p$, wobei unter der Annahme, daß sich außer dem Schwefelwasserstoff kein Stoff in der Lösung befindet, die von der Lösung absorbierte Strahlung abzüglich der im Lösungsmittel verbleibenden gleich der vom Schwefelwasserstoff absorbierten gesetzt wurde. Unter dieser Annahme lieferte aber der Versuch für wäßrige Lösungen von Schwefelwasserstoff ϕ nur gleich $0.2 - 0.3 \cdot p$. Dieses Verhalten läßt sich erklären durch die Annahme, daß zwischen Schwefelwasserstoff und Wasser eine Reaktion stattfindet; es befinden sich dann in der Lösung außer dem Schwefelwasserstoff die Produkte dieser Reaktion, und sofern auch diese Produkte Strahlung absorbieren, findet man unter der obigen Annahme die vom Schwefelwasserstoff absorbierte Strahlung zu groß, also ϕ zu klein. Da man aber die Absorption der Reaktionsprodukte nicht kennt,

so kann man eine bestimmte Angabe über den wirklichen Vorgang nicht machen, auch die Absorption des Schwefelwasserstoffs nicht ermitteln, also die chemische Wirkung aus der Intensität der einfallenden Strahlung nicht berechnen, die Quantentheorie führt hier nicht zum Ziel. Diese Ergebnisse dürften dahin zu verallgemeinern sein, daß die Lösungen von Photolyten in zwei Klassen zerfallen, je nachdem zwischen dem Photolyten und dem Lösungsmittel eine Reaktion stattfindet, wie beim Wasser, oder nicht, wie beim Hexan, nur im letztern Fall führt die Quantentheorie zum Ziel. (Erscheint a. a. Ort.)

Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe.

Von Privatdozent Dr. Richard Brauer
in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt von Hrn. Schur am 24. Oktober 1929 [s. oben S. 507].)

Während die stetigen Darstellungen der reellen Drehungsgruppe sämtlich analytisch und sogar ganz und rational sind[1], gibt es bei der komplexen orthogonalen Gruppe $\mathfrak{D}$ in n Variabeln auch nichtanalytische Darstellungen. Ist dem Element D von $\mathfrak{D}$ bei der Darstellung $H(D)$ zugeordnet, so heißt das, daß die Koeffizienten von $H(D)$ nicht analytische Funktionen der Koeffizienten von D zu sein brauchen; sie hängen aber analytisch von den Real- und Imaginärteilen der Koeffizienten von D ab[2].

Die analytischen Darstellungen von $\mathfrak{D}$ sind dieselben wie bei der reellen Drehungsgruppe, sie sind bereits eingehend untersucht worden[1]. Die vorliegende Arbeit, die auf Anregung von Hrn. I. Schur entstanden ist, beschäftigt sich mit beliebigen stetigen Darstellungen von $\mathfrak{D}$. Es ergibt sich, daß auch hier für $n > 2$ der Satz von der vollständigen Reduzibilität gilt, so daß man sich auf irreduzible Darstellungen beschränken kann. Sind $H_1(D)$ und $H_2(D)$ zwei analytische irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{D}$, so ist auch $H_1(D) \times H_2(\bar{D})$ eine Darstellung[3]. Das gleiche gilt, wenn H_1 und H_2 analytische irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{D}$ durch Kollineationen sind[4]. Es wird gezeigt, daß man auf diese beiden Arten alle irreduziblen stetigen Darstellungen von $\mathfrak{D}$ erhält.

1. Der Fall $n = 2$.

Es bezeichne im folgenden stets $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_n$ die Gruppe aller (reellen und komplexen) orthogonalen Transformationen mit der Determinante 1 vom Grade n. Der Fall $n = 2$ spielt eine Ausnahmerolle; er soll hier nur soweit untersucht werden, wie es für das Folgende erforderlich ist.

---

[1] I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, 2. Mitteilung, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1924, S. 297. — H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, Math. Zeitschrift 24 (1925), S. 328. — R. Brauer, Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen, Dissertation Berlin 1925.

[2] Das ergibt sich aus einem allgemeinen Satz von Hrn. von Neumann, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1927, S. 76, Math. Zeitschrift 30 (1929), S. 3. Im folgenden werden diese Ergebnisse aber nicht vorausgesetzt.

[3] $\bar{D}$ bedeutet im folgenden stets die zu D konjugiert komplexe Matrix; $A \times B$ bedeutet das Kroneckersche Produkt (Produkttransformation) von A und B.

[4] Diese Darstellungen sind von Hrn. Weyl a. a. O. bestimmt worden.

Die Elemente von $\mathfrak{D}_2$ lassen sich analog wie im reellen Fall in der Form darstellen:

$$(1) \qquad D = D(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix};$$

$\phi = x + iy$ ist dabei durch D nur bis auf additive Vielfache von 2π bestimmt. Es gilt

$$(2) \qquad D(\phi)\,D(\psi) = D(\phi+\psi), \qquad D(\phi+2\pi) = D(\phi).$$

$\mathfrak{H}$ sei eine stetige Darstellung von $\mathfrak{D}_2$, bei der $H(\phi) = H(x, y)$ die zu $D(\phi)$ zugeordnete Matrix sei. Dann folgt aus (2) für beliebige reelle x_1, x_2, y_1, y_2

$$(3) \qquad H(x_1, y_1)\,H(x_2, y_2) = H(x_1+x_2, y_1+y_2),\ H(x_1+2\pi, y_1) = H(x_1, y_1).$$

Setzt man

$$H(x, 0) = L(x), \qquad H(0, y) = M(y),$$

so folgt aus (3)

$$(4) \qquad H(x, y) = L(x)\,M(y) = M(y)\,L(x)$$

$$(5) \qquad L(x_1)\,L(x_2) = L(x_1+x_2), \quad L(x_1+2\pi) = L(x_1); \quad M(y_1)\,M(y_2) = M(y_1+y_2).$$

Ist zunächst $\mathfrak{H}$ irreduzibel, so muß es den Grad 1 haben, da ja $\mathfrak{D}_2$ kommutativ ist. Dann ergeben (4) und (5)

$$H(x, y) = e^{i\alpha x + \beta y},$$

wo α eine ganze rationale, β eine beliebige Konstante bedeutet.

Ist $\mathfrak{H}$ eine beliebige stetige Darstellung, so sind nach einem Satz von Hrn. Pólya[1] wegen (5) die Koeffizienten von $L(x)$ bzw. $M(y)$ ganze transzendente Funktionen von x bzw. y; die Koeffizienten von $H(x, y)$ sind daher wegen (4) ganz und transzendent in x und y.

Setzt man $D = (a_{\varkappa\lambda})$, so wird wegen (1)

$$e^{i\Phi} = e^{ix-y} = a_{11} + ia_{12}, \qquad e^{i\bar{\Phi}} = e^{ix+y} = \bar{a}_{11} + i\bar{a}_{12},$$

$$(6) \qquad x = \frac{1}{2i}\log\left((a_{11}+ia_{12})(\bar{a}_{11}+i\bar{a}_{12})\right), \quad y = \tfrac{1}{2}\log\left((a_{11}-ia_{12})(\bar{a}_{11}+i\bar{a}_{12})\right).$$

Daher lassen sich die Koeffizienten von $H(\phi)$ als analytische Funktionen der Koeffizienten von D und $\bar{D}$ darstellen; das werde durch die Schreibweise $H(D) = K(D, \bar{D})$ angedeutet. Ist $\tilde{D} = (\tilde{a}_{\varkappa\lambda})$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{D}_2$, so kann man $K(D, \tilde{D})$ bilden. Man hat dabei in (6) $\bar{a}_{\varkappa\lambda}$ durch $\tilde{a}_{\varkappa\lambda}$ zu ersetzen; das ist möglich, da wegen $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$, $\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2 = 1$ sowohl $a_{11} \pm ia_{12} \neq 0$ wie $\tilde{a}_{11} \pm i\tilde{a}_{12} \neq 0$ ist. Die so entstandenen Werte x und y, die nicht mehr reell zu sein brauchen, sind in $H(x, y)$ einzusetzen. Die Koeffizienten von

[1] G. Pólya, Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1928, S. 96.

$K(D, \tilde{D})$ sind analytische singularitätenfreie (i. a. mehrdeutige) Funktionen der Koeffizienten von $D < \mathfrak{D}_2$, $\tilde{D} < \mathfrak{D}_2$.

Mit Hilfe von (4) und (5) kann man ohne Schwierigkeiten alle Darstellungen $H(D)$ aufstellen[1]: doch ist das für das Folgende nicht von Bedeutung.

2. Bemerkungen über die Parameterdarstellung.

Unter $D_{\varkappa\lambda}(\phi)$ werde im folgenden für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n$; $\varkappa \neq \lambda$ die Substitution

$$x'_\varkappa = x_\varkappa \cos\phi + x_\lambda \sin\phi$$
$$x'_\lambda = -x_\varkappa \sin\phi + x_\lambda \cos\phi$$
$$x'_\mu = x_\mu \qquad (\mu \neq \varkappa, \lambda; \mu = 1, 2, \cdots, n)$$

verstanden; es werde $D_{1\lambda}(\phi) = T_\lambda(\phi)$ gesetzt.

Es sei $A = (a_{\varkappa\lambda}) < \mathfrak{D}_n$. In $A\,T_\lambda(\phi)$ stimmt die erste Zeile, abgesehen von den Elementen in der ersten und der λ-ten Spalte, mit der ersten Zeile von A überein; in der λ-Spalte steht

$$a_{11} \sin\phi + a_{1\lambda} \cos\phi .$$

Ist $a_{11}^2 + a_{1\lambda}^2 \neq 0$, so kann man durch geeignete Wahl von ϕ erreichen, daß diese Größe Null wird. Das Element in der ersten Spalte wird dann, da die Quadratsumme aller Elemente der ersten Zeile dieselbe geblieben ist, $\pm\sqrt{a_{11}^2 + a_{1\lambda}^2}$.

Es bezeichne jetzt $\mathfrak{D}'$ die Teilmenge von $\mathfrak{D}$, für deren Elemente $A = (a_{\varkappa\lambda})$ die Bedingungen

$$(7)\quad a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0, \cdots, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1,n-1}^2 \neq 0$$

sämtlich erfüllt sind. Ist $A < \mathfrak{D}'$, so bestimme man zunächst ψ_2 so, daß in $A\,T_2(\psi_2)$ das zweite Element der ersten Zeile Null wird. Das ist wegen der ersten Bedingung (7) möglich. Das erste Element der ersten Zeile wird $\pm\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}$. Danach bestimme man ψ_3 so, daß das dritte Element der ersten Zeile in $A\,T_2(\psi_2)\,T_3(\psi_3)$ Null wird, das ist wegen der zweiten Bedingung (7) möglich. So fahre man fort. Man findet schließlich ein Produkt

$$(8)\qquad B = A\,T_2(\psi_2)\,T_3(\psi_3)\cdots T_n(\psi_n),$$

in dem in der ersten Zeile nur an erster Stelle ein von Null verschiedenes Element steht. Dies muß dann ± 1 sein. Ersetzt man ψ_n eventuell durch $\psi_n + \pi$, d. h. multipliziert man B mit $T_n(\pi)$, so kann man erreichen, daß hier das positive Vorzeichen gilt. Aus den Orthogonalitätsbedingungen für die Zeilen von B folgt dann, daß auch in der ersten Spalte von B, abgesehen von dem Element in der ersten Zeile. lauter Nullen stehen, B hat die Form

$$(9)\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

---

[1] Man vergleiche I. Schur, Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. (1928), S. 96, §§ 3 und 4.

wo C orthogonal vom Grade $n-1$ ist. Die Gesamtheit aller B von dieser Form heiße $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ ist zu $\mathfrak{D}_{n-1}$ isomorph. Setzt man $\phi_\nu = -\psi_\nu$ ($\nu = 2, 3, \cdots, n$), so gilt $T_\nu^{-1}(\psi_\nu) = T_\nu(-\psi_\nu) = T_\nu(\phi_\nu)$, also folgt aus (8)

$$A = B\,T_n(\phi_n)\,T_{n-1}(\phi_{n-1}) \cdots T_2(\phi_2)\,. \tag{10}$$

Durch A sind dabei B und die $T_\varkappa(\phi_\varkappa)$ nicht eindeutig bestimmt. Es sei etwa $A = E$. Soll (10) gelten, so muß in $BT_n(\phi_n)$ das letzte Element der ersten Zeile 0 sein, da durch Hinzufügen der Faktoren $T_{n-1}(\phi_{n-1})$, $\cdots$, $T_2(\phi_2)$ dies Element nicht mehr geändert wird (vgl. oben) und schließlich E herauskommt. Die übrigen Elemente der ersten Zeile in $BT_n(\phi_n)$, abgesehen vom ersten, sind dieselben wie in B und daher auch alle 0. Daher lautet die erste Zeile in $BT_n(\phi_n)$

$$\pm 1, 0, 0 \cdots, 0\,.$$

Man schließt schrittweise analog, daß die erste Zeile in

$$B_\varkappa = BT_n(\phi_n)\,T_{n-1}(\phi_{n-1}) \cdots T_\varkappa(\phi_\varkappa)$$

dieselbe Form haben muß; wegen (9) gilt das auch für B. Aus

$$BT_n(\phi_n) = B_n\,, \qquad B_{\varkappa+1}T_\varkappa(\phi_\varkappa) = B_\varkappa \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n-1)$$

folgt durch Betrachten der ersten Zeile $\pm \sin\phi_\varkappa = 0$, also $\phi_\varkappa \equiv 0$ oder $\phi_\varkappa \equiv \pi \pmod{2\pi}$. $T_\varkappa(0)$ ist E; $T_\varkappa(\pi)$ ist eine Diagonalmatrix, bei der in der ersten Zeile -1 steht. Damit (10) für $A = E$ gilt, muß also $\phi_\varkappa$ für für eine gerade Anzahl von Indizes $\varkappa$ den Wert π haben, da sonst das Element in der ersten Zeile ersten Spalte auf der rechten Seite von (10) -1 wäre.

Eine Matrix n-ten Grades ist durch $2n^2$ reelle Zahlen, die Real- und Imaginärteile ihrer n^2 Koeffizienten gegeben; man kann daher die Gesamtheit aller dieser Matrizen als Punkte eines $2n^2$-dimensionalen Raumes auffassen. Die orthogonalen Matrizen der Determinante 1 bilden eine Teilmannigfaltigkeit, die wieder mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_n$ bezeichnet werde. In $\mathfrak{D}$ ist dann ein Umgebungsbegriff definiert. Eine Umgebung eines Punktes aus $\mathfrak{D}$, die sich umkehrbar eindeutig und stetig auf das Innere einer offenen Kugel von geeigneter Dimensionenzahl abbilden läßt, soll gelegentlich nach Schreier[1] kurz als Kugelumgebung bezeichnet werden. $\mathfrak{D}'$ sei die durch (7) definierte Teilmenge von $\mathfrak{D}$.

Offenbar kann man dann um jeden Punkt von $\mathfrak{D}'$ eine Umgebung angeben, so daß für diese (10) gilt und dabei die Koeffizienten von B, $T_n(\phi_n)$, $\cdots$, $T_2(\phi_2)$ analytische Funktionen der Koeffizienten von A sind.

Für die Gruppe $\mathfrak{D}_{n-1}$ sei bereits bekannt, daß man die Koeffizienten der Gruppenelemente für eine gewisse Umgebung des Einheitselementes als analytische Funktionen einer gewissen Anzahl von Parametern darstellen kann, die ihrerseits analytische Funktionen dieser Koeffizienten sind. Für $n = 2$ ist das sicher möglich. Aus (10) folgt dann, daß das gleiche für $\mathfrak{D}_n$ gilt. Daß ferner das Analoge für eine geeignete Umgebung eines beliebigen D_0 aus

[1] Abhandlungen aus dem Mathem. Seminar Hamburg 4 (1925) S. 15.

$\mathfrak{D}_n$ gilt, ergibt sich, wenn man $D = D_0 A$ setzt und A in einer Umgebung von E durch Parameter darstellt. Die Parameterdarstellung ist offenbar in einer Umgebung von E so zu wählen, daß die Parameter komplexe Zahlen sind, die in Kreisen um den Nullpunkt liegen, und daß zu konjugiert komplexen Werten der Parameter konjugiert komplexe orthogonale Matrizen gehören.

Ist eine analytische Funktion der Koeffizienten einer orthogonalen Matrix D gegeben, kurz gesagt, eine analytische Funktion $f(D)$, so ist jetzt ohne Schwierigkeit zu definieren, was unter analytischer Fortsetzung dieser Funktion innerhalb der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{D}$ zu verstehen ist.

Die Punkte von $\mathfrak{D}'$ liegen in $\mathfrak{D}$ überall dicht. Denn im andern Fall könnte man ein Element D von $\mathfrak{D}$ finden, so daß, wenn man $D.Z = (a_{\varkappa\lambda})$ setzt, für alle Z aus einer gewissen Umgebung von E die Beziehung

$$(11) \qquad (a_{11}^2 + a_{12}^2)(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \cdots (a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1,n-1}^2) = 0$$

gilt. Durch analytische Fortsetzung würde sich ergeben, daß das für alle Z aus $\mathfrak{D}$ gelten müßte, während es z. B. für $Z = D^{-1}$ falsch ist.

Hat man eine Kugelumgebung U in $\mathfrak{D}$, und sind A_1 und A_2 zwei Punkte des Durchschnitts von U und $\mathfrak{D}'$, so können sie innerhalb dieses Durchschnittes durch eine stetige Kurve verbunden werden. Es genügt hier, den Fall zu betrachten, daß man die Elemente A von U eineindeutig durch Parameter $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_r$ in analytischer Form darstellen kann; χ_ϱ sei dabei eine komplexe Zahl, die auf einen Kreis in der Zahlenebene beschränkt ist ($\varrho = 1, 2, \cdots, r$). Für jeden Punkt von $\mathfrak{D}$ gibt es derartige Umgebungen. Die nicht zu $\mathfrak{D}'$ gehörenden Punkte $A = (a_{\varkappa\lambda})$ von $\mathfrak{D}$ müssen die Relation (11) erfüllen, die eine analytische Relation $F(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_r) = 0$ ergibt. Diese ist in U nicht identisch erfüllt; die Punkte, für die sie gilt, zerlegen dann offenbar U nicht.

Es soll noch gezeigt werden, daß eine in $\mathfrak{D}$ verlaufende stetige geschlossene Kurve γ durch beliebig kleine stetige Deformation in eine ganz in $\mathfrak{D}'$ verlaufende Kurve übergeführt werden kann. Man teile nämlich γ durch genügend benachbarte Teilpunkte $A_1, A_2, \cdots, A_m, A_{m+1} = A_1$, ersetze jedes A_μ durch einen genügend benachbarten Punkt A'_μ von $\mathfrak{D}'$ und verbinde A'_μ mit $A'_{\mu+1}$ durch eine in genügender Nähe in $\mathfrak{D}'$ verlaufende Kurve. Man erhält dann eine zu γ benachbarte Kurve γ' in $\mathfrak{D}'$. $A(t)$ sei ein Element von $\mathfrak{D}$, das stetig von einem Parameter t abhängt und die Kurve beschreibt, wenn t von 0 nach 1 läuft; dann wird γ' bei geeigneter Parameterwahl von $A(t) \cdot R(t)$ durchlaufen, wobei $R(t)$ stets in einer beliebig klein vorzuschreibenden Kugelumgebung von E bleibt. Die von $R(t)$ durchlaufene Kurve läßt sich daher stetig auf einen Punkt zusammenziehen; daher läßt sich γ durch stetige Deformation in γ' überführen.

3. Über die topologische Struktur der Gruppenmannigfaltigkeit.

Zunächst werde eine Hilfsbetrachtung vorausgeschickt. In den in § 2 eingeführten Bezeichnungen werde für zwei Indizes $\rho, \sigma = 2, 3, \cdots, n$ $(\rho \neq \sigma)$

$$A = D_{\rho\sigma}(\chi) \cdot T_\rho(\phi_\rho) \cdot T_\sigma(\phi_\sigma)$$

gesetzt. Dann laufe 1) ϕ_ϱ von π bis $\frac{3\pi}{2}$, während $\chi = \phi_\sigma = \pi$ ist; 2) bei festem $\phi_\rho = \frac{3\pi}{2}$ laufe χ von π nach 2π und gleichzeitig ϕ_σ von π nach 0, derart, daß $\chi + \phi_\sigma = 2\pi$ ist; 3) ϕ_ρ laufe von $\frac{3\pi}{2}$ nach 2π, während $\chi \equiv \phi_\sigma \equiv 0$ (mod 2π) ist. Da identisch

$$D_{\varrho\sigma}(-\phi_\sigma)\, T_\varrho\left(\frac{3\pi}{2}\right) T_\sigma(\phi_\sigma) = T_\varrho\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

ist, bleibt bei 2) A fest. Wegen

$$D_{\varrho\sigma}(\pi)\, T_\varrho(\phi_\varrho)\, T_\sigma(\pi) = T_\varrho(\pi - \phi_\varrho) = D_{\varrho\sigma}(0)\, T_\varrho(\pi - \phi_\varrho)\, T_\sigma(0)$$

durchläuft A bei 3) gerade den entgegengesetzten Weg wie bei 1). Insgesamt beschreibt A also eine geschlossene, stetig auf einen Punkt zusammenziehbare Kurve. Am Anfang ist $\chi = \phi_\varrho = \phi_\sigma = \pi$, am Ende $\chi \equiv \phi_\varrho \equiv \phi_\sigma \equiv 0$ (mod 2π).

Durchläuft A irgendeine geschlossene Kurve γ in $\mathfrak{D}$, und sind Z_1 und Z_2 feste Elemente aus $\mathfrak{D}$, so durchläuft $Z_1 A Z_2$ eine aus γ durch stetige Deformation entstehende Kurve; man kann nämlich Z_1 und Z_2 stetig in E überführen.

α bezeichne im folgenden stets die Kurve, die $T_2(\phi)$ beschreibt, wenn ϕ von 0 bis 2π läuft. Ersetzt man T_2 durch $D_{\varrho\sigma}$, so tritt an Stelle von α nur eine durch stetige Deformation aus α entstehende Kurve. α^k bezeichne, wie üblich, für $k > 0$ die k-mal durchlaufene Kurve α, für $k < 0$ die $|k|$-mal in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve α, für $k = 0$ einen beliebigen Punkt.

Es soll gezeigt werden, daß man in $\mathfrak{D}_n$ jede geschlossene Kurve γ stetig in α^k für geeignetes k deformieren kann. Für $n = 2$ ist das richtig; es sei schon für $\mathfrak{D}_{n-1}$ bewiesen.

Zunächst kann man nach § 2 durch stetige Deformation erreichen, daß γ ganz in $\mathfrak{D}'$ verläuft; als Anfangs- und Endpunkt kann man etwa E nehmen. $A = A(t)$ beschreibe γ, wenn t von 0 nach 1 läuft. Zu jedem A gehört nach (10) ein System

$$B, \phi_n, \phi_{n-1}, \cdots, \phi_2; \tag{12}$$

man kann diese Größen so wählen, daß sie stetig von t abhängen und für $t = 0$ die Werte

$$E, 0, 0, \cdots, 0 \tag{12a}$$

annehmen. Zu $t = 1$ gehöre das System

$$B^*, \phi_n^*, \phi_{n-1}^*, \cdots, \phi_2^*; \tag{12b}$$

setzt man diese Größen in (10) ein, so muß E entstehen. Nach § 2 sind daher (mod 2π) alle Größen $\phi_\varkappa^* \equiv 0$, bis auf eine gerade Anzahl, die den Wert π haben. Es seien in der Reihe (12b) etwa ϕ_ϱ^* und ϕ_σ^* die beiden ersten, die kongruent π sind. Man setze

$$A = (B^* D_{\varrho\sigma}(\pi) D_{\varrho\sigma}(\chi)) \cdot T_\varrho(\phi_\varrho) T_\sigma(\phi_\sigma) T_{\sigma+1}(\phi^*_{\sigma+1}) \cdots T_n(\phi^*_n),$$

beachte $D_{\varrho\sigma}(\chi) < \mathfrak{B}$ und lasse (mod 2π) χ, ϕ_ϱ, ϕ_σ dieselben Werte wie in der Hilfsbetrachtung am Anfang durchlaufen. A durchläuft dann, wie bewiesen wurde, eine stetig auf einen Punkt zusammenziehbare Kurve $\delta_{\varrho\sigma}$. Läßt man A nach Durchlaufen von γ noch $\delta_{\varrho\sigma}$ beschreiben, so kommt das auf eine stetige Deformation heraus. Man kann dadurch erreichen, daß B^* durch $B^* D_{\varrho\sigma}(\pi)$, ϕ^*_ϱ und ϕ^*_σ beide durch 0 (mod 2π) zu ersetzen sind, während die andern Größen (12b) ungeändert bleiben. Fährt man analog fort, so erkennt man, daß man durch stetige Deformation von γ erreichen kann, daß alle $\phi^*_\varkappa \equiv 0$ (mod 2π) sind; es muß dann $B^* = E$ sein. Wir nehmen an, daß das in (12b) bereits der Fall sei.

Läuft t von 0 nach 1, so beschreiben die Größen (12) *gleichzeitig* stetige Kurven. Läßt man sie diese Kurven nun *nacheinander* durchlaufen, so wird das durch (10) definierte A an Stelle von γ eine Kurve beschreiben, die aus γ durch stetige Deformation hervorgeht. B durchläuft eine geschlossene Kurve β in der Teilmenge $\mathfrak{B}$, die mit $\mathfrak{D}_{n-1}$ als identisch anzusehen ist (vgl. § 2, (9)). Nach Induktionsvoraussetzung kann man β in α^l deformieren. Da alle $\phi_\varkappa = 0$ sind, ist $A = B$, A beschreibt dieselbe Kurve.

$\phi_\varkappa$ laufe von 0 nach $2 m_\varkappa \pi$ ($m_\varkappa$ ganz rational), während $B = E$, alle andern $\phi_\lambda \equiv 0$ (mod 2π) sind, es ist dann $A = T_\varkappa(\phi_\varkappa)$. Durch stetige Deformation kann man erreichen, daß $\phi_\varkappa$ nur reelle Werte, und zwar monoton durchläuft. A beschreibt dann eine Kurve, die in $\alpha^{m_\varkappa}$ deformiert werden kann ($\varkappa = n, n-1, \cdots, 2$).

Die gesamte von A durchlaufene Kurve γ kann daher ebenfalls in eine Potenz α^k deformiert werden; damit ist die oben ausgesprochene Behauptung auch für $\mathfrak{D}_n$ bewiesen.

Für $n \geqq 3$ gilt

$$T_3(\pi)^{-1} \cdot T_2(\phi)\, T_3(\pi) = T_2(-\phi);$$

daher kann α stetig in α^{-1}, α^2 also in α^0 und jeder geschlossene Weg entweder in α^0 oder α deformiert werden.

Satz: Für $n \geqq 3$ hat die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{D}$ die Ordnung 2[1].

4. Analytische Fortsetzung der eine Darstellung vermittelnden Funktionen.

Es seien A und $\tilde{A}$ zwei Elemente von $\mathfrak{D}$. Im folgenden werden Matrizen $K(A, \tilde{A})$ betrachtet, deren Koeffizienten analytisch von A und $\tilde{A}$ abhängen. Sind $K_1(A, \tilde{A})$ und $K_2(A, \tilde{A})$ zwei derartige Matrizen, die etwa für alle A, $\tilde{A}$

[1] Eigentlich müßte hier noch gezeigt werden, daß α nicht in α^0 deformiert werden kann, doch ergibt sich das aus dem Folgenden von selbst. — Ist $\mathfrak{D}$ die reelle Drehungsgruppe, so ist der entsprechende Satz schon von Hrn. Weyl a. a. O. S. 346 bewiesen. Setzt man das als bekannt voraus, so läßt sich der Beweis hier vereinfachen.

aus einer gewissen Umgebung von E definiert sind, und gilt

$$K_1(A, \bar{A}) = K_2(A, \bar{A}).$$

so müssen K_1 und K_2 identisch sein[1].

$\mathfrak{H}$ sei eine stetige Darstellung von $\mathfrak{D}$, bei der $A < \mathfrak{D}$ etwa $H(A)$ zugeordnet sei. Dann soll gezeigt werden, daß es eine Matrix $K(A, \tilde{A})$ gibt, deren Koeffizienten analytische, singularitätenfreie (aber im allgemeinen mehrdeutige) Funktionen von A und $\tilde{A}$, $(A < \mathfrak{D}, \tilde{A} < \mathfrak{D})$, sind, für die

$$H(A) = K(A, \bar{A}) \quad (13)$$

gilt.[2]

Für $n = 2$ ist das bereits in § 1 gezeigt, es sei bereits für $\mathfrak{D}_{n-1}$ nachgewiesen. A und $\tilde{A}$ mögen zunächst in $\mathfrak{D}'$ liegen, es sei

$$A = B T_n T_{n-1} \cdots T_2, \quad (14)$$

wo B in $\mathfrak{B}$ liegt, und $T_\varkappa = T_\varkappa(\phi_\varkappa)$ für geeignetes $\phi_\varkappa$ sei; die Koeffizienten von B und den $T_\varkappa$ hängen analytisch von A ab. Für $\tilde{A}$ sei entsprechend

$$\tilde{A} = \tilde{B} \tilde{T}_n \tilde{T}_{n-1} \cdots \tilde{T}_2. \quad (15)$$

Aus (14) folgt

$$H(A) = H(B) H(T_n) \cdots H(T_2). \quad (16)$$

Läßt man B alle Elemente von $\mathfrak{B}$ durchlaufen, so liefert wegen (9) $H(B)$ eine Darstellung der mit $\mathfrak{D}_{n-1}$ als identisch anzusehenden Gruppe $\mathfrak{B}$. Setzt man analog in $H(T_\varkappa)$ für $T_\varkappa$ alle $T_\varkappa(\phi_\varkappa)$ ein, so erhält man eine Darstellung von $\mathfrak{D}_2$. Da für $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_{n-1}$ alles bewiesen ist, folgt: Es gibt eine Matrix K, deren Koeffizienten analytisch von $B, \tilde{B}, T_n, \tilde{T}_n, \cdots, T_2, \tilde{T}_2$ abhängen und die bei geeigneter Wahl des Zweiges in $H(A)$ übergeht, wenn man $\tilde{B}$ durch $\bar{B}$, $\tilde{T}_\varkappa$ durch $\bar{T}_\varkappa$ ersetzt. Für $A < \mathfrak{D}'$, $\tilde{A} < \mathfrak{D}'$ ergibt sich, daß K analytisch von A und $\tilde{A}$ abhängt, was durch $K = K(A, \tilde{A})$ angedeutet werde. Ersetzt man $\tilde{A}$ durch $\bar{A}$, so erhält man (13).

Solange A und $\tilde{A}$ in $\mathfrak{D}'$ bleiben, läßt sich nach dem Gesagten $K(A, \tilde{A})$ ungehindert analytisch fortsetzen. Durchlaufen A und $\tilde{A}$ Wege in $\mathfrak{D}$, für deren Anfangs- und Endpunkte beide Male A und $\tilde{A}$ in $\mathfrak{D}'$ liegen, so kann

---

[1] Denn man kann A in analytischer Form durch Parameter $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_r$ ausdrücken, die komplexe Zahlen etwa in einer Umgebung des Nullpunktes sind, derart, daß zu $\bar{A}$ die Parameterwerte $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \cdots, \bar{\phi}_r$ gehören. Setzt man $\phi_\varrho = x_\varrho + i y_\varrho$, $\bar{\phi}_\varrho = \bar{x}_\varrho - i \bar{y}_\varrho$, so geht (13) in eine Reihe von analytischen Relationen über, die für reelle x_ϱ, y_ϱ von genügend kleinem absoluten Betrage erfüllt sind. Diese müssen dann in einer gewissen Umgebung auch noch gelten, wenn x_ϱ, y_ϱ nicht reell sind. Dem entspricht aber, daß man für alle ϱ das Paar $\phi_\varrho, \bar{\phi}_\varrho$ durch zwei in einem gewissen Bereich beliebige Zahlen $\phi_\varrho, \tilde{\phi}_\varrho$ ersetzen darf. Daher darf man in (13) $\bar{A}$ durch ein beliebiges genügend nahe bei E gelegenes Element $\tilde{A}$ von $\mathfrak{D}$ ersetzen. Durch analytische Fortsetzung ergibt sich, daß K_1 und K_2 überall übereinstimmen, wo beide Ausdrücke definiert sind.

[2] Zu diesem Ansatz vgl. auch die in § 2 genannte Arbeit von Hrn. Schur. — In (13) ist der Zweig von K geeignet zu wählen. Dieselbe Wahl des Zweiges ist dann auch für eine ganze Umgebung von A möglich.

man die Wege nach § 2 durch beliebig kleine stetige Deformation in ganz in $\mathfrak{D}'$ liegende Wege überführen. Ist also längs der ursprünglichen Wege analytische Fortsetzung möglich, so kommt man zu einem Ergebnis, das man auch schon durch Fortsetzung innerhalb $\mathfrak{D}'$ erhalten kann.

Läßt sich $K(A, \bar{A})$ nach $A_1, \bar{A}_1$ hinein nicht mehr fortsetzen, so können A_1 und $\bar{A}_1$ daher nicht beide in $\mathfrak{D}'$ liegen. Man bestimme dann ein festes Elements A^* von $\mathfrak{D}$, so daß $\mathfrak{D}'' = A^*\mathfrak{D}'$ die Elemente E, A_1, $\bar{A}_1$ enthält, was offenbar möglich ist. Das eben für $\mathfrak{D}'$ Nachgewiesene läßt sich dann analog für $\mathfrak{D}''$ zeigen, die hier auftretende Matrix sei $K_1(A, \bar{A})$. Eine gewisse Umgebung von E gehört zu $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}''$, dort ist für geeignete Zweige

$$K(A, \bar{A}) = K_1(A, \bar{A}) = H(A).$$

Nach der Vorbemerkung sind dann K und K_1 als identisch anzusehen, daher ist die Fortsetzung von $K(A, \bar{A})$ nach $A_1, \bar{A}_1$ sicher möglich; $K(A, \bar{A})$ ist also für $A < \mathfrak{D}$, $\bar{A} < \mathfrak{D}$ unbeschränkt fortsetzbar. (13) muß allgemein gelten.

5. Die Funktionalgleichung für $K(A, \bar{A})$.

Sind A und B zwei Elemente von $\mathfrak{D}$, so gilt für eine Darstellung

$$H(A)H(B) = H(AB).$$

Aus (13) folgt daher bei geeigneter Wahl der Zweige

$$K(A, \bar{A})K(B, \bar{B}) = K(AB, \bar{A}\bar{B}). \tag{17}$$

Sind A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$ in der Nähe von E gelegen, und bezeichnet $K_1(A, \bar{A})$ im folgenden den durch unmittelbare Fortsetzung aus $K(A, \bar{A})$ in der Nähe von $A = \bar{A} = E$ entstehenden Wert, so folgt aus (17) nach der Vorbemerkung von § 4

$$K_1(A, \tilde{A})K_1(B, \tilde{B}) = K_1(AB, \tilde{A}\tilde{B}). \tag{18}$$

Man setze

$$L_1(A) = K_1(A, E), \qquad M_1(B) = K_1(E, B). \tag{19}$$

Die aus $L_1(A)$ bzw. $M_1(B)$ bei analytischer Fortsetzung entstehenden Matrizen mögen mit $L(A)$ bzw. $M(B)$ bezeichnet werden; diese Fortsetzung ist für $A < \mathfrak{D}$, $B < \mathfrak{D}$ unbeschränkt möglich. Da nun die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{D}$ die Ordnung 2 hat, ist eine in $\mathfrak{D}$ überall analytische Funktion höchstens zweideutig; das gilt also für $L(A)$ und ebenso für $M(B)$. Zunächst sei $L(A)$ zweideutig. Setzt man $L(A)$ längs eines geschlossenen Weges fort, so kehrt $L(A)$ zu dem Anfangswert zurück oder nimmt am Schluß den andern möglichen Wert an, je nachdem, ob man den Weg stetig auf einen Punkt zusammenziehen oder in den Weg α deformieren kann. In der Umgebung von E sei der zweite Zweig von $L(A)$ mit $L_2(A)$ bezeichnet.

Aus (18) und (19) folgt für zwei nahe bei E gelegene Werte A und B

$$L_1(A)L_1(B) = L_1(AB). \tag{20}$$

Läßt man hier A bei festem B einen nicht auf einen Punkt zusammenziehbaren geschlossenen Weg durchlaufen, so ergibt sich durch analytische Fortsetzung, da AB einen ebensolchen Weg durchläuft,

$$L_2(A)\,L_1(B) = L_2(AB)\,. \tag{21}$$

Hält man in (20) und (21) A fest und läßt B einen entsprechenden geschlossenen Weg durchlaufen, so folgt

$$L_1(A)\,L_2(B) = L_2(AB) \tag{22}$$

$$L_2(A)\,L_2(B) = L_1(AB)\,. \tag{23}$$

Aus (21), (22) und (23) ergibt sich

$$L_1(A)\,L_2(E) = L_2(A) = L_1(A)\,L_2(E) \tag{24}$$

$$L_2(E)^2 = L_1(E) = E\,. \tag{25}$$

Wegen (25) sind die charakteristischen Wurzeln von $L_2(E)$ alle ± 1; die Elementarteiler von $L_2(E)$ sind alle linear.

Aus (18) und (19) folgt, wenn A und B genügend nahe bei E liegen,

$$L_1(A)\,M_1(B) = \mathrm{K}_1(A, B) = M_1(B)\,L_1(A)\,. \tag{26}$$

Analytische Fortsetzung ergibt dann die Vertauschbarkeit von jedem $L(A)$ mit jedem $M(B)$; speziell ist $L_2(E)$ mit allen $M(B)$ vertauschbar. Nach (24) ist $L_2(E)$ auch mit allen $L_1(\mathrm{A})$ vertauschbar, wegen (26) also auch mit allen $K_1(AB)$. Analytische Fortsetzung ergibt dann, daß $L_2(E)$ mit allen $K(A, B)$ überhaupt vertauschbar ist, wegen (13) also speziell mit allen $H(A)$. Ist, wie jetzt angenommen werden soll, $\mathfrak{H}$ *unzerfällbar*[1], so kann $L_2(E)$ nur eine charakteristische Wurzel haben; aus den oben für $L_2(E)$ abgeleiteten Bedingungen folgt dann $L_2(E) = \pm E$. Ist $L_2(A)$ wirklich zweideutig, so muß $L_2(E) = -E$ sein, da sonst aus (24) $L_1(A) = L_2(A)$ für alle A in genügender Nähe von E, d. h. die Eindeutigkeit von $L(A)$ folgen würde. Wegen

$$L_2(E) = -E$$

ergibt (24)

$$L_2(A) = -L_1(A)\,,$$

und durch analytische Fortsetzung folgt, daß überall zwischen den beiden Zweigen von $L(A)$ diese Beziehung besteht. Aus (20) ergibt sich durch Fortsetzung

$$L(A)\,L(B) = \pm L(AB)\,. \tag{27}$$

Daher ist $L(A)$ eine analytische Darstellung von $\mathfrak{D}$ durch Kollineationen[2].

[1] D. h. es ist nicht möglich, $\mathfrak{H}$ durch passende Wahl der Koordinaten in die Form

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$$

zu bringen, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ selbst Darstellungen sind. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Unzertällbarkeit ist, daß jede mit allen Elementen von $\mathfrak{H}$ vertauschbare Matrix nur eine charakteristische Wurzel hat (vgl. die Einleitung der in § 2 genannten Arbeit von Hrn. Schur).

[2] Wegen der Definition einer derartigen Darstellung vgl. man § 7.

Ist $L(A)$ eindeutig, so folgt aus (20), daß (27) mit dem positiven Vorzeichen gilt; $L(A)$ ist dann eine analytische Darstellung von $\mathfrak{D}$ durch lineare Substitutionen. Genau das Analoge ist über $M(B)$ zu sagen.

Aus (26) ergibt sich für beliebige A und B aus $\mathfrak{D}$

$$K(A, B) = \pm L(A)\, M(B) = \pm M(B)\, L(A) \tag{28}$$

$$H(A) = \pm L(A)\, M(\bar{A})\,. \tag{29}$$

Ist von $L(A)$ und $M(B)$ das eine eindeutig, so auch das andere: denn mit A durchläuft auch $\bar{A}$ einen nicht zusammenziehbaren Weg; wegen der Eindeutigkeit von $H(A)$ müssen in (29) rechts beide Faktoren oder kein Faktor das Vorzeichen wechseln.

Die Gesamtheit aller $L(A)$ bildet eine Gruppe $\mathfrak{L}$, analog bilden die $M(B)$ eine Gruppe $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ sind als analytische Darstellungen vollständig reduzibel[1]. Besitzt $\mathfrak{L}$ zwei wesentlich verschiedene irreduzible Bestandteile, so schließt man aus der Vertauschbarkeit jedes Elementes von $\mathfrak{L}$ mit jedem Element von $\mathfrak{M}$ leicht die Zerfällbarkeit von $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$; wegen (29) wäre dann $\mathfrak{H}$ doch zerfällbar. Also muß $\mathfrak{L}$ die Form

$$L(A) = S(A) \times E_l \tag{30}$$

haben, wo E_l die Einheitsmatrix vom Grade l, $S(A)$ eine analytische irreduzible Darstellung von $\mathfrak{D}$ durch lineare Transformationen bzw. Kollineationen, etwa vom Grade k ist. Da $M(B)$ mit $L(A)$ vertauschbar ist, folgt aus (30) in bekannter Weise

$$M(B) = E_k \times T(B)\,, \tag{31}$$

wo $T(B)$ eine analytische Darstellung von $\mathfrak{D}$ von gleicher Art wie $S(A)$ ist. Aus (30), (31), (28) und (29) folgt

$$K(A, B) = \pm S(A) \times T(B) \tag{32}$$

$$H(A) = \pm S(A) \times T(\bar{A})\,. \tag{33}$$

Wegen (33) muß $T(B)$ irreduzibel sein, da es sonst zerfällbar wäre, $\mathfrak{H}$ folglich auch zerfällbar wäre.

6. Die stetigen Darstellungen von $\mathfrak{D}$.

Satz: Es seien für $(n \geqq 3)$ $S(A)$ *und* $T(A)$ *irreduzible analytische Darstellungen von* $\mathfrak{D}_n$ *durch lineare Substitutionen, bzw. beides irreduzible analytische Darstellungen von* $\mathfrak{D}$ *durch Kollineationen. Dann ist* $H(A) = S(A) \times T(A)$ *eine irreduzible Darstellung von* $\mathfrak{D}$ *durch lineare Transformationen (im zweiten Fall bei geeigneter Festlegung des Vorzeichens). Man erhält so alle irreduziblen stetigen Darstellungen von* $\mathfrak{D}$.

Daß jede unzerfällbare stetige Darstellung von $\mathfrak{D}$ die im Satz angegebene Form hat, ist das Ergebnis von § 5. Umgekehrt seien $S(A)$ und $T(A)$ von der genannten Art, es sei $H(A) = S(A) \times T(\bar{A})$. Das Vorzeichen sei so fest-

[1] Vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten von Hrn. I. Schur und Hrn. H. Weyl.

gelegt, daß $H(E)$ die Einheitsmatrix ist. Setzt man von dieser Stelle ausgehend $H(A)$ stetig fort, so ist $H(A)$ eindeutig festgelegt, da bei einem geschlossenen Weg, bei dem $S(A)$ sein Vorzeichen wechselt, auch $T(\bar{A})$ sein Vorzeichen ändert. Liegen A und B zunächst nahe bei E, so folgt

$$(S(A)\times(T(\bar{A}))\,(S(B)\times T(\bar{B}))=S(A)\,S(B)\times T(A)\,T(B)=S(AB)\times T(AB)$$
$$H(A)\,H(B)=H(AB)\,.$$

Durch stetige Fortsetzung ergibt sich, daß das für alle A und B gilt, da für andere A und B höchstens das Vorzeichen fraglich ist; daß also $H(A)$ eine Darstellung durch Matrizen ist. Wäre $H(A)$ reduzibel, so könnte man einen irreduziblen Bestandteil nach § 5 in entsprechender Form $S_1(A)\times T_1(\bar{A})$ darstellen. Dann ergibt sich durch analytische Fortsetzung, daß $S_1(A)\times T_1(\tilde{A})$ für $A<\mathfrak{D}$, $\tilde{A}<\mathfrak{D}$ ein Bestandteil von $S(A)\times T(\tilde{A})$ ist. Für $\tilde{A}=E$ folgt, daß $S_1(A)$ Bestandteil von $S(A)$ ist, analog für $A=E$, daß $T_1(\tilde{A})$ Bestandteil von $T(\tilde{A})$ ist. Wegen der Irreduzibilität von S und T ist also $S=S_1$ und $T=T_1$; daher ist $H(A)$ irreduzibel, und die Behauptung ist bewiesen.

Da nach § 5 jede unzerfällbare stetige Darstellung die Form $S(A)\times T(\bar{A})$ mit irreduziblem S und T hat, jede derartige Darstellung aber irreduzibel ist, ist jede unzerfällbare Darstellung von $\mathfrak{D}$ irreduzibel. Daraus folgt:

Satz: Die stetigen Darstellungen von $\mathfrak{D}_n$ sind für $n\geqq 3$ vollständig reduzibel.

Damit ist die Bestimmung aller stetigen Darstellungen auf die Aufstellung der analytischen Darstellungen von $\mathfrak{D}$ durch lineare Substitutionen und durch Kollineationen zurückgeführt worden, diese Aufgaben können als gelöst angesehen werden (vgl. die in der Einleitung genannten Arbeiten).

7. Einige Bemerkungen über die Darstellung durch Kollineationen.

Ist $\mathfrak{R}$ die Gesamtheit der linearen Substitutionen von nicht verschwindender Determinante von einem festen Grad m, bedeutet ferner $\mathfrak{M}$ die invariante Untergruppe von $\mathfrak{R}$, die aus den Elementen der Form cE besteht, so versteht man unter Kollineationen die Elemente der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{M}}=\mathfrak{C}$. Da in $\mathfrak{R}$ ein Grenzbegriff gegeben ist, kann man in naheliegender Weise auch in $\mathfrak{C}$ einen »natürlichen Grenzbegriff« einführen[1].

Ist jedem $A<\mathfrak{D}$ ein $C(A)<\mathfrak{C}$ stetig zugeordnet, so daß für $A<\mathfrak{D}$, $B<\mathfrak{D}$ stets

$$C(A)\,C(B)=C(AB)$$

gilt, so spricht man von einer stetigen Darstellung von $\mathfrak{D}$ durch Kollineationen.

Jeder Kollineation C entsprechen genau m Matrizen von der Determinante 1, die bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{C}$ gerade in C übergehen. Ist $R(A)$ eine der $C(A)$ entsprechenden Matrizen von der Determinante 1, so kann man $R(A)$ offenbar so festlegen, daß es im Kleinen eindeutig und

[1] Vgl. die in § 2 genannte Arbeit von Schreier.

stetig von A abhängt und beliebig stetig fortsetzbar ist, im Großen kann es aber mehrdeutig werden. Für beliebige $A < \mathfrak{D}$, $B < \mathfrak{D}$ und beliebige Zweige der Funktion R gilt stets

$$R(A)\,R(B) = u\,R(AB),$$

wo u eine von A, B und der Wahl der Zweige abhängige Zahl ist. Man kann, was häufig bequemer ist, eine Darstellung von $\mathfrak{D}$ durch Kollineationen auch als Zuordnung von $R(A)$ zu $A < \mathfrak{D}$ definieren, wobei $R(A)$ den eben aufgestellten Forderungen zu genügen hat. Es ist klar, wann man eine Darstellung $R(A)$ analytisch zu nennen hat.

Wendet man die früheren Methoden auf die Untersuchung der stetigen Darstellungen von $\mathfrak{D}$ durch Kollineationen an, so erkennt man analog, daß alle diese Darstellungen vollständig reduzibel sind. Man erhält in der Form $S(A) \times T(\bar{A})$ alle irreduziblen derartigen Darstellungen, wenn von S und T das eine eine analytische Darstellung durch lineare Substitutionen, das andere durch Kollineationen ist.

Sind $U(A)$ und $V(A)$ zwei analytische Darstellungen durch Kollineationen, so ist $U(A) \times V(A)$ eine analytische Darstellung durch lineare Substitutionen, sie ist also ganz und rational. Ist $U(A) = (u_{\varkappa\lambda})$, $V(A) = (v_{\mu\nu})$, so ist $u_{\varkappa\lambda}\, v_{\mu\nu}$ eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten von A. Ist für einen Bereich von $\mathfrak{D}$ etwa $v_{\varrho\sigma} \neq 0$, so folgt für $U = V$, $\varkappa = \mu = \rho$, $\lambda = \nu = \sigma$, daß $v_{\varrho\sigma}^2 = w$ ganz und rational ist. Für beliebiges U und $\mu = \rho$, $\nu = \sigma$ folgt dann, daß $u_{\varkappa\lambda}$ eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten von A, dividiert durch $\sqrt{w}$ ist; diese Quadratwurzel kann also bei allen Darstellungen und Koeffizienten gleich gewählt werden.

Für die Koeffizienten der stetigen Darstellungen $H(A)$ durch lineare Substitutionen ergibt sich aus § 6, daß sie in dem betrachteten Bereich ganze rationale Funktionen von $a_{\varkappa\lambda}$, dividiert durch $\sqrt{w\bar{w}} = |w|$ sind. w ist dabei selbst ganz und rational. In der Umgebung einer jeden Stelle von $\mathfrak{D}$ ist ein geeignetes $v_{\varrho\sigma} \neq 0$, also eine derartige Schreibweise der Koeffizienten von $H(A)$ möglich.

Verzichtet man bei den analytischen Darstellungen durch Kollineationen auf die Forderung, daß die Determinante von $U(A)$ den Wert 1 hat, so kann man den Nenner $\sqrt{w}$ fortlassen; man kann daher in der Umgebung jeder Stelle die Koeffizienten von $U(A)$ ganz und rational wählen.

Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen.

Von Dr. M. J. Belinfante
in Amsterdam.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 24. Oktober 1929 [s. oben S. 508].)

In der Abhandlung: »Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie« Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 154 p. 1—7, hat L. E. J. Brouwer die grundlegenden Definitionen gegeben für die intuitionistische Theorie der unendlichen Reihen.

In dieser Theorie werden die konvergenten Reihen der klassischen Theorie eingeteilt in non-oszillierende, negativ-konvergente und positiv-konvergente Reihen.

Man nennt eine unendliche Reihe $u_1 + u_2 + \cdots$, für welche die Summe der ersten n Glieder mit s_n bezeichnet wird, *non-oszillierend*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des gleichzeitigen Bestehens feststeht von einer unendlichen Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, n_3, \cdots$ und einer unendlichen Reihe positiver ganzer Zahlen $m_1, m_2, m_3, \cdots$, so daß $|s_{n_\nu + m_\nu} - s_{n_\nu}| > \varepsilon$ für jedes ν. Eine unendliche Reihe heißt *negativ-konvergent*, wenn eine Zahl s existiert mit der Eigenschaft, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des Bestehens feststeht von einer unendlichen Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, n_3, \cdots$, so daß $|s - s_{n_\nu}| > \varepsilon$ für jedes ν.

Eine unendliche Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, \cdots$ nennen wir im folgenden kurz eine Fundamentalreihe von Indizes.

Die Reihe $\sum u_n$ heißt *beschränkt*, wenn eine positive Zahl g existiert, so daß $|s_n| < g$ für jedes n.

Die Reihe $\sum u_n$ heißt *positiv-konvergent*, falls eine Zahl s existiert mit der Eigenschaft, daß für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche ganze positive Zahl n_ε besteht, daß $|s - s_n| < \varepsilon$ für jedes $n > n_\varepsilon$.

Positiv-konvergente Reihen sind auch negativ-konvergent und beschränkt; es gibt aber negativ-konvergente, nicht beschränkte, mithin auch negativ-konvergente, nicht positiv-konvergente Reihen.

Eine Folge $u_1, u_2, \cdots$ heißt *negativ-limitiert*, falls eine Zahl u existiert, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit feststeht einer steigenden Fundamental-

reihe natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, so daß $|u_{n_i} - u| > \varepsilon$ für jedes i. Wir sagen, u sei die Limes dieser Folge, und wir schreiben $\bar{}\lim u_n = u$.

Eine Reihe $\sum u_n$ heißt *negativ-summierbar* (C, k), falls eine Zahl existiert, so daß für jedes positive ε die Unmöglichkeit feststeht einer steigenden Fundamentalreihe $n_1 < n_2 < \cdots$, so daß $|C_{n_i}^{(k)}(u) - s| > \varepsilon$ für jedes i. $C_n^{(k)}(u)$ stellt den n^{ten} Mittelwert k^{ter} Ordnung nach Cesáro vor; er ist definiert durch

$$C_n^{(k)}(u) = \frac{1}{A_n(k)} \sum_{p=1}^{n} A_{n-p+1}^{(k)} u_p$$

$$A_n^{(k)} = (k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+n-1) : (n-1)! : \qquad A_1^{(k)} = 1 .$$

Wir nennen s die Summe der negativ-summierbaren Reihe. Für $k = 0$ geht die Summierbarkeit in die Konvergenz über.

Eine Reihe $\sum u_n$ heißt beschränkt (C, k), falls eine positive Zahl A existiert, so daß $|C_n^{(k)}(u)| < A$ für jedes n.

Eine Reihe $\sum u_n$ heißt negativ-summierbar (H, k), falls eine Zahl s existiert derart, daß für jedes positive ε die Unmöglichkeit feststeht einer Fundamentalreihe von Indizes $n_1 < n_2 < \cdots$ mit $|H_{n_i}^{(k)}(u) - s| > \varepsilon$ für jedes i. $H_n^{(k)}(u)$ stellt den n^{ten} Mittelwert k^{ter} Ordnung nach Hölder vor; er wird definiert durch die Relationen:

$$H_n^{(0)}(u) = s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$H_n^{(k+1)}(u) = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} H_p^{(k)}(u) .$$

Eine für $x < 1$ definierte Funktion nennen wir negativ-stetig für $x = 1$, falls eine Zahl s existiert derart, daß für jedes positive ε die Unmöglichkeit feststeht, einer zu der Zahl Eins positiv konvergierenden Fundamentalreihe $\xi_i < \xi_{i+1} < \cdots$ derart, daß $|f(\xi_i) - s| > \varepsilon$. Wir schreiben $\bar{}\lim f(x) = s$.

Die Theoreme der klassischen Theorie über Konvergenz und Summierbarkeit zerfallen in der intuitionistischen Mathematik in zwei Klassen: solche, die die positive Konvergenz bzw. Summierbarkeit der als konvergent bzw. summierbar gegebenen Reihen voraussetzen und demgemäß auch die positive Konvergenz bzw. Summierbarkeit anderer Reihen postulieren, und solche, die nur die negative Konvergenz bzw. Summierbarkeit voraussetzen und postulieren. Für die Theoreme der ersten Klasse sind im allgemeinen die Beweise der klassischen Theorie richtig, soweit sie konstruktiv gegeben sind, was sich ja oft ereignet; in dem Falle werden die Theoreme in der klassischen Formulierung richtig, sobald man, statt *Konvergenz* bzw. *Summierbarkeit*, *positive Konvergenz* bzw. *positive Summierbarkeit* liest.

Als Beispiel sei auf den Abelschen Grenzwertsatz hingewiesen, dessen gewöhnliche Formulierung und Beweis (z. B. Knopp, Theorie der unendlichen Reihen) in die intuitionistische Theorie ungeändert aufgenommen werden kann. Doch für die trivial genannte Umkehrung dieses Satzes für Reihen mit positiven Koeffizienten genügt natürlich nicht die übliche Schlußweise.

welche aus der Ungereimtheit der Divergenz die verlangte Konvergenz folgert. (Für den äußerst einfachen intuitionistischen Beweis siehe unten S. 652.) Die Theoreme der zweiten Klasse fordern hier und da in der Formulierung die Nebenbedingung der Beschränktheit, da dieselbe nicht aus der negativen Konvergenz bzw. Summierbarkeit folgt. Die Beweise müssen ein wenig anders geführt werden, obwohl man für sie dieselben Rechnungen und Formeln wie für die ähnlichen Theoreme der ersten Klasse benutzen kann.

Zweck des vorliegenden Artikels ist es, an einigen wichtigen Theoremen der zweiten Kategorie die intuitionistische Theorie der unendlichen Reihen zu erläutern.

§ 1. Grenzwertsätze für negativ-limitierte Folgen.

I. *Aus* $^{-}\lim a_n = a$ *und* $^{-}\lim b_n = b$ *folgen*: (a) $^{-}\lim (a_n + b_n) = a + b$, (b) $^{-}\lim a_n b_n = ab$. *Gilt überdies* $|a_n| > |b_n|$, *so hat man*: (c) $|a| \geqslant |b|$[1]). *Ist statt dessen gegeben*: $|b_n| > c > 0$, *so hat man auch*: (d) $^{-}\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Beweis (a):

Aus
$$|a_n + b_n - (a+b)| > \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
folgt entweder
$$|a_n - a| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
oder
$$|b_n - b| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ist eine Folge von Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, für die die Ungleichung (1) besteht, vorgelegt, so kann man Teilfolgen $p_1 < p_2 < \cdots$ und $q_1 < q_2 < \cdots$ derart aufstellen, daß jedes n_i zu einer dieser beiden Folgen gehört, und daß für die Indizes der ersten bzw. der zweiten Teilfolge die Ungleichungen (2) bzw. (3) erfüllt sind. Da diese Teilfolgen nach Voraussetzung keine Fundamentalreihen sind, ist auch die Folge $n_1 < n_2 < \cdots$ keine Fundamentalreihe, was zu beweisen war.

(b) Aus
$$|a_n b_n - ab| > \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
oder, was dasselbe ist, aus
$$|(a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a)| > \varepsilon$$
folgt die Gültigkeit wenigstens einer der Ungleichungen
$$|a_n - a| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \quad |b_n - b| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \quad |a_n - a| > \frac{\varepsilon}{1 + 3|b|}$$
$$\text{und} \quad |b_n - b| > \frac{\varepsilon}{1 + 3|a|}.$$

[1] Wir denken die reelle Zahl r durch eine rationalwertige Intervallschachtelung definiert. Wir schreiben $r > 0$, falls ein Intervall dieser Schachtelung existiert, dessen Endpunkte > 0 sind. Wenn $p - q > 0$, schreiben wir $p > q$; ist $p < q$ unmöglich, so schreiben wir $p \geqslant q$.

Jetzt denken wir wieder jede vorgelegte Folge von Indizes $n_1 < n_2 < \cdots$, für welche (4) erfüllt ist, zerlegt in vier Teilfolgen, die dann nach Voraussetzung keine Fundamentalreihen sind, usw.

(c) Aus $|a_n| > |b_n|$ für jedes n und $|a| = |b| - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) würde folgen $|a_n| - |a| > |b_n| - |b| + \varepsilon$, also entweder: $|a_n| - |a| > \frac{1}{2}\varepsilon$, mithin

$$|a_n - a| > \frac{\varepsilon}{2}$$

oder: $|b_n| - |b| < -\frac{1}{2}\varepsilon$, mithin $|b_n - b| > \frac{\varepsilon}{2}$, usw.

(d) Aus $|b_n| > c$ folgt $|b| \geqq c$, also folgt aus $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| > \varepsilon$: $|b_n - b| > c^2\varepsilon$.

Da $^-\lim b_n = b$, folgt hieraus wie früher $^-\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Daß auch

$$^-\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

folgt jetzt unmittelbar aus (a).

II. *Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ positive Zahlen, für die die Summen*

$$A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

nach ∞ streben, so folgt aus $^-\lim x_n = x$, daß auch

$$^-\lim \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = x$$

(Stolz-Cauchyscher Grenzwertsatz).

Beweis. Substituieren wir $y_n = x_n - x$, so folgt leicht, daß es genügt, den Satz II für den Fall $x = 0$ zu beweisen. Ist nun N eine zunächst beliebige ganze Zahl $< n$, so folgt aus

$$\left|\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\right| > \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

entweder

$$\left|\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_N x_N}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

oder

$$\left|\frac{\alpha_{N+1} x_{N+1} + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Aus der letzten Ungleichung folgt die Existenz einer ganzen Zahl $M > N$ derart, daß

$$|x_M| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Annahme, daß eine Fundamentalreihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ existiert, für die die Ungleichung (5) erfüllt

ist, wird nun wie folgt ad absurdum geführt. Zu jeder vorgelegten ganzen Zahl N_i bestimmen wir $n_p > N_i$, so daß die Relation (6) *nicht* erfüllt ist für $N = N_i$, $n = n_p$. Alsdann kann $M_i > N_i$ derart bestimmt werden, daß (8) erfüllt ist. Wiederholen wir den Prozeß mit $N_{i+1} = M_i$, $N_{i+2} = M_{i+1}$ usw., so entsteht gegen die Voraussetzung eine Fundamentalreihe $M_i < M_{i+1} < \cdots$ für die $|x_{M_p}| > \frac{\varepsilon}{2}$.

III. *Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ positive Zahlen, für die die Summen $A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ nach ∞ streben, und sind $p_1, p_2, \cdots$ und $q_1, q_2, \cdots$ positive Zahlen, welche den Bedingungen $\lim p_n = p \neq 0$ und $\lim q_n = q$ genügen, so folgt aus*

$$\bar{}\lim p_n x_n + q_n \cdot \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} = (p+q)\,x\,,$$

daß

$$\bar{}\lim x_n = x\,.$$

Beweis. Setzen wir

$$y_n = p_n x_n + q_n \cdot \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\,,$$

$$C_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha_i}{p_i} \cdot \frac{q_i}{A_i}\right); \quad C_0 = 1$$

und

$$h_n = C_{n-1} \frac{\alpha_n}{p_n}\,,$$

so folgt nach einiger Rechnung die Formel

$$x_n = \frac{y_n}{p_n} - \frac{q_n}{p_n} \cdot \frac{h_1 y_1 + \cdots + h_n y_n}{h_1 + \cdots + h_n} : \frac{h_1 (p_1 + q_1) + \cdots + h_n (p_n + q_n)}{h_1 + \cdots + h_n}\,.$$

Nach Voraussetzung gilt $\bar{}\lim y_n = (p+q)x$; hieraus folgt nach I und II, da auch die Summen $h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ nach ∞ streben:

$$\bar{}\lim x_n = \frac{(p+q)x}{p} - \frac{q}{p} \cdot (p+q)x : (p+q)$$

oder:

$$\bar{}\lim x_n = x\,.$$

§ 2. Negative Summierbarkeit einer Reihe.

I. *Ist die Reihe $\sum u_n$ negativ-summierbar (C, k) (k ganz positiv), so ist sie auch negativ-summierbar (H, k) und umgekehrt.*

Der Beweis folgt leicht aus den in § 1 bewiesenen Sätzen mit Hilfe der auch in den vereinfachten Beweisen des »positiven« Knopp-Schneeschen Satzes benutzten Relationen[1]:

$$H_n^{(k)} = T_1 T_2 \cdots T_k C_n^{(k)}$$

$$T_k(x_n) = \frac{x_n}{k} + \frac{k-1}{k} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\,.$$

[1] Math. Annalen 74, S. 447—461.

II. *Ist die Reihe* $\sum u_n$ *negativ-summierbar* (C, k), *so ist sie auch negativ-summierbar* $(C, k+i)$ $(i>0)$.

Beweis. Wir setzen

$$S_n^{(z)} = \sum_{p=1}^{n} A_{n-p+1}^{(z)} u_p$$

und finden leicht

$$S_n^{(k+i)} = \sum_{p=1}^{n} A_{n-p+1}^{(i-1)} S_p^{(k)} .$$

Offenbar können wir uns auf den Fall beschränken, daß die Summe k-ter Ordnung Null ist[1]. Alsdann müssen wir für jede positive Zahl ε die Unmöglichkeit des Bestehens beweisen von einer Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1 < n_2 < \cdots$, so daß

$$\left| C_n^{(k+i)} \right| > \varepsilon .$$

Ist N zunächst eine beliebige positive ganze Zahl $< n$, so folgt aus

$$\left| C_n^{(k+i)} \right| = \left| \frac{S_n^{(k+i)}}{A_n^{(k+i)}} \right| = \left| \frac{1}{A_n^{(k+i)}} \sum_{p=1}^{n} A_{n-p+1}^{(i-1)} \cdot A_p^{(k)} \cdot \frac{S_p^{(k)}}{A_p^{(k)}} \right| > \varepsilon \quad . \quad (1)$$

entweder

$$\left| \frac{1}{A_n^{(k+i)}} \sum_{p=1}^{N} A_{n-p+1}^{(i-1)} \cdot A_p^{(k)} \cdot \frac{S_p^{(k)}}{A_p^{(k)}} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

oder

$$\left| \frac{1}{A_n^{(k+i)}} \sum_{p=N+1}^{n} A_{n-p+1}^{(i-1)} \cdot A_p^{(k)} \cdot \frac{S_p^{(k)}}{A_p^{(k)}} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aus der letzten Ungleichung folgt die Existenz einer ganzen positiven Zahl $M > N$, so daß

$$\left| \frac{S_M^{(k)}}{A_M^{(k)}} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Falls eine Fundamentalreihe Indizes $n_1 < n_2 < \cdots$ vorgelegt wäre, für die die Relation (1) erfüllt ist, so könnte man zu jeder beliebig gegebenen ganzen Zahl N_i eine Zahl $n_p > N_i$ bestimmen, so daß die Relation (2) für $n = n_p$ *nicht* erfüllt ist. Alsdann muß die Relation (3) erfüllt sein und kann man also $M_i > N_i$ derart bestimmen, daß (4) erfüllt ist.

Wiederholen wir den Prozeß mit $N_{i+1} = M_i$, $N_{i+2} = M_{i+1}$, $\cdots$, so entsteht die Fundamentalreihe M_i, M_{i+1}, M_{i+2}, $\cdots$, für die $\left| C_{M_p}^{(k)} \right| > \frac{\varepsilon}{2}$, was mit der Voraussetzung $\overline{\lim}\, C_n^{(k)} = 0$ nicht verträglich ist.

[1] Denn aus $u_1 = v_1 + s$, $u_p = v_p$ folgt $C_n^{(z)}(u) = C_n^{(z)}(v) + s$, wie sofort aus der Definition von $C_n^{(z)}$ folgt.

III. *Ist die Reihe* $\sum u_n$ *negativ-summierbar* (C, k) *und beschränkt* $(C, k-1)$, *so ist sie auch negativ-summierbar* $(C, k-1+i)$ *für jedes* $i>0$.

Wir unterdrücken den ausführlichen Beweis, der analog wie die vorigen mit Hilfe der schon bewiesenen Sätze dem Beweis für die positive Summierbarkeit nachgebildet werden kann[1].

IV. *Ist* $\sum a_n$ *negativ-summierbar* $(C, p+q)$ $(p$ *ganz positiv,* q *positiv) und ist*

$$\bar{}\lim \left\{ H_n^{(p)}(a) - H_n^{(p+1)}(a) \right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\bar{}\lim (n-1) \left\{ H_n^{(p+1)}(a) - H_{n-1}^{(p+1)}(a) \right\} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

so ist $\sum a_n$ *negativ-summierbar* (C, p).

Beweis. Aus (5) folgt leicht

$$\bar{}\lim \left\{ H_n^{(p+i)}(a) - H_n^{(p+i+1)}(a) \right\} = 0 \; . \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Da für jede ganze positive Zahl $m > p+q$ nach den Sätzen I und II die Beziehung $\bar{}\lim H_n^{(m)} = s$ gilt, so folgt durch sukzessive Anwendung von (7) $\bar{}\lim H_n^{(p)}(a) = s$. $\sum a_n$ ist also negativ-summierbar (H, p) also auch negativ-summierbar (C, p).

Substituiert man für p Null, so bekommt man den Satz:

IVa. *Ist* $\sum a_n$ *negativ-summierbar* (C, k) $(k>0)$ *und gilt*

$$\bar{}\lim \frac{1}{n} (a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n) = 0,$$

so ist $\sum a_n$ *negativ-konvergent.*

Umgekehrt gilt der Satz:

V. *Ist* $\sum a_n$ *negativ-summierbar* (C, p), *so gilt*

$$\bar{}\lim (n-1) \left\{ H_n^{(p+1)}(a) - H_{n-1}^{(p+1)}(a) \right\} = 0.$$

Denn aus $\bar{}\lim C_n^{(p)}(a) = s$ folgt nach I $\bar{}\lim H_n^{(p)}(a) = s$ und nach I und II $\bar{}\lim H_n^{(p+1)}(a) = s$; folglich gilt $\bar{}\lim H_n^{(p)}(a) - H_n^{(p+1)}(a) = 0$ oder, was dasselbe ist, $\bar{}\lim (n-1) \left\{ H_n^{(p+1)}(a) - H_{n-1}^{(p+1)}(a) \right\} = 0$.

Für $p=0$ findet man:

Va. *Ist* $\sum a_n$ *negativ-konvergent, so gilt*

$$\bar{}\lim \frac{1}{n} \left\{ a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n \right\} = 0.$$

§ 3. Das Produkt negativ-summierbarer Reihen.

I. *Ist* $\sum a_n$ *negativ-summierbar* (C, p) $(p \geqslant 0)$ *und* $\sum b_n$ *negativ-summierbar* (C, q) *und beschränkt* (C, q), *so ist* $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$ *negativ-summierbar* $(C, p+q+1)$. *(Satz von* Cesàro.)

[1] Man findet den Beweis für die positive Summierbarkeit in dem Artikel »On the Index of Summability«, Proceedings Amsterdam Vol. XXVII, S. 916—920.

Beweis. Wir setzen

$$C_n^{(k)}(a) = \frac{1}{A_n^{(k)}} \sum_{p=1}^{n} A_{n-p+1}^{(k)} a_p = \frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}},$$

$$C_n^{(k)}(b) = \frac{1}{A_n^{(k)}} \sum_{p=1}^{n} A_{n-p+1}^{(k)} b_p = \frac{T_n^{(k)}}{A_n^{(k)}},$$

$$C_n^{(k)}(c) = \frac{1}{A_n^{(k)}} \sum_{p=1}^{n} A_{n-p+1}^{(k)} c_p = \frac{W_n^{(k)}}{A_n^{(k)}},$$

$$^{-}\lim C_n^{(p)}(a) = s; \quad ^{-}\lim C_n^{(q)}(b) = t \quad \text{und} \quad \left| C_i^{(q)}(b) \right| < \tau.$$

Man beweist leicht die Relation

$$W_n^{(p+q+1)} = \sum_{i=1}^{n} S_i^{(p)} T_{n-i+1}^{(q)}.$$

Setzen wir weiter $C_n^{(p)}(a) - s = h_n$, so folgt nach einiger Rechnung:

$$C_n^{(p+q+1)}(c) = \frac{W_n^{(p+q+1)}}{A_n^{(p+q+1)}}$$

$$= s \frac{T_n^{(p+q+1)}}{A_n^{(p+q+1)}} + \frac{1}{A_n^{(p+q+1)}} \sum_{i=1}^{n} h_i A_i^{(p)} T_{n-i+1}^{(q)}.$$

Nach Voraussetzung hat man $^{-}\lim h_n = 0$ und $^{-}\lim C_n^{(q)}(b) = t$; also nach Satz V § 2 auch $^{-}\lim C_n^{(p+q+1)}(b) = t$.

Wir brauchen also nur zu beweisen:

$$^{-}\lim \frac{1}{A_n^{(p+q+1)}} \sum_{i=1}^{n} h_i A_i^{(p)} T_{n-i+1}^{(q)} = 0.$$

Ist N zunächst eine beliebige ganze Zahl $< n$, so folgt aus

$$\left| \frac{1}{A_n^{(p+q+1)}} \sum_{i=1}^{n} h_i A_i^{(p)} T_{n-i+1}^{(q)} \right| > \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

entweder:

$$\left| \frac{1}{A_n^{(p+q+1)}} \sum_{i=1}^{N} h_i A_i^{(p)} A_{n-i+1}^{(q)} \frac{T_{n-i+1}^{(q)}}{A_{n-i+1}^{(q)}} \right| > \frac{\varepsilon}{2}$$

und a fortiori

$$\frac{1}{A_n^{(p+q+1)}} \sum_{i=1}^{N} \left| h_i \right| A_i^{(p)} A_{n-i+1}^{(q)} \tau > \frac{\varepsilon}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

oder:

$$\left| \frac{1}{A_n^{(p+q+1)}} \sum_{i=N+1}^{n} h_i A_i^{(p)} A_{n-i+1}^{(q)} \cdot \frac{T_{n-i+1}^{(q)}}{A_{n-i+1}^{(q)}} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aus der letzten Ungleichung folgt die Existenz einer ganzen Zahl $M > N$, so daß $\left| h_M \frac{T_{n-M+1}^{(q)}}{A_{n-M+1}^{(q)}} \right| > \frac{\varepsilon}{2}$ und a fortiori $\left| h_M \right| > \frac{\varepsilon}{2\tau}$ . . (4)

Wenn nun eine Fundamentalreihe $n_1 < n_2 < \cdots$ vorgelegt wäre, für die die Relation (1) erfüllt ist, so könnte man zu jeder gegebenen ganzen Zahl N_i den Index n_p derart bestimmen, daß die Ungleichung (2) für $n = n_p$, $N = N_i$ *nicht* erfüllt ist. Denn das erste Glied von (2) ist kleiner als

$$\frac{A_n^{(q)}}{A_n^{(p+q+1)}} \sum_1^N |h_i| A_i^{(p)} \tau \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \frac{A_n^{(q)}}{A_n^{(p+q+1)}} = 0 .$$

Hieraus folgt, daß alsdann die Relation (3) erfüllt sein muß; wir können also die Zahl $M_i > N_i$ derart bestimmen, daß (4) für $M = M_i$ erfüllt ist. Wiederholung des Prozesses mit $N_{i+1} = M_i$, $N_{i+2} = M_{i+1}$ usw. liefert dann eine Fundamentalreihe Indizes $M_i < M_{i+1} < \cdots$ für die $|h_{M_p}| > \frac{\varepsilon}{2\tau}$, was der Voraussetzung zuwider ist.

II. *Ist* $\sum a_n$ *negativ-summierbar* (C, p) *und* $\sum b_n$ *negativ-summierbar* (C, q) *und beschränkt* $(C, q-1)$, *so ist* $\sum c_n = \sum a_n \cdot \sum b_n$ *negativ-summierbar* $(C, p+q)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $^-\lim C_n^{(p)}(a) = s$, $^-\lim C_n^{(q)}(b) = t$ und $|C_i^{(q-1)}(b)| < \tau$ für jedes i.

Setzen wir $C_n^{(p)}(a) - s = h_n$, so folgt wieder

$$C_n^{(p+q)}(c) = s \cdot \frac{T_n^{(p+q)}}{A_n^{(p+q)}} + \frac{1}{A_n^{(p+q)}} \sum_{i=1}^n h_i A_i^{(p)} T_{n-i+1}^{(q-1)} ,$$

$$^-\lim h_n = 0 \quad \text{und} \quad ^-\lim C_n^{(q)}(b) = t ,$$

mithin auch $^-\lim C_n^{(p+q)}(b) = t$.

Wir brauchen also nur zu beweisen

$$^-\lim \frac{1}{A_n^{(p+q)}} \sum_{i=1}^n h_i A_i^{(p)} T_{n-i+1}^{(q-1)} = 0 .$$

Sei N zunächst eine beliebige positive ganze Zahl $< n$, so folgt aus

$$\left| \frac{1}{A_n^{(p+q)}} \sum_{i=1}^n h_i A_i^{(p)} T_{n-i+1}^{(q-1)} \right| > \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

da

$$\left| \frac{T_i^{(q-1)}}{A_i^{(q-1)}} \right| < \tau ,$$

entweder

$$\frac{1}{A_n^{(p+q)}} \sum_{i=1}^N |h_i| A_i^{(p)} A_{n-i+1}^{(q-1)} > \frac{\varepsilon}{2\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

oder

$$\frac{1}{A_n^{(p+q)}} \sum_{i=N+1}^n |h_i| A_i^{(p)} A_{n-i+1}^{(q-1)} > \frac{\varepsilon}{2\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Aus der letzten Ungleichung folgt, daß eine ganze Zahl $M > N$ existiert. so daß

$$|h_M| > \frac{\varepsilon}{2\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wenn nun eine Fundamentalreihe Indizes $n_1 < n_2 < \cdots$ vorgelegt wäre, für die die Relation (5) erfüllt ist, so könnte man zu jeder gegebenen positiven ganzen Zahl N_i den Index n_p derart bestimmen, daß die Ungleichung (6) für $n = n_p$, $N = N_i$ *nicht* erfüllt ist.

Denn das erste Glied von (6) ist kleiner als $\frac{A_n^{(q-1)}}{A_n^{(p+q)}} \sum_{i=1}^{N} |h_i| A_i^{(p)}$ und $\lim \frac{A_n^{(q-1)}}{A_n^{(p+q)}} = 0$. Die Ungleichung (7) muß dann für $n = n_p$, $N = N_i$ erfüllt sein; wir können also die Zahl $M_i > N_i$ derart bestimmen, daß (8) für $M = M_i$ erfüllt ist. Wiederholung des Prozesses mit $N_{i+1} = M_i$ usw. führt wieder zu der verlangten Ungereimtheit.

III. *Ist* $\sum a_n$ *negativ-konvergent,* $\sum |a_n|$ *beschränkt und* $\sum b_n$ *negativ-summierbar* (C, p) *und beschränkt* (C, p), *so ist* $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$ *summierbar* (C, p).

Beweis. Sei $^{-}\lim C_n^{(p)}(b) = t$.

Wir setzen $C_n^{(p)}(b) - t = h_n$ und $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, dann ist $^{-}\lim h_n = 0$ und es existieren die positiven Zahlen η und σ, so daß $|h_i| < \eta$ und $|\sigma_i| < \sigma$ für jedes i.

Man findet leicht:

$$C_n^{(p)}(c) = t C_n^{(p)}(a) + \frac{1}{A_n^{(p)}} \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} A_i^{(p)} h_i .$$

Da nach Voraussetzung die Reihe $\sum a_n$ negativ-konvergent, also negativ-summierbar (C, o) ist, so ist sie nach Theorem II § 2 auch negativ-summierbar (C, p). Offenbar brauchen wir nur zu beweisen

$$^{-}\lim \frac{1}{A_n^{(p)}} \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} A_i^{(p)} h_i = 0 .$$

Sei N zunächst eine positive ganze Zahl $< n$, so folgt aus

$$\left| \frac{1}{A_n^{(p)}} \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} A_i^{(p)} h_i \right| > \varepsilon , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

entweder

$$\left| \frac{1}{A_n^{(p)}} \sum_{i=1}^{N} a_{n-i+1} A_i^{(p)} h_i \right| > \frac{\varepsilon}{2} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

oder

$$\left| \frac{1}{A_n^{(p)}} \sum_{i=N+1}^{n} a_{n-i+1} A_i^{(p)} h_i \right| > \frac{\varepsilon}{2} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Aus (10) folgt

$$\frac{\eta}{A_n^{(p)}} \cdot \sum_{i=1}^{N} |a_{n-i+1}| \cdot A_i^{(p)} > \frac{\varepsilon}{2}$$

oder

$$\frac{\eta \sigma A_N^{(p)}}{A_n^{(p)}} > \frac{\varepsilon}{2}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

aus (11) folgt, daß eine ganze positive Zahl $M \geqslant N$ existiert, so daß

$$|h_M| > \frac{\varepsilon}{2\sigma}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Aus einer vorgelegten Fundamentalreihe Indizes $n_1 < n_2 < \ldots$ kann man, da $\lim_{n=\infty} \frac{A_N^{(p)}}{A_n^{(p)}} = 0$, zu jeder vorgelegten ganzen positiven Zahl N_i einen Index n_k derart bestimmen daß (12) *nicht* erfüllt ist. Falls also die Relation (9) erfüllt ist, so muß auch (11) erfüllt sein. Alsdann kann man die Zahl $M_i > N_i$ derart bestimmen, daß (13) für $M = M_i$ erfüllt ist.

Wiederholung mit $N_{i+1} = M_i$ usw. führt wieder zu der verlangten Ungereimtheit.

IV. *Sind die Reihen* $\sum a_n$ *und* $\sum b_n$ *beschränkt und negativ-konvergent und gilt* $|na_n| < c$ *und* $|nb_n| < c$ *für jedes* n, *so ist* $\sum c_n = \sum a_n \cdot \sum b_n$ *negativ-konvergent.*

Beweis. Die Reihe $\sum c_n$ ist nach Theorem II § 2 negativ-summierbar $(C, 1)$; nach Theorem IVa § 2 ist sie negativ-konvergent, falls

$$\bar{}\lim \frac{1}{n}(c_1 + 2c_2 + \cdots + nc_n) = 0.$$

Setzen wir $s_n = \sum_1^n a_i$, $t_n = \sum_1^n b_i$ und $W_i = \sum_1^n c_i$, so gilt:

$$\frac{1}{n}(c_1 + 2c_2 + \cdots + nc_n) = \frac{1}{n} b_1 s_n + 2b_2 s_{n-1} + \cdots + nb_n s_1) +$$

$$+ \frac{1}{n}(a_1 t_n + 2a_2 t_{2-1} + \cdots + na_n t_1) - \frac{W_n}{n}.$$

$$= \text{I} \quad + \quad \text{II} \quad - \text{III}$$

Sei $\bar{}\lim s_n = s$ und $s_n = s + h_n$, so haben wir

$$\text{I} = \frac{1}{n} s(b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n) + \frac{1}{n}(b_1 h_n + 2b_2 h_{n-1} + \cdots + nb_n h_1).$$

$$= \quad \text{IV} \quad + \quad \text{V}$$

Da $\sum b_n$ negativ konvergiert ist nach Theorem V^a § 2 $^-\lim$ IV $= 0$; ferner ist $|\,\mathrm{V}\,| < \frac{c}{n}\{|\,h_1\,| + |\,h_2\,| + \cdots + |\,h_n\,|\}$. Aus $^-\lim h_n = 0$ folgt daher nach Theorem II § 1 $^-\lim$ V $= 0$[1]. Also ist auch $^-\lim$ I $= 0$. In derselben Weise folgern wir $^-\lim$ II $= 0$. Ist ferner $|\,t_n\,| < \tau$, so gilt

$$|\,\mathrm{III}\,| < \frac{\tau}{n}\{|\,a_1\,| + |\,a_2\,| + \cdots + |\,a_n\,|\} < \frac{\tau c}{n}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

daher $^-\lim$ III $= 0$.

Hiermit ist bewiesen $^-\lim \frac{1}{n}(c_1 + 2c_2 + \cdots + nc_n) = 0$, so daß die Reihe $\sum a_n$ negativ-konvergent ist.

Bemerkung. Es genügt offenbar, nur die Beschränktheit einer der beiden Reihen vorauszusetzen.

V. *Sind die Reihen* $\sum a_n^{(1)}, \sum a_n^{(2)}, \cdots \sum a_n^{(k)}$ *beschränkt und negativ-konvergent und gilt* $|\,n a_n^{(i)}\,| < c$ *für jedes* n *und* $1 \leqq i \leqq k$, *so ist das Produkt dieser* k *Reihen negativ-konvergent.*

Beweis. Wir setzen:

$$\sum a_n^{(i,j,k,\cdots)} = \sum a_n^{(i)} \cdot \sum a_n^{(j)} \cdot \sum a_n^{(k)} \cdots$$

$$A_n^{(i,j,k,\cdots)} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(i,j,k,\cdots)};$$

$$^{(p,q,r,\cdots)}A_n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, a_\nu^{(p,q,r,\cdots)};$$

$$^{(p,q,r,\cdots)}a_n^{(i,k,l,\cdots)} = \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, a_\nu^{(p,q,r,\cdots)}\, a_{n-\nu+1}^{(i,k,l,\cdots)};$$

$$^{(p,q,r,\cdots)}A_n^{(i,k,l,\cdots)} = \sum_{\nu=1}^{n} {}^{(p,q,r,\cdots)}a_\nu^{(i,k,l,\cdots)};$$

und beweisen leicht

$$^{(1,2,\cdots k)}A_n = \sum^{(i)} {}^{(i_1)}A_n^{(i_2,i_3,\cdots i_k)} - (k-1)\,A_n^{(1,2,\cdots k)}.$$

Da die Produktreihe $\sum a_n^{(1)} \cdot \sum a_n^{(2)} \cdots \sum a_n^{(k)}$ nach Theorem I negativ-summierbar (C, k) ist, wird sie nach § 2 negativ-konvergent sein, falls

$$^-\lim \frac{1}{n} \cdot {}^{(1,2,\cdots k)}A_n = 0.$$

[1] Denn aus $|\,b_n\,| < |\,a_n\,|$ und $^-\lim a_n = 0$ folgt leicht $^-\lim b_n = 0$.

Man hat also nur zu beweisen

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \bar{}\lim \frac{1}{n} A_n^{(1,2,\cdots k)} = 0,$$

$$(\beta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \bar{}\lim \frac{1}{n} {}^{(i_1)}A_n^{(i_2, i_3, \cdots i_k)} = 0.$$

(α) folgt sofort aus der Ungleichung

$$\left| A_n^{(1,2,\cdots k)} \right| < c^k \left\{ 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\}^k,$$

welche mit vollständiger Induktion aus der vorausgesetzten Ungleichung abgeleitet werden kann.

Wir beweisen nun, daß (β) richtig ist für $k = p$, falls unser Satz richtig ist für $k = p-1$. Da der Satz richtig ist für $k = 2$, ist (β) richtig für $k = 3$, also der Satz richtig für $k = 3$ usw.

Sei also der Satz richtig für $k = p-1$, dann gilt $\bar{}\lim A_n^{(i_1, i_2, \cdots i_{p-1})} = s_{i_1} \cdot s_{i_2} \cdots s_{i_{p-1}} = s$ (s_{i_ν} ist die Summe der negativ-konvergenten Reihe $\sum a_n^{(i_\nu)}$).

Wir setzen $A_r^{(i_1, i_2, \cdots i_{p-1})} = s + h_r$ und finden nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} {}^{(i_p)}A_n^{(i_1, i_2, \cdots i_{p-1})} &= s \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu^{(i_p)} + \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu^{(i_p)} h_{n-\nu+1} \\ &= \quad \text{I} \quad + \quad \text{II} \end{aligned}$$

Da $\sum a_\nu^{(i_p)}$ negativ-konvergent ist, haben wir $\bar{}\lim \frac{\text{I}}{n} = 0$. Aus $\left| n a_\nu^{(i_p)} \right| < c$ folgt $\left| \text{II} \right| < c \sum_{\nu=1}^{n} \left| h_\nu \right|$, also da $\bar{}\lim h_\nu = 0$ auch $\bar{}\lim \frac{\text{II}}{n} = 0$. Also gilt $\bar{}\lim \frac{\text{I}}{n} {}^{(i_p)}A_n^{(i_1, i_2, \cdots i_{p-1})} = 0$.

§ 4. Potenzreihen.

I. *Ist $\sum a_n$ negativ-konvergent und beschränkt, so ist $\sum a_n x^n$ negativ-stetig für $x = 1$* (Abelscher Grenzwertsatz).

Beweis. Sei $\bar{}\lim \sum_{1}^{n} a_i = s$. Die Reihe $\sum a_n x^n$ ist positiv-konvergent für $|x| < 1$, da die Koeffizienten beschränkt sind. Hieraus folgt leicht die Richtigkeit für $|x| < 1$ der Relation:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n x^n - s = \left(\sum_{1}^{n} a_p - s \right) - \sum_{1}^{n} a_p (1 - x^p) - x^{n+1}(s_n - s) - (1 - x) \sum_{n+1}^{\infty} (s - s_p) x^p.$$

Es soll für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit nachgewiesen werden einer Fundamentalreihe positiver Zahlen $\xi_1 < \xi_2 < \cdots$ derart, daß

$$\lim \xi_n = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left| \sum_{1}^{\infty} a_n \xi_i^n - s \right| > \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wir denken uns also eine derartige Fundamentalreihe vorgelegt; aus (2) folgt dann, wenn n_i zunächst eine willkürliche natürliche Zahl ist, daß entweder:

$$\left| (1-\xi_i) \sum_{n_i+1}^{\infty} (s-s_p)\,\xi_i^p \right| > \frac{\varepsilon}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder

$$\left| \xi_i^{n_i+1} (s_{n_i} - s) \right| \quad > \frac{\varepsilon}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder

$$\left| \sum_{1}^{n_i} a_p (1-\xi_i^p) \right| \quad > \frac{\varepsilon}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder

$$\left| \sum_{1}^{n_i} a_p - s \right| \quad > \frac{\varepsilon}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Falls (3) erfüllt ist, kann man eine natürliche Zahl $N_i > n_i$ derart bestimmen, daß

$$\left| s - s_{N_i} \right| > \frac{\varepsilon}{4}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ist (4) oder (6) erfüllt, so gilt (7) für $N_i = n_i$.

Falls (5) erfüllt ist, untersuchen wir die Relationen für ξ_{i+1} und dieselbe Zahl n_i.

Ist wieder keine der Relationen (3), (4) und (6) erfüllt, so wiederholen wir die Untersuchung für ξ_{i+2} usw. Da $\lim \xi_n = 1$, kann man ν derart bestimmen, daß (5) für $\xi_{i+\nu}$ *nicht* erfüllt ist. Wir können also jedenfalls zu einer vorgelegten natürlichen Zahl n_i die natürliche Zahl $N_i \geqslant n_i$ derart bestimmen, daß (7) erfüllt ist. Setzen wir dann $n_{i+1} = N_i + 1$, $n_{i+2} = N_{i+1} + 1$ usw., so entsteht die Fundamentalreihe natürlicher Zahlen $N_i, N_{i+1}, N_{i+2}, \cdots$, für die (7) erfüllt ist, und das ist gegen die Voraussetzung.

IIa. *Ist* $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$ *positiv-konvergent für* $x < 1$, *sind die Koeffizienten* a_i *positiv und ist* $\lim_{x \to 1} \sum a_n x^n = s$, *so ist* $\sum a_n$ *positiv-konvergent.*

Beweis. Zu jeder willkürlich gegebenen positiven Zahl ε soll jetzt die Zahl $N(\varepsilon)$ derart bestimmt werden, daß $\left| s - s_n \right| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$.

Ist n zunächst eine willkürliche ganze Zahl, so hat man

$$s - \sum_{1}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{0}^{n} (s-s_p)\, x^p + (1-x) \sum_{n+1}^{\infty} (s-s_p)\, x^p \,.$$

$$= \qquad \mathrm{I} \qquad + \qquad \mathrm{II}$$

Offenbar ist für jedes $\varepsilon > 0$ und n unmöglich $s - s_n \leqslant -\varepsilon$; denn da $a_i > 0$, wäre auch $s - s_{n+i} < -\varepsilon$, also $\mathrm{II} < -\varepsilon$. Da für $x \to 1$ $\lim \mathrm{I} = 0$, wäre

$\lim s - \sum_{1}^{\infty} a_n x^n < -\varepsilon$ oder $\lim \sum a_n x^n > s + \varepsilon$ gegen die Voraussetzung. Zu einer gegebenen positiven Zahl ε bestimmen wir nun $\xi < 1$ derart, daß $\left| s - \sum_{1}^{\infty} a_n \xi^n \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alsdann bestimmen wir eine ganze Zahl N, die der Bedingung $1 - \xi^{N+1} > \frac{1}{2}$ genügt. Wir beweisen, daß $|s - s_n| < \varepsilon$ für $n > N$.

Offenbar folgt aus $s - s_p \geqslant \varepsilon$, daß auch $s - s_q > \varepsilon$, wenn $q < p$. Falls also $s - s_{N+i} \geqslant \varepsilon$, so wäre für $x = \xi$ und $n = N+i$: $I > \varepsilon(1 - \xi^{N+i+1})$ und da II nicht < 0 sein kann, wäre $s - \sum_{1}^{\infty} a_n \xi^n > \frac{\varepsilon}{2}$ der Voraussetzung zuwider.

IIb. *Ist* $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$ *beschränkt für* $x < 1$, *sind die Koeffizienten* a_i *positiv und ist* $\bar{}\lim \sum_{1}^{\infty} a_n x^n = s$, *so ist* $\sum a_n$ *negativ-konvergent.*

Beweis. Hier soll für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit bewiesen werden einer Fundamentalreihe Indizes $n_1 < n_2 < \cdots$, so daß $|s - s_{n_i}| > \varepsilon$ für jedes i. Wir schreiben wieder

$$s - \sum_{1}^{\infty} a_p x^p = (1-x) \sum_{0}^{n} (s - s_p) x^p + (1-x) \sum_{n+1}^{\infty} (s - s_p) x^p .$$
$$= \quad \text{I} \quad + \quad \text{II}$$

Offenbar ist wieder $s - s_n < -\varepsilon$ ausgeschlossen.

Aus

$$s - s_{n_i} > \varepsilon \qquad (8)$$

folgt

$$\sum_{1}^{n_i} (s - s_p) x^p > \varepsilon (1 - x^{n_i+1}) .$$

Sei $x_i < 1$ so gewählt, daß $1 - x_i^{n_i+1} = \frac{1}{2}$, so folgt $I > \frac{\varepsilon}{2}$, also auch:

$$s - \sum_{1}^{\infty} a_p x_i^p > \frac{\varepsilon}{2} . \qquad (9)$$

Falls also eine Fundamentalreihe Indizes $n_1 < n_2 < \cdots$ vorgelegt wäre, so daß (8) erfüllt ist für jedes i. so könnte man die zu Eins positiv konvergierende Fundamentalreihe $x_1, x_2, \cdots$ derart bestimmen, daß (9) erfüllt ist für jedes i, und dies ist der Voraussetzung zuwider.

III. *Ist* $\sum a_n$ *negativ-summierbar* (C, k) *und beschränkt* (C, q), *so ist* $\sum a_p x^p$ *negativ-stetig für* $x = 1$.

Beweis. Aus $|C_i^{(q)}| < c$ oder $|S_i^{(q)}| < c A_i^{(q)}$ für jedes i folgt sukzessive:

$$|S_i^{(q-1)}| = |S_i^{(q)} - S_{i-1}^{(q)}| < 2c A_i^{(q)}$$
$$|S_i^{(q-2)}| < 2^2 c A_i^{(q)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|S_i^{(1)}| < 2^{q-1} c \cdot A_i^{(q)}$$
$$|a_i| < 2^q c A_i^{(q)} < 2^q \cdot i^q \cdot c^1 .$$

Die Reihe $\sum a_n x^n$ ist also positiv-konvergent für $|x| < 1$. Hieraus folgt für $|x| < 1$ die Gültigkeit der Relation:

$$\sum_1^\infty a_n x^n - s = (1-x)^{k+1} \sum_{p=1}^{n} \{ C_p^{(k)} - s \} A_p^{(k)} x^p + (1-x)^{k+1} \sum_{n+1}^{\infty} \{ C_p^{(k)} - s \} A_p^{(k)} x^p - s(1-x) \qquad (10)$$

(Für die Herleitung dieser Formel, wo s ganz beliebig ist, benutzt man die Beziehungen:

$$\sum_1^\infty a_p x^p = (1-x)^{k+1} \sum_1^\infty S_p^{(k)} x^p$$
$$x = (1-x)^{k+1} \sum_1^\infty A_p^{(k)} x^p ,$$

welche in bekannter Weise aus der Definition von $S_n^{(k)}$ und $A_n^{(k)}$ abgeleitet werden.)

Sei jetzt $\bar{}\lim C_n^{(k)} = s$. Es soll für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit nachgewiesen werden einer Fundamentalreihe positiver Zahlen $\xi_1 < \xi_2 < \ldots$ derart, daß

$$\lim \xi_n = 1 \qquad (11)$$

$$\left| \sum_1^\infty a_p \xi_i^p - s \right| > \varepsilon \qquad (12)$$

Wir denken uns also eine derartige Fundamentalreihe vorgelegt; aus (12) und (10) folgt dann, wenn n_i eine willkürliche natürliche Zahl ist, daß entweder:

$$\left| (1-\xi_i)^{k+1} \sum_{p=1}^{ni} \{ C_p^{(k)} - s \} A_p^{(k)} \xi_i^p \right| > \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\alpha)$$

oder

$$\left| (1-\xi_i)^{k+1} \sum_{p=n_i+1}^{\infty} \{ C_p^{(k)} - s \} A_p^{(k)} \xi_i^p \right| > \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\beta)$$

oder

$$|s(1-\xi_i)| > \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\gamma)$$

Falls (β) erfüllt ist, kann man eine natürliche Zahl $N_i > n_i$ derart bestimmen, daß

$$|C_{N_i}^{(k)} - s| > \frac{\varepsilon}{3} . \qquad (\delta)$$

Falls (α) oder (γ) erfüllt ist, untersuchen wir (β) für ξ_{i+1} und *dieselbe* Zahl n_i.

Ist (β) wieder nicht erfüllt, so wiederholen wir die Untersuchung für ξ_{i+2} usw. Da $\lim \xi_n = 1$, kann man ν derart bestimmen, daß (α) und (γ) *nicht* erfüllt sind für $\xi_{i+\nu}$. Wir können also jedenfalls zu einer vorgelegten natürlichen Zahl n_i die natürliche Zahl $N_i \geqslant n_i$ derart bestimmen, daß (δ) erfüllt ist. Setzen wir dann $n_{i+1} = N_i + 1$, $n_{i+2} = N_{i+1} + 1$, $\cdots$ usw., so entsteht die Fundamentalreihe natürlicher Zahlen N_i, N_{i+1}, $\cdots$ für die (δ) erfüllt ist, und dies ist wider die Voraussetzung.

IV. *Ist* $\sum_1^\infty a_p x^p$ *positiv-konvergent für* $|x| < 1$ *und* $\bar{}\lim \sum_1^\infty a_n x^n = s$, *so folgt aus* $\bar{}\lim n a_n = 0$, *daß* $\sum a_n$ *negativ-konvergent ist.* (*Satz von* TAUBER.)

Beweis. Für jede ganze Zahl n_i gilt

$$s - s_{n_i} = \left(s - \sum_1^\infty a_p x^p\right) - \sum_1^{n_i} a_p (1 - x^p) + \sum_{n_i+1}^\infty a_p x^p .$$

Aus $|s - s_{n_i}| > \varepsilon$ folgt daher entweder

$$\left| s - \sum_1^\infty a_p x^p \right| > \frac{\varepsilon}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder

$$\left| \sum_1^{n_i} a_p (1 - x^p) \right| > \frac{\varepsilon}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

oder

$$\left| \sum_{n_i+1}^\infty a_p x^p \right| > \frac{\varepsilon}{3} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wir setzen $x_i = 1 - \frac{1}{n_i}$. Da

$$\left| \sum_1^{n_i} a_p (1 - x_i^p) \right| = \left| (1 - x_i) \sum_1^{n_i} a_p (1 + x_i + \cdots + x_i^{p-1}) \right| < \frac{1}{n_i} \sum_1^{n_i} p\,|a_p|$$

folgt aus (2):

$$\frac{1}{n_i} \sum_1^{n_i} p\,|a_p| > \frac{\varepsilon}{3} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Falls (3) erfüllt ist, kann man $N_i > n_i$ derart bestimmen, daß

$$|N_i a_{N_i}| > \frac{\varepsilon}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Man bestimme zuerst k derart, daß

$$\left| \sum_{n_i+k}^\infty a_p x_i^p \right| < \left| \sum_{n_i+1}^\infty a_p x_i^p \right| - \frac{\varepsilon}{3}, \text{ folglich } \left| \sum_{n_i+1}^{n_i+k} a_p x_i^p \right| > \frac{\varepsilon}{3}$$

und untersucht den Wert von $|na_n|$ für $n = n_i + 1, n_i + 2, \cdots n_i + k$. Die Substitution kann nicht immer eine Zahl $< \frac{\varepsilon}{3}$ liefern, da hieraus folgen würde

$$\left| \sum_{n_i+1}^{n_i+k} a_p x_i^p \right| < \frac{\varepsilon}{3 n_i} \sum_{n_i+1}^{n_i+k} x_i^p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Falls also eine Fundamentalreihe von Indizes $n_1, n_2, \cdots$ vorgelegt wäre, für die $|s - s_{n_i}| > \varepsilon$, so könnten wir zu jeder dieser Zahlen bestimmen: *entweder* eine Zahl $N_i > n_i$ derart, daß

$$|N_i a_{N_i}| > \frac{\varepsilon}{3},$$

oder die Zahl $M_i = n_i$ derart, daß

$$\left| \frac{1}{M_i} \sum_{1}^{M_i} p\, a_p \right| > \frac{\varepsilon}{3},$$

oder aber die Zahl $\xi_i = 1 - \frac{1}{n_i}$ derart, daß

$$\left| \sum_{1}^{\infty} a_p \xi_i^p - s \right| > \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nach Voraussetzung gilt $^-\lim \sum_{1}^{\infty} a_p x^p = s$ und $^-\lim n a_n = 0$, mithin auch $^-\lim \frac{1}{n}(a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n) = 0$. Folglich sind die Folgen $\{N_i\}, \{M_i\}$ und $\{\xi_i\}$, die aus der obengenannten Bestimmung folgen, keine Fundamentalreihen; dies kann also auch nicht mit der Folge $\{n_i\}$ der Fall sein. Also gilt $^-\lim s_n = s$.

V. *Ist die Reihe* $\sum_{1}^{\infty} a_p x^p$ *positiv-konvergent für* $|x| < 1$, *so folgt aus* $^-\lim \sum_{1}^{\infty} a_p x^p = s$ *und* $^-\lim n\{H_n^{(k+1)} - H_{n-1}^{(k+1)}\} = 0$, *daß* $\sum_{1}^{\infty} a_p$ *negativ-summierbar* k^{ter} *Ordnung ist.*

Hilfssatz. Sind die Funktionen $\phi(x)$ *und* $\downarrow(x)$ *für* $|x| < 1$ *gleichmäßig differenzierbar und gilt*

$$\phi(x) + (1 - x)\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{x}\downarrow(x) \qquad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

und $^-\lim \downarrow(x) = s$, *so gilt auch* $^-\lim \phi(x) = s$.

Beweis. Aus (α) folgt

$$\phi(x) = (1 - x)\int \frac{\downarrow(x)}{x(1-x)^2}\, dx + C(1 - x); \qquad \ldots \quad (\beta)$$

denn offenbar befriedigt die Funktion $\phi(x) = (1-x)\int_{\delta}^{x} \frac{\downarrow(x)}{x(1-x)^2}\,dx + C(1-x)$

die Gleichung (α) und ist jede gleichmäßig differenzierbare Funktion $z(x)$, welche die Gleichung (α) befriedigt, in (β) enthalten[1].

Sei $\xi_\nu < 1$ und α_ν zunächst willkürlich zwischen δ und ξ_ν, so findet man leicht

$$\phi(\xi_\nu) - s = (1-\xi_\nu)\int_{\delta}^{\alpha_\nu} \frac{\downarrow(x)}{x(1-x)^2}\,dx + (1-\xi_\nu)\int_{\alpha_\nu}^{\xi_\nu} \frac{\downarrow(x)-s}{x(1-x)^2}\,dx +$$

$$= \quad \text{I} \quad + \quad \text{II}$$

$$+\left[(1-\xi_\nu)\int_{\alpha_\nu}^{\xi_\nu} \frac{s\,dx}{x(1-x)^2} - s\right] + C(1-\xi_\nu).$$

$$+ \quad \text{III} \quad + \quad \text{IV}$$

Aus $|\phi(\xi_\nu) - s| > \varepsilon$ folgt also entweder $|\text{I}| > \frac{\varepsilon}{4}$ oder $|\text{II}| > \frac{\varepsilon}{4}$ oder $|\text{III}| > \frac{\varepsilon}{4}$ oder $|\text{IV}| > \frac{\varepsilon}{4}$. Wir denken jetzt eine Folge $x_\nu < x_{\nu+1} < \cdots$ vorgelegt, derart, daß $\lim x_\nu = 1$ und $|\phi(x_\nu) - s| > \varepsilon$ für jedes ν. Wir bestimmen $\alpha_\nu > x_\nu$, doch < 1 derart, daß $|\text{IV}| < \frac{\varepsilon}{4}$ für $\xi_\nu > \alpha_\nu$. Wir bestimmen dann $x_{\nu+h} > \alpha_\nu$, derart, daß $|\text{I}| < \frac{\varepsilon}{4}$ und $|\text{III}| < \frac{\varepsilon}{4}$ für $\xi_\nu = x_{\nu+h}$.

Alsdann muß $\text{II} > \frac{\varepsilon}{4}$ für $\xi_\nu = x_{\nu+h}$ und da $\downarrow(x)$ gleichmäßig stetig ist, kann man η_ν zwischen x_ν und $x_{\nu+h}$ derart bestimmen, daß

$$|\downarrow(\eta_\nu) - s| > \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da $\bar{}\lim \downarrow(x) = s$, kann die so konstruierte Folge η_ν keine Fundamentalreihe sein: mithin ist dies auch nicht mit der Folge x_ν der Fall.

Beweis des Satzes V. Wir setzen

$$\phi_k(x) = \sum_{1}^{\infty} \{H_p^{(k)} - H_{p-1}^{(k)}\} x^p$$

und finden nach einiger Rechnung

$$\phi_k(x) + (1-x)\phi_k'(x) = \frac{1}{x}\phi_{k-1}(x).$$

[1] Denn aus $y + (1-x)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\downarrow(x)$ und $z + (1-x)\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\downarrow(x)$ folgt $(y-z) + (1-x)\frac{d(y-z)}{dx} = 0$ oder $\frac{d}{dx}\log(y-z) = -\frac{1}{1-x}$, mithin $\log(y-z) = \int -\frac{dx}{1-x} + C$ oder $y - z = C(1-x)$.

Nach Voraussetzung gilt $^{-}\lim \phi_0(x) = {}^{-}\lim \sum_{1}^{\infty} a_p x^p = s$. Wenden wir jetzt den Hilfssatz an, so finden wir sukzessive:

$$^{-}\lim \phi_1(x) = s$$
$$^{-}\lim \phi_2(x) = s$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$^{-}\lim \phi_{k+1}(x) = s \text{ oder } {}^{-}\lim \sum_{1}^{\infty} \left\{ H_p^{(k+1)} - H_{p-1}^{(k+1)} \right\} x^n = s.$$

Da $^{-}\lim n \left\{ H_n^{(k+1)} - H_{n-1}^{(k+1)} \right\} = 0$ ist nach Satz IV die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \left\{ H_p^{(k+1)} - H_{p-1}^{(k+1)} \right\}$$

negativ-konvergent und die Summe gleich s, also $^{-}\lim H_n^{(k+1)} = s$. Aus $n \left\{ H_n^{(k+1)} - H_{n-1}^{(k+1)} \right\} = H_n^{(k)} - H_{n-1}^{(k+1)}$ und $^{-}\lim n \left\{ H_n^{(k+1)} - H_{n-1}^{(k+1)} \right\} = s$ folgt dann $^{-}\lim H_n^{(k)} = s$, was zu beweisen war.

Nachtrag.

In dem vorliegenden Artikel ist bei den Sätzen über das Produkt konvergenter bzw. summierbarer Reihen (§ 3) und bei dem Abelschen Grenzwertsatz und seinen Umkehrungen (§ 4) außer der negativen Konvergenz bzw. Summierbarkeit k^{ter} Ordnung auch die Beschränktheit bzw. Beschränktheit k^{ter} Ordnung vorausgesetzt. Inzwischen hat sich mir herausgestellt, daß diese Nebenbedingung für die ersterwähnten Sätze nicht notwendig ist, ausgenommen für Theorem II des § 3, wobei die vorausgesetzte Beschränktheit von niedriger Ordnung ist als die vorausgesetzte Summierbarkeit der Reihe. Die negativ-konvergenten Reihen stimmen also in dieser Hinsicht überein mit den positiv-konvergenten Reihen.

Für den Beweis dieser vereinfachten Theoreme I, III, IV und V des § 3 benutze ich den folgenden

Hilfssatz. Sind c_i und d_i irgendwelche positive Zahlen und gilt $^{-}\lim a_n = 0$ *und* $^{-}\lim b_n = 0$, *so gilt auch*:

$$^{-}\lim \frac{a_1 b_n c_1 d_n + a_2 b_{n-1} c_2 d_{n-1} + \cdots + a_n b_1 c_n d_1}{c_1 d_n + c_2 d_{n-1} + \cdots + c_n d_1} = 0.$$

Beweis. Aus

$$\left| \frac{a_1 b_n c_1 d_n + \cdots + a_n b_1 c_n d_1}{c_1 d_n + \cdots + c_n d_1} \right| > \varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

folgt für wenigstens einen bestimmten Index p zwischen 1 und n:

$$|a_p| \cdot |b_{n-p+1}| > \varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (\beta).$$

Denn aus $|a_p| \cdot |b_{n-p+1}| \leqslant \varepsilon$ für jedes $1 \leqslant p \leqslant n$ würde folgen:

$$\left| \frac{a_1 b_n c_1 d_n + \cdots + a_n b_1 c_n d_1}{c_1 d_n + \cdots + c_n d_1} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Aus (β) folgt aber entweder $|a_p| > \sqrt{\varepsilon}$ oder $|b_{n-p+1}| > \sqrt{\varepsilon}$. Sei $n \geqslant 2N_i$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

I. $|a_p| > \sqrt{\varepsilon}$ und $p > N_i$. Alsdann setzen wir $p = \rho_i$ und haben also: $|a_{\rho_i}| > \sqrt{\varepsilon}$, $\rho_i > N_i$.

II. $|b_{n-p+1}| > \sqrt{\varepsilon}$ und $n-p+1 > N_i$. Alsdann setzen wir $n-p+1 = \sigma_i$ und haben jetzt: $|b_{\sigma_i}| > \sqrt{\varepsilon}$, $\sigma_i > N_i$.

III. $|a_p| > \sqrt{\varepsilon}$ und $p \leqslant N_i$. Wir setzen $p = r_i$ und haben:

$$|b_{n-r_i+1}| > \frac{\varepsilon}{|a_{r_i}|}, \quad r_i < N_i.$$

IV. $|b_{n-p+1}| > \sqrt{\varepsilon}$ und $n-p+1 \leqslant N_i$. Wir setzen $n-p+1 = s_i$ und haben:

$$|a_{n-s_i+1}| > \frac{\varepsilon}{|b_{s_i}|}, \quad s_i \leq N_i.$$

Falls nun eine Fundamentalreihe von Indizes $n_1 < n_2 < \cdots$ vorgelegt wäre, für die (α) erfüllt ist für $n = n_i$, so könnten wir zu jeder vorgelegten ganzen positiven Zahl N_i einen Index $n_i \geqslant 2N_i$ bestimmen. Die obige Zerlegung liefert dann im ersten Falle bzw. zweiten Falle eine Zahl ρ_i bzw. σ_i größer als N_i. Wir wiederholen dann den Prozeß mit $N_{i+1} > \rho_i$ bzw. $N_{i+1} > \sigma_i$. Im dritten oder vierten Falle wiederholen wir den Prozeß für Indizes $n > n_i$. Da es nur N_i Indizes $r_i \leqslant N_i$ gibt, werden (falls nicht indessen der erste oder zweite Fall auftritt) bei fortgesetzter Wiederholung des Prozesses höchstens N_i Folgen $n_1^{(i)} < n_2^{(i)} < \cdots$ bzw. $m_1^{(i)} < m_2^{(i)} < \cdots$ entstehen für die

$$|b_{n_k^{(i)}-r_i+1}| > \frac{\varepsilon}{|a_{r_i}|} \text{ bzw. } |a_{m_k^{(i)}-s_i+1}| > \frac{\varepsilon}{|b_{s_i}|}$$

für jedes $k = 1, 2, \cdots$. Nach Voraussetzung können weder die Folgen $\{\rho_k\}$ oder $\{\sigma_k\}$, weder die Folgen $\{n_k^{(i)}\}$ oder $\{m_k^{(i)}\}$ Fundamentalreihen sein; dies kann also auch nicht mit der Folge $n_1 < n_2 < \cdots$ der Fall sein.

Theorem I des § 3 in vereinfachter Form lautet nun:

Ist $\sum a_n$ *negativ-summierbar* (C, p) *und ist* $\sum b_n$ *negativ-summierbar* (C, q), *so ist* $\sum c_n = \sum a_n \cdot \sum b_n$ *negativ-summierbar* $(C, p+q+1)$.

Beweis. Sei $\bar{}\lim C_n^{(p)}(a) = s$ und $\bar{}\lim C_n^{(q)}(b) = t$. Setzen wir $b_1 = t + \beta_1$ und $b_n = \beta_n$ für $n > 1$, so gilt $C_n^{(q)}(b) = C_n^{(q)}(\beta) + t$, also $\bar{}\lim C_n^{(q)}(\beta) = 0$.

Weiter haben wir:

$$W_n^{(p+q+r)} = \sum_{r=1}^{n} S_r^{(p)} T_{n-r+1}^{(q)} = \sum_{r=1}^{n} A_r^{(p)} A_{n-r+1}^{(q)} C_r^{(p)}(a) C_{n-r+1}^{(q)}(b)$$

$$= t S_n^{(p+q+1)} + \sum_{r=1}^{n} A_r^{(p)} A_{n-r+1}^{(q)} C_r^{(p)}(a) C_{n-r+1}^{(q)}(\beta).$$

Setzen wir noch $a_1 = s + \alpha_1$ und $a_n = \alpha_n$ für $n > 1$, so gilt $\bar{}\lim C_n^{(p)}(a) = 0$.

Nach einiger Rechnung finden wir dann:

$$C_n^{(p+q+r)}(c) = t\,C_n^{(p+q+r)}(a) + s\,C_n^{(p+q+r)}(\beta) + \frac{\sum_{r=1}^{n} C_r^{(p)}(\alpha)\,C_{n-r+1}^{(q)}(\beta)\,A_r^{(p)}\,A_{n-r+1}^{(q)}}{\sum_{r=1}^{n} A_r^{(p)}\,A_{n-r+1}^{(q)}}.$$

Aus $^{-}\lim C_n^{(p)}(a) = s$, $^{-}\lim C_n^{(q)}(\beta) = 0$ und $^{-}\lim C_n^{(p)}(\alpha) = 0$ folgt daher unter Benutzung des Hilfssatzes: $^{-}\lim C_n^{(p+q+1)}(c) = st$.

Für Theorem III des § 3 schreiben wir:

Ist $\sum a_n$ negativ-konvergent, $\sum |a_n|$ beschränkt und $\sum b_n$ negativ-summierbar (C, p), so ist $\sum c_n = \sum a_n \cdot \sum b_n$ negativ-summierbar (C, p).

Der frühere Beweis kann fast ungeändert bleiben, nur daß keine Zahl η existiert derart, daß $|h_i| < \eta$. Wir folgern aber aus (10) statt (12):

$$\frac{\sigma}{A_n^{(p)}} \sum_{i=1}^{N} A_i^{(p)} |h_i| > \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12^*)$$

Man kann dann wieder, falls eine Fundamentalreihe von Indizes $n_1 < n_2 < \cdots$ existiert, für die (3) erfüllt ist, zu jeder vorgelegten ganzen, positiven Zahl N_i den Index n_p derart bestimmen, daß (12*) nicht erfüllt ist für $n = n_p$, $N = N_i$ usw.

Lassen wir in Theorem IV des § 3 die Nebenbedingung der Beschränktheit fort, so kommt:

Sind die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ negativ-konvergent und gilt $|na_n| < c$ und $|nb_n| < c$ für jedes n, so ist $\sum c_n = \sum a_n \cdot \sum b_n$ negativ-konvergent.

Die Bedingung der Beschränktheit ist in dem früheren Beweis nur benutzt für den Beweis, daß $^{-}\lim \frac{1}{n} w_n = 0$ (man vergleiche S. 650). Nun gilt aber:

$$\frac{1}{n} w_n = \frac{1}{n}(a_1 t_n + a_2 t_{n-1} + \cdots + a_n t_1).$$

Setzen wir $t_n = t + k_n$, so gilt $^{-}\lim k_n = 0$ und

$$\frac{1}{n} w_n = \frac{t}{n} s_n + \frac{1}{n}(a_1 k_n + a_2 k_{n-1} + \cdots + a_n k_1).$$

Aus $^{-}\lim s_n = s$, $^{-}\lim a_n = 0$ und $^{-}\lim k_n = 0$ folgt also nach dem Hilfssatz $^{-}\lim \frac{1}{n} w_n = 0$.

Schließlich lesen wir für Satz V des § 3:

Sind die Reihen $\sum a_n^{(1)}, \sum a_n^{(2)}, \cdots, \sum a_n^{(k)}$ negativ-konvergent und gilt $|na_n^{(i)}| < c$ für jedes n und $1 \leqq i \leqq k$, so ist das Produkt dieser k Reihen negativ-konvergent.

Der frühere Beweis kann hier ganz ungeändert bleiben.

Ausgegeben am 13. Januar 1930.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XXX. XXXI

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Library of Congress
MAY 8 1930
Smithsonian Deposit

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 28. November. (S. 661)
PASCHEN: LYMANS Heliumlinien. (S. 662)
Klassensitzung am 5. Dezember. (S. 667)
SCHRÖDINGER: Verwaschene Eigenwertspektra. (S. 668)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XXX. Gesamtsitzung. 28. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

1. Hr. Paschen sprach über Lymans Heliumlinien.

Nach kurzer Darlegung der Arbeiten von Schumann, Lyman, Millikan und Bowen und neuester von Siegbahn wird die Messung der Wellenlängen in diesem Spektralgebiete behandelt. Neben der bisher ausschließlich benutzten Methode der Koinzidenz der kurzen Wellenlängen in höherer mit bekannten längeren in niederer Ordnung kommt heute die Bestimmung auf Grund der Spektralgesetze als durchaus gleichwertig, ja als überlegen in Frage. Mehrere Spektren sind genau genug analysiert, um auf Grund ihrer Termsysteme die kurzwelligen Linien berechnen zu können, z. B. Al II, Hg II.

Der Vortragende erläutert die Berechnung der Wellenlängen der Intensitätsmaxima des Wasserstoff- und des He II-Spektrum mit Berücksichtigung der relativistischen Feinstruktur und der Intensitäten der Komponenten und bestimmt gegen diese Linien als Normalen die Wellenlängen der Linien der Grundserie von He I, welche von Lyman entdeckt wurde. Als Material diente ein Spektogramm von Hrn. G. Kruger von der Cornell-University in Ithaca, New-York, auf welchem die Serien des Wasserstoffes und der beiden Heliumspektren He II und He I in großer Schärfe vorhanden sind.

2. Das auswärtige Mitglied Hr. Dragendorff in Freiburg i. Br. übersandte seine Rede anläßlich der »Öffentlichen Feier der Übergabe des Rektorats am 11. Mai 1929« (Freiburg i. Br. 1929).

3. Das korrespondierende Mitglied Hr. Berzeviczy von Berzevicze in Budapest übersandte den Sonderdruck seiner in der Akademie zu Budapest gehaltenen Rede (Budapest 1929).

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. Frazer in Cambrigde (England) übersandte seine Ausgabe Publii Ovidii Nasonis fastorum libri VI (5 Bände, London 1929).

Ausgegeben am 14. Januar 1930.

Lymans Heliumlinien.

Von F. Paschen.

Die besten Werte der Wellenlängen im Schumann-Gebiete sind durch Koinzidenzen in höherer Gitterordnung mit langwelligen Linien niederer Ordnung bestimmt. Man wird indessen solchen Wellenlängen den Vorzug geben, welche auf Grund sicher bekannter Gesetze berechenbar sind. Zum Beispiel sind die Werte vieler Terme in den Spektren Al II und Hg II so genau bestimmt, daß die Kombinationen derselben genau sind.

In diesem Aufsatze werden die Wellenlängen der Linien der Lymanschen Wasserstoffserie und der Lymanschen[1] Serien des Spektrum He II nach heutiger Kenntnis berechnet und die von Lyman[1] entdeckten Linien von He I auf diese Normalen bezogen.

Die Messungen wurden ermöglicht durch eine sehr scharfe Aufnahme, welche Hr. G. Kruger im Physikalischen Institute der Cornell-Universität in Ithaka, New York, mit einem Konkavgitter von 1.5 m Radius im Vakuum gemacht hat. Als Lichtquelle benutzte derselbe das negative Glimmlicht in einer Zylinderkathode aus Kupfer bei niedrigem Heliumdruck. Eine zweite Aufnahme bei höherem Gasdruck hatte breitere Linien, die zur Messung ungeeignet, zur Diskussion der Linien aber wertvoll waren. Die Platten enthalten die Heliumspektren in derselben Ausdehnung, wie es in den Versuchen von K. T. Compton und J. C. Boyce[2] erzielt ist. Die Linien sind auf der Platte einfache. Sie haben aber eine Feinstruktur, deren Berechnung die Lage des Intensitätsmaximums ergibt.

Nach Sommerfeld[3] ist der Wert des Termes $n_{k,i}$ im verallgemeinerten Wasserstoffspektrum (Kernladung z) gegeben:

$$n_{k,i} = Rz^2 \left[\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha^2}{n^4} z^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{n-i}{i} \right) \right].$$

Für den Übergang vom Term $m_{k',\varkappa}$ auf den $n_{k,i}$ folgt:

$$n_{k,i} - m_{k',\varkappa} = \underbrace{Rz^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \left[1 + z^2 \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \right]}_{\text{a. R.-K.}} + \underbrace{\frac{Rz^2}{n^2} \frac{\alpha^2 z^2}{n^2} \frac{n-i}{i}}_{\text{s. R.-K. für } n_{k,i}} - \underbrace{\frac{Rz^2}{m^2} \frac{\alpha^2 z^2}{m^2} \frac{m-\varkappa}{\varkappa}}_{\text{s. R.-K. für } m_{k',\varkappa}}.$$

[1] Th. Lyman, Astrophys. Journ. 60, Juli 1924.
[2] K. T. Compton and J. C. Boyce, Journ. of Franklin Institute 205, 497, 1928.
[3] W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. 48, 11, 1928 beweist die Übereinstimmung der Sommerfeldschen Formeln und Quantenzahlen mit der Diracschen Quantentheorie.

Für die Rechnung bequem ist die Trennung der allgemeinen (a. R.-K.) von den beiden Termen zuzufügenden speziellen (s. R.-K.) Relativitäts-Korrektionen. Es werden angenommen:

$R_\infty = 109737.30_5$, $R_H = 109677.81$, $R_{He} = 109722.31$, $\alpha^2 = 5.32 \times 10^{-5}$

entsprechend dem Atomgewicht des Heliums 4.00 und dem Massenverhältnis 1843.30 des Wasserstoffatoms und des Elektrons.

Für die Linien $1_{1,1} - m_{2,2}$ und $1_{1,1} - m_{2,1}$ wird das Intensitätsverhältnis 2 : 1 angenommen, der ersteren Linie also das Gewicht 2 zugeteilt.

In der Serie $n = 2$, $m = 3, 4 \ldots$ gibt es für jeden Wert m 7 Linien:

			G			G			G
(1)	(pd)	$2_{2,2} - m_{3,3}$	9	(2)	$2_{1,1} - m_{2,2}$	2.08	(3)	$2_{2,2} - m_{1,1}$	0.18
		$2_{2,1} - m_{3,2}$	5	(sp)	$2_{1,1} - m_{2,1}$	1.04	(ps)	$2_{2,1} - m_{1,1}$	0.09.
		$2_{2,2} - m_{3,2}$	1						

Die Gewichte G dieser Linien sind entnommen A. SOMMERFELD, Three lectures on Atomic Physics. London 1926 p. 18. Sie gründen sich auf eine Rechnung von G. WENTZEL in der Zeitschr. f. Physik 1926 und die Abhandlung von A. SOMMERFELD und A. UNSÖLD, Zeitschr. f. Physik 38, S. 237, 1926. Diese Gewichte würden für die rote Wasserstofflinie ergeben das Intensitätsverhältnis 1 : 1 der beiden beobachteten Hauptkomponenten und obige Zahlenwerte die mittlere Wellenlänge 6562.797 $A°E$, was mit der Erfahrung in Übereinstimmung ist. Die entsprechenden Linien im Spektrum He II wurden indessen außerdem noch so berechnet, daß man den beiden Linien unter (2) das doppelte Gewicht zuerteilte (SOMMERFELDS Faktor ρ wäre dann 2). Hierdurch wird das Verhältnis der kurzwelligen Komponente zur langwelligen in 1.28 verändert, was nach G. HANSEN bei niederem Druck bei Hα zutrifft, und was den Linien von He II besser zu entsprechen scheint. Wie SOMMERFELD hervorhebt, ist der Zustand $2_{1,1}$ metastabil, wodurch die Intensität in diesem Sinne geändert wird, wenn die Metastabilität nicht gestört wird, was bei kleinem Gasdruck eher zutrifft als bei großem.

Berechnung der Linie 2—3 in He II.

	S. R. C.		$\rho = 1.04$	$\rho = 2$	Gew. $\rho = 2$
$2_{2,2} - 3_{3,3}$	$0 - 0$	$= 0 \times 9$	0	0	9
$2_{2,1} - 3_{3,2}$	$5.837 - 0.576$	$= 5.261 \times 5$	+ 26.305	+ 26.305	5
$2_{2,2} - 3_{3,2}$	$0 - 0.576$	$= -0.576 \times 1$	− 0.576	− 0.576	1
$2_{1,1} - 3_{2,2}$	$5.837 - 0.576$	$= 5.261 \times 2.08$	+ 10.943	+ 21.044	4
$2_{1,1} - 3_{2,1}$	$5.837 - 2.304$	$= 3.533 \times 1.04$	+ 3.674	+ 7.066	2
$2_{2,1} - 3_{1,1}$	$5.837 - 2.304$	$= 3.533 \times 0.1$	+ 0.353	+ 0.353	0.1
$2_{2,2} - 3_{1,1}$	$0 - 2.304$	$= -2.304 \times 0.2$	− 0.461	− 0.461	0.2
			$\sum_{\rho=1.04} G = 18.42$	$\sum_{\rho=1.04} + 40.238$	$\sum_{\rho=2} + 53.731$ $\sum_{\rho=2} G = 21.3$

$\frac{4 R_{He}}{2^2} = 109722.31$

$\frac{4 R_{He}}{3^2} = \frac{48765.47}{60956.84}$

a. R.-K. $= + 1.17$

$\nu = 60958.01$

$\sum_{\rho=1.04} / 18.42 = 2.184$

60958.01

+ 2.18

$\nu = 60960.19\ cm^{-1}$

$\lambda = 1640.415\ A°E$

$\sum_{\rho=2} / 21.3 = 2.522$

60958.01

+ 2.52

$\nu = 60960.53\ cm^{-1}$

$\lambda = 1640.406\ A°E$

Das Intensitätsmaximum verschiebt sich für $\rho = 2$ etwas nach Violett.

Berechnete Werte der Intensitätsmaxima.

Wasserstoff $1_{II} - m_{2,x}$.

$m =$	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda A°E$	1215.664	1025.717	972.532	949.739	937.799	930.745	926.222	923.148

Helium II $1_{II} - m_{2,x}$.

$m =$	2	3	4	5	6
$\lambda A°E$	303.7788	256.3145	243.0244	237.3297	234.3452

Helium II $2_{k,i} - m_{k',x}$.

$m =$		3	4	5	6	7	8	9	10
$\rho = 1.04$	$\lambda A°E$	1640.415	1215.135	1084.945	1025.275	992.366	972.113	958.700	949.330
$\rho = 2$	$\lambda A°E$	1640.409	1215.129	1084.940	1025.270	992.361	972.109	958.696	949.326

Höhere Ordnungen der Grundserie fallen mit den geradzahligen Werten dieser Serie nahe zusammen. Die Differenz rührt allein von der Relativitäts-Korrektion her. Auf der vermessenen Platte sind die Werte der letzten Serie gültig, da die Linien der letzten Serie weit stärker sind als diese höheren Ordnungen.

I. O.	$m = 4$	1215.129	I. O. $m = 6$	1025.270	I. O. $m = 8$ 972.109
IV. O.	303.8	1215.115	IV. O. 256.3	1025.258	IV. O. 243.0 972.098
V. O.	243.0	1215.122			

Die Messung der Linien der Serie $1\,{}^1S_0 - m\,{}^1P_1$ von He I geschah:

a) in I. Ordnung gegen 303.8, 256.3, 243.0 in I. und II. Ordnung.

b_1) in II. Ordnung gegen die Heliumlinien 1215.1, 1025.3, 992.4, 972.1 berechnet mit $\rho = 2$. Die Linie 1084.9 war durch die Stickstoffgruppe gestört.

b_2) in II. Ordnung gegen die Wasserstofflinien 1215.7, 1025.7, 972.5, welche auf der Platte so weit getrennt von den obigen Heliumlinien liegen, daß ihre Einstellung durch sie nicht mehr gestört war.

Die Zahlenwerte sind je die Mittelwerte aus 3 bis 4 unabhängigen Meßreihen in verschiedener Höhe des Spektrums (aufgeführt in b_1).

a) Die erste Ordnung gibt nicht die Genauigkeit von b. Auch sind die Normalen der Grundserie von He II diffus nach beiden Seiten verbreitert mit stärkerer Schwärzung der Verbreiterung nach Rot. Ebenso sind in:

b_2) die Wasserstofflinien auf dieser Platte beiderseits verbreitert mit stärkerer Schwärzung der langwelligen Verbreiterung. Die Folge ist eine Verschiebung der Einstellung nach Rot, was zu einem kleineren Wert der Wellenlänge der zu messenden Linien führt. Die Werte unter a und b_2 sind kleiner als unter b_1. Die Differenz würde noch um 0.005 $A°E$ größer, wenn man für b_1 die Linien $\rho = 1$ von He II zugrunde legte.

b_1) erscheint als die sicherste Messung und wird deshalb allein verwertet.

		$m=$ 2	3	4	5	6
a Mi ...	599.977	591.397	584.368	537.021	522.189	515.603	512.092
b_2 Mi ...	600.003[2]	591.389	584.358	537.015	522.205	.610	.111
b_1 Einzel-	600.028	591.408	584.385	537.013	522.205	515.611	512.106
mess.	600.029	.418	.364	.017	.208	.626	.137
	599.995	.407	.380	.042	.225	.613	.129
	600.028	.440	.376	.030	.230	.617	.128
b_1 Mi [1] ..	600.019[2]	591.420	584.378	537.027	522.218	515.617	512.126
ν	166661.4	169084.6	171122.1	186210.4	191490.9	193942.4	195264.4
		$m\,{}^1P$ ...	27175.9	12101.4	6818.1	4368.2	3035.8
		$m\,{}^1P+\nu=1\,{}^1S_0=$	198298.0	198311.8	198309.0	198310.6	198300.2

	7	8	9	10	11	12
a Mi ...	510.008	508.640	507.716	507.054	506.569	
b_2 Mi ...	509.993	.620	.706	.090	.589	506.245 [3]
b_1	509.999	508.632	507.719	507.105	506.596	506.245
	510.013	.638	.728	.100	.596	.220
	510.008	.632	.719	.097		
b_1 Mi [1] ..	510.006	508.634	507.723	507.101	506.596	506.232 [3]
ν	196076.1	196605.0	196957.8	197199.4	197396.0	197537.9
$m\,{}^1P$	2231.6	1709.4	1351.0	1094.6	904.8	760.4
$m\,{}^1P+\nu$	198307.7	198314.4	198308.8	198294.0	198300.8	198298.3

[1] Mittel verschieden gewerteter Einzelwerte. [2] Gestört durch 1200.200 von N I.
[3] Nicht mehr so sicher wie die übrigen.

Die Addition der Werte $m\,{}^1P$, welche PASCHEN-GÖTZE S. 26 entnommen sind, ergibt unabhängig bestimmte Werte des Terms $1\,{}^1S_0$. Der Mittelwert, gewonnen unter Fortlassung von $m = 2$, 10 und 12 ist $1\,{}^1S_0 = 198307.9$ entsprechend einem Ionisierungspotential von 24.4764 Volt.

Die Abweichung $m = 2$ liegt an der Unschärfe der in II. Ordnung stark verbreiterten und nicht vollkommen selbst umgekehrten Linie. $m = 10$ ist fortgelassen, weil die Werte b nach dem Werte a offenbar zu hoch sind. Diese Linie scheint in II. Ordnung gestört zu sein.

Die mit dem obigen Werte von $1\,{}^1S_0$ berechneten Werte von λ können als Normalen dienen. Es sind folgende:

$m=$	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu=$	171132.0	186206.5	191489.8	193939.7	195262.1	196076.3	196598.5	196956.9
λ A°E	584.344	537.038	522.221	515.624	512.132	510.006	508.651	507.725

10	11	12
197213.3	197403.1	197547.5
507.065	506.578	506.208

Die Linie 591.420 ist, wie LYMAN vermutete, die Intersystemkombination $1\,{}^1S_0 - 2\,{}^3P_1$. Man berechnet $\nu = 169084.0$ $\lambda = 591.422$. Sie ist bei höherem Druck bedeutend stärker als bei niederem. Die Linie 600.019 ist nicht die Kombination $1\,{}^1S_0 - 2\,{}^1S_0 = 166274.6$ $\lambda = 601.415$, obwohl dieser von LYMAN hierfür in Betracht gezogene Übergang wegen der Metastabilität des Zustandes $2\,{}^1S_0$ realisiert sein könnte. Die Umwandlungsspannung für diesen Zustand beträgt 20.5227 Volt. Die Linie gehört bestimmt zu Helium und wird bei höherem Gasdruck sehr stark und diffus nach Rot. L. A. SOMMER[1] hält sie daher für den Kopf einer Bande von He_2.

[1] L. A. SOMMER, Proc. Nat. Akad. Sciences 13 S. 213, 1927.

Die Umwandlungsspannung $1\,^1S_0 - 2\,^3S_1$ in den tieferen und wohl stabileren der beiden metastabilen Zustände beträgt 19.7301 Volt entsprechend $\nu = 159853.2$ und $\lambda = 625.574$. Auch von dieser Linie ist nichts zu sehen.

Die Messungen b_1 und b_2 betrafen auch Stickstofflinien, welche mittelstark als Verunreinigungen zugegen waren. B. und I. bedeutet den Wert der Messung von Bowen und Ingram. Die Abweichung zwischen b_1 und b_2 rührt von derjenigen bei 1215 her. Diese Wasserstofflinie ist am diffusesten und weist die größte Abweichung gegen die Skale der Heliumlinien auf (0.05 $A°E$).

b_1	1135.022	1199.548	1200 761
b_2	1134.975	1199.497	1200.707
B. u. I.	1134.987	1199.533	1200.730

Bowen und Ingrams Skale liegt also in dieser Gegend (1100 bis 1200 $A°E$) um 0.02 bis 0.03 $A°E$ tiefer als die in b_1 benutzte Skale der Linien von He II.

Ausgegeben am 14. Januar 1930.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1929

XXXI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 5. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

Hr. Schrödinger sprach über Verwaschene Eigenwertspektren.

Es werden verschiedene Eigentümlichkeiten der Eigenwerte und Eigenfunktionen bei der eindimensionalen Punktbewegung besprochen, insbesondere wird ein Streckenspektrum untersucht, das von einem gewissen Standpunkt betrachtet hohe, schmale aber endlich breite Intensitätsmaxima aufweist. In Wirklichkeit haben alle sogenannten diskreten Eigenwertspektren diesen »fast diskreten« Charakter, das streng diskrete Eigenwertspektrum ist ein in der Natur nicht realisierter Idealfall.

Verwaschene Eigenwertspektra.

Von E. Schrödinger.

Wie in der klassischen Mechanik, so kann auch in der Quantenmechanik manches Typische und Wesentliche schon an der eindimensionalen Punktbewegung in passend gewähltem Potentialfeld klargestellt werden. F. Hund[1] gewann von hier aus die ersten Anhaltspunkte zum Aufbau der Systematik der Molekülspektren, G. Gamow[2] und andere haben zunächst die eindimensionale Punktbewegung zur Illustration der Radioaktivität herangezogen, wobei fast alle wesentlichen Züge schon mit einer abteilungsweise konstanten, stufenförmigen Potentialfunktion herauskommen. In diesem Fall, der in der klassischen Mechanik so einfach ist, daß er kaum Interesse besitzt, werden die wellenmechanischen Eigenfunktionen von außerordentlicher analytischer Einfachheit — stehende Sinuswellen oder reelle Exponentialfunktionen — und erlauben, einige bemerkenswerte Eigentümlichkeiten klar zu übersehen, die von weitergehender Bedeutung sind. Es wird im folgenden zunächst ein Schwellensatz bewiesen, wonach die Phasen zu beiden Seiten einer hohen und breiten Schwelle in eigenartigem Zusammenhang stehen (Fig. 3) und die Amplituden im allgemeinen von verschiedener Größenordnung sind (s. a. F. Hund, l. c.). Dann wird ein merkwürdiger Rollentausch der Eigenwerte beschrieben, durch welchen das System, wenn man es durch Abänderung der Systemkonstanten mit Entartung bedroht, der Entartung vorbeugt[3]. Endlich wird ein Fall besprochen, welcher ganz eigentlich als verwaschenes Linienspektrum zu bezeichnen ist, nämlich nicht bloß in dem schon von vielen Seiten betonten Sinne, daß die Eigenwerte sich wegen der begrenzten Lebensdauer des Zustandes nicht scharf definieren lassen, vielmehr in dem folgenden Sinn: die korrekt normierte eigentliche (d. h. zeitlich rein periodische, also beliebig lang existenzfähige) Eigenfunktion wächst in sehr kleinen, aber endlichen Umgebungen gewisser ausgezeichneter Energiewerte völlig stetig zu beträchtlicher Größe an, sonst ist sie überall vergleichsweise sehr klein. Durch stetige Abänderung eines Systemparameters kann man jene Umgebungen immer

[1] F. Hund, Zeitschr. f. Phys. **40**, 742, 1927.

[2] G. Gamow, ibid. **51**, 204, 1928; weitere Literaturangaben bei M. Born, ibid. **58**, 306, 1929; R. H. Fowler und A. H. Wilson, Proc. Roy. Soc. A, **124**, p. 493, 1929.

[3] Die Resistenz schwingender Systeme gegen Zufallsentartung wurde von J. v. Neumann und E. Wigner, Phys. Zeitschr. **30**, 467, 1929, allgemein erörtert; sie spielt auch schon bei F. Hund eine Rolle, s. die Figur 8 l. c.

mehr zusammenschrumpfen und zugleich das Amplitudenverhältnis immer extremer werden lassen, d. h. man kann beobachten, wie allmählich aus einem Streckenspektrum ein Linienspektrum wird. — Es handelt sich, wie ich glaube, nicht um einen Ausnahmefall, vielmehr bildet umgekehrt das Auftreten streng diskreter Eigenwerte einen idealen Grenzfall, der in Wirklichkeit niemals vorkommt.

Der allgemeine Charakter des Spektrums.

Wir betrachten die eindimensionale Materiewellengleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\psi = 0, \qquad (1)$$

welche das wellenmechanische Äquivalent der Bewegungsgleichung eines auf einer Geraden beweglichen Massenpunktes ist. Die potentielle Energie zeige

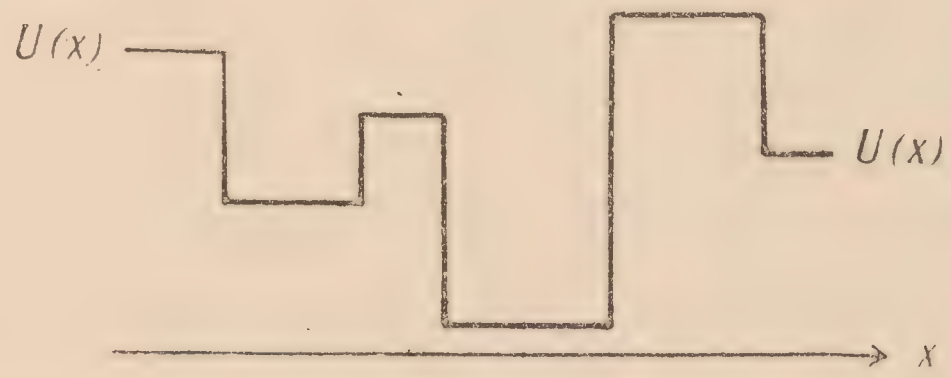


Fig. 1.

stufenförmigen Verlauf wie in Fig. 1. Im $n$ten Teilgebiet sei ihr Wert U_n. Die Lösung wird dort durch

$$\psi = A_n \sin(k^{(n)}x + \vartheta_n) \text{ bzw. } \psi = B_{n+}e^{k^{(n)}x} + B_{n-}e^{-k^{(n)}x} \qquad (2)$$

dargestellt, je nachdem ob

$$E > U_n \text{ bzw. } E < U_n;$$

d. h. sie oszilliert oder verläuft exponentiell, je nachdem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit reell oder imaginär ist. Die $k^{(n)}$ sind Abkürzung für

$$k^{(n)} = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E-U_n)} \text{ bzw. } = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(U_n-E)}, \qquad (3)$$

sie hängen also alle nur von dem einen Energieparameter E ab. Die weiteren verfügbaren Konstantenpaare A_n, ϑ_n bzw. B_{n+}, B_{n-}, je ein Paar in jedem Teilgebiet, bedeuten zusammengenommen nur eine wesentliche Konstante in der Gesamtlösung. Denn man muß Stetigkeit von ψ und $d\psi/dx$ auch an den Gebietsgrenzen fordern. Dadurch bestimmt ein beliebiges von diesen Konstantenpaaren auch das des Nachbargebietes usw.; es ist also nur eines von ihnen willkürlich und entspricht nur einer wesentlichen Konstante, da eine multiplikative Konstante in der Gesamtlösung belanglos ist. Diese hängt also, wie es sein muß, von zwei wesentlichen Konstanten ab, etwa: Phase in einem Teilgebiet und Energieparameter.

Ob das Eigenwertspektrum diskret oder kontinuierlich ist, hängt also davon ab, ob an beiden Rändern des Systems Randbedingungen zu erfüllen sind oder nur an einem Rand oder überhaupt keine. Nur in dem ersten dieser drei Fälle ist das Spektrum diskret, denn die zwei Randbedingungen legen Phase und Energie fest. Im zweiten läßt sich die Randbedingung durch die Phase befriedigen und die Energie bleibt frei. Im dritten bleibt außer der Energie auch noch die Phase frei. — Als Randbedingungen kommen natürliche und künstliche in Betracht. Eine natürliche Randbedingung liegt vor, wenn nach dem Überschreiten der letzten Sprungstelle von U auf der betreffenden Seite in dem ins Unendliche verlaufenden Randgebiet die Eigenfunktion exponentiell ist. Denn dann muß in diesem Randgebiet das Verschwinden von B_+ gefordert werden, wenn es sich um den rechten Rand oder von B_-, wenn es sich um den linken Rand handelt. Von künstlichen Randbedingungen wollen wir nur die Forderung: $\psi = 0$ — an einer bestimmten Stelle — in Betracht ziehen, die sich als Grenzfall der natürlichen ergibt, wenn man den Potentialwert U des Randgebietes über alle Grenzen wachsen läßt. Wir nennen das eine absolut spiegelnde Wand.

Daraus ergibt sich folgender allgemeine Charakter des Eigenwertspektrums. Der kleinste Eigenwert ist größer oder gleich dem niedersten U-Wert. Daran schließt sich im allgemeinen zunächst ein diskretes und daran im allgemeinen von einer bestimmten Stelle an ein ins Unendliche reichendes kontinuierliches Spektrum. Im besonderen kann der eine oder der andere Spektralteil fortfallen. Das Spektrum ist nämlich diskret, solange E zwischen dem niedersten U-Wert und dem kleineren der beiden U-Werte der Randgebiete liegt. Jenseits desselben, d. h. sobald auch nur eines der beiden Randgebiete »von Oszillationen überflutet« wird, wird das Spektrum kontinuierlich. Das diskrete Spektrum fehlt, wenn der niederste U-Wert selbst schon gleich oder größer ist als der kleinere Rand-U-Wert. Das Kontinuum fehlt, wenn beide Ränder durch spiegelnde Wände gebildet werden. Man kann sich ferner leicht überzeugen, daß das diskrete Spektrum im Endlichen nie eine Häufungsstelle hat. Es hat also nur endlich viele Linien außer in dem letztgenannten Fall, wo das Kontinuum fehlt.

Der Schwellensatz.

Unter einer Schwelle verstehen wir ein Gebiet, wo die Lösung exponentiell ist, zwischen zwei Oszillationsgebieten. Wir nennen die Schwelle »hoch und breit«, wenn die positive Exponentialfunktion beim Durchlaufen der Schwelle in positiver Richtung einen sehr großen Faktor aufnimmt. Beide Begriffe sind also relativ, sie beziehen sich nur auf einen bestimmten Energiebereich. Bei höheren E-Werten wird die Schwelle zuerst aufhören, die Bezeichnung »hoch und breit« zu verdienen und schließlich von Oszillationen überflutet werden. Bei niedrigeren E-Werten wird eines oder beide angrenzenden Gebiete aufhören, Oszillationsgebiet zu sein. Alle Aussagen über hohe und breite Schwellen beziehen sich im folgenden, ohne daß es ausdrücklich wiederholt wird, nur auf den Energiebereich, für den die definierenden Eigenschaften wirklich vorliegen.

Seien nun U, U', U'' die U-Werte, k, k', k'' die k-Werte im linken Oszillationsgebiet, in der Schwelle, im rechten Oszillationsgebiet. Die Schwelle reiche von $x = 0$ bis $x = l$. Sie sei hoch und breit, d. h. $e^{k'l}$ wird als sehr groß angesehen. Wir setzen die Lösung von (1) in den drei Gebieten so an

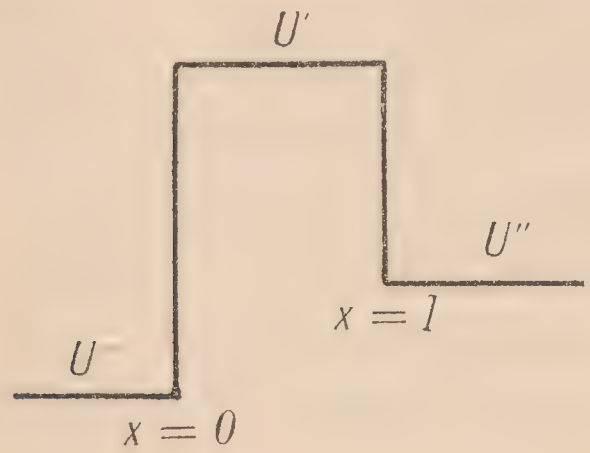


Fig. 2.

$$\begin{aligned} \psi &= A \sin(k x + \vartheta) && \text{für } x \leqslant 0 \\ \psi &= B_+ e^{k' x} + B_- e^{-k' x} && \text{für } 0 \leqslant x \leqslant l \\ \psi &= A'' \sin(k''(x-l) + \vartheta'') && \text{für } l \leqslant x\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Grenzbedingung bei $x = 0$ ergibt

$$A \sin\vartheta = B_+ + B_-$$
$$A k \cos\vartheta = k'(B_+ - B_-)\,. \tag{5}$$

Man bedient sich mit Vorteil eines Hilfswinkels η, der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen und durch

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{k}{k'} \tag{6}$$

definiert werden soll. Er hängt nur von E ab. Dann ergibt sich aus (5)

$$B_+ = \frac{A \sin(\vartheta + \eta)}{2\cos\eta}\,;\quad B_- = \frac{A \sin(\vartheta - \eta)}{2\cos\eta}\,. \tag{5'}$$

Die Grenzbedingung bei $x = l$ ergibt

$$A'' \sin\vartheta'' = B_+ e^{k'l} + B_- e^{-k'l}$$
$$A'' k'' \cos\vartheta'' = k'(B_+ e^{k'l} - B_- e^{-k'l})\,; \tag{7}$$

mit dem Hilfswinkel η'', der auch zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen soll und auch nur von E abhängt:

$$\operatorname{tg}\eta'' = \frac{k''}{k} \tag{6'}$$

kommt:

$$B_+ = \frac{A'' \sin(\vartheta'' + \eta'')}{2\cos\eta''} e^{-k'l}$$
$$B_- = \frac{A'' \sin(\vartheta'' - \eta'')}{2\cos\eta''} e^{k'l}\,. \tag{7'}$$

Durch Vergleich von (5') und (7') finden wir

$$\frac{B_+}{B_-} = \frac{\sin(\vartheta + \eta)}{\sin(\vartheta - \eta)} = \frac{\sin(\vartheta'' + \eta'')}{\sin(\vartheta'' - \eta'')} e^{-2k'l} \tag{8}$$

und

$$B_+ B_- = \frac{A^2 \sin(\vartheta + \eta)\sin(\vartheta - \eta)}{4\cos^2\eta} = \frac{A''^2 \sin(\vartheta'' + \eta'')\sin(\vartheta'' - \eta'')}{4\cos^2\eta''}$$

oder

$$\frac{A^2}{A''^2} = \frac{\cos^2\eta}{\cos^2\eta''} \cdot \frac{\sin(\vartheta''+\eta'')\sin(\vartheta''-\eta'')}{\sin(\vartheta+\eta)\sin(\vartheta-\eta)}. \tag{9}$$

Wir interessieren uns jetzt für die Bindung des Konstantenpaars A, ϑ an das Konstantenpaar A'', ϑ'', d. h. für den Zusammenhang von Amplitude und Phase zu beiden Seiten der Schwelle. Bei festem E ist der Phasenzusammenhang durch die zweite Gleichung (8) gegeben und sodann das Amplitudenverhältnis durch (9). Wir werden aber nur Gleichung (8) zu diskutieren haben, das Amplitudenverhältnis erweist sich durch den Phasenzusammenhang mitbestimmt. Durch Differentiation der Gleichung (8) bei konstantem E erhält man nämlich

$$\frac{d\vartheta''}{d\vartheta} = \frac{\sin^2(\vartheta''-\eta'')}{\sin^2(\vartheta-\eta)} \frac{\sin 2\eta}{\sin 2\eta''} e^{2k'l}$$

und weiter mit Benutzung von (8), (9), (6) und (6′)

$$kA^2 d\vartheta = k''A''^2 d\vartheta''. \tag{10}$$

Das Amplitudenverhältnis ist also durch die Steigung der Kurve bestimmt. die ϑ und ϑ'' (bei konstantem E) verknüpft. Diese Tatsache, die den Überblick sehr erleichtert, möchte ich als Schwellensatz bezeichnen.

Man kann die Gleichung (8) folgendermaßen schreiben

$$\operatorname{cotg}(\vartheta+\eta) - \operatorname{cotg} 2\eta = \frac{\sin 2\eta}{\sin 2\eta}\left(\operatorname{cotg}(\vartheta''+\eta'') - \operatorname{cotg} 2\eta''\right)e^{2k'l} \tag{8′}$$

und erkennt dann:

1. Die zwei Winkel $\vartheta+\eta$ und $\vartheta''+\eta''$ müssen gleichzeitig durch die Stellen $0, \pi, 2\pi \cdots$ gehen, wo die Kotangente ihr Unstetigkeitsphänomen zeigt;

2. $\vartheta+\eta$ muß, da wir $e^{k'l}$ als sehr groß voraussetzen, überhaupt immer ganz nahe bei einem der Werte $0, \pi, 2\pi \cdots$ liegen, außer wenn die Klammergröße rechter Hand nahezu verschwindet. $\vartheta+\eta$ als Funktion von $\vartheta''+\eta''$ ist also, außer in unmittelbarer Nähe der Stellen

$$\vartheta''+\eta'' = 2\eta'', \quad \pi+2\eta'', \quad 2\pi+2\eta'' \cdots$$

annähernd durch horizontale Geradenstücke in der Höhe $0, \pi, 2\pi \cdots$ gegeben;

3. der Übergang des Winkels $\vartheta+\eta$ von 0 auf π, von π auf 2π usw. muß sich sehr rasch in unmittelbarer Nähe der ebengenannten Stellen vollziehen; aus diesen Feststellungen ergibt sich der in Fig. 3 gezeichnete, annähernd stufenförmige Verlauf. Wir hätten ihn ebensogut auch aus der folgenden Gestalt ablesen können, in welcher die Gleichung (8) sich schreiben läßt:

$$\operatorname{cotg}(\vartheta''-\eta'') + \operatorname{cotg} 2\eta'' = \frac{\sin 2\eta}{\sin 2\eta''}\left(\operatorname{cotg}(\vartheta-\eta) + \operatorname{cotg} 2\eta\right)e^{2k'l}, \tag{8″}$$

wobei dann ϑ und ϑ'' in der Überlegung die Rollen tauschen.

Die Neigung unserer Kurve gibt nun nach dem Schwellensatz (10) das Verhältnis der Amplitudenquadrate zu beiden Seiten der Schwelle, und zwar so,

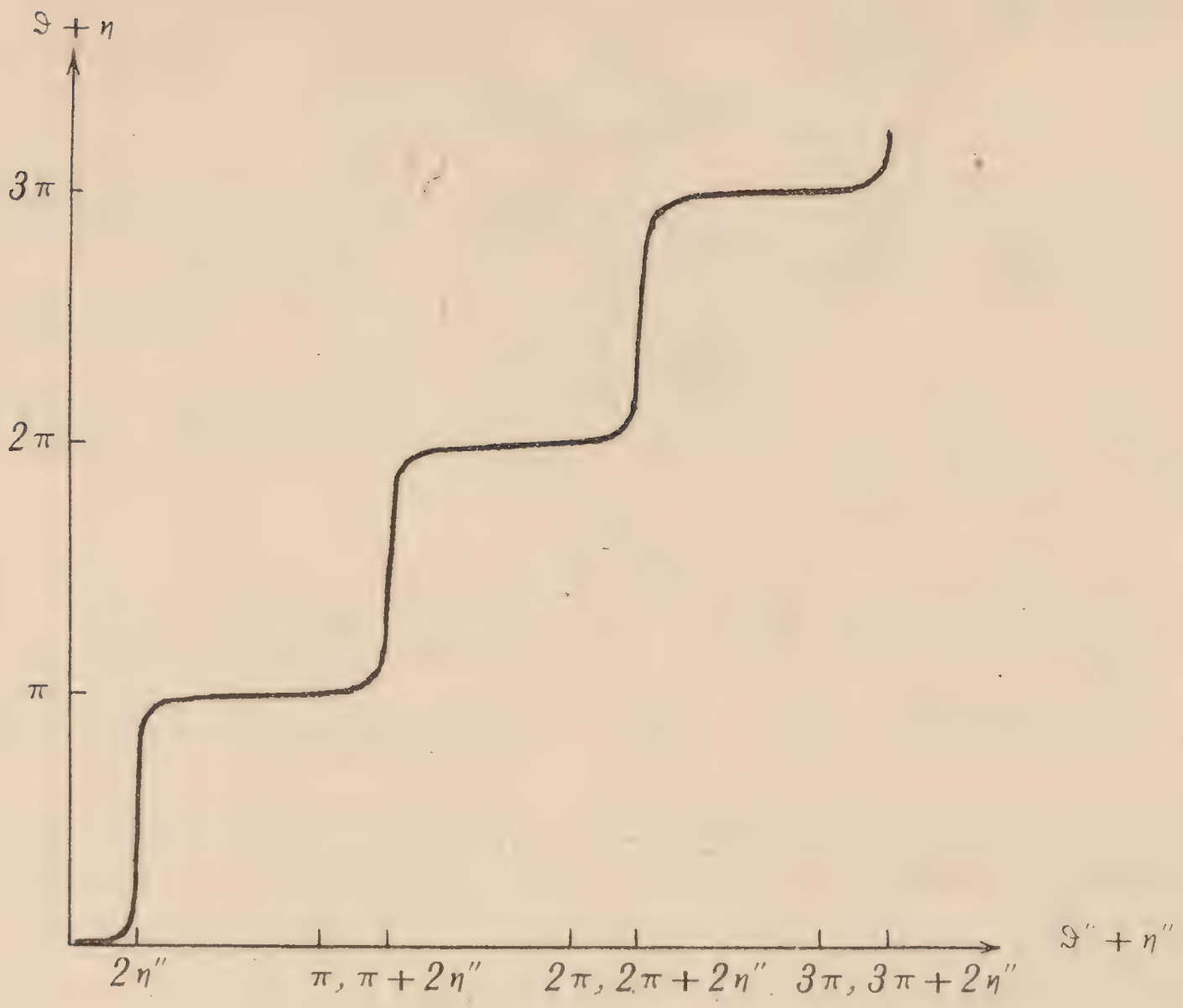


Fig. 3.

daß zur langsam verändernden Phase die große Amplitude gehört. Man sieht, das Verhältnis ist fast immer sehr extrem, entweder in dem einen oder in dem anderen Sinne, die Größenordnung 1 ist ein ausnahmsweises Vorkommnis an den abgerundeten Stufenecken. Damit steht nicht im Widerspruch, daß das größenordnungsmäßige Überwiegen von A''^2 auf sehr schmale ϑ''-Bereiche, das größenordnungsmäßige Überwiegen von A^2 auf sehr schmale ϑ-Bereiche beschränkt ist. Und zwar sind das die Bereiche

$$\vartheta'' = m''\pi + \eta'' + O(e^{-2k'l}) \qquad [m'' = \text{ganze Zahl}] \qquad (11)$$

bzw.

$$\vartheta = m\pi - \eta + O(e^{-2k'l}). \qquad [m = \text{ganze Zahl}] \qquad (12)$$

$O(a)$ soll heißen: Größe von der Ordnung a. Die Abschätzung läßt sich durch einige Überlegung aus (8′) bzw. (8″) gewinnen und ist so gemeint: für Abweichungen dieser Größenordnung bleibt das Amplitudenverhältnis noch extrem, ist aber doch schon erheblich kleiner als im Maximum. Das Maximum ist, für die Quadrate, von der Ordnung $e^{2k'l}$. Es fällt übrigens, beiläufig bemerkt, nicht genau an die Stellen, die sich durch Unterdrückung der Abschätzungsgrößen $O(\cdots)$ ergeben würden.

Anhang zu diesem Abschnitt: Der Schwellensatz (10) hat allgemeinere Gründe und einen viel weiteren Geltungsbereich. Er beruht auf der Tatsache, daß für irgendzwei Lösungen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ (nicht notwendig Eigenlösungen) der Differentialgleichung (1), die zum gleichen E-Wert gehören, die sogen. WRONSKISCHE Determinante

$$D = \psi_2 \frac{d\psi_1}{dx} - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dx} \qquad (13)$$

von x unabhängig ist. Denn

$$\frac{dD}{dx} = \psi_2 \frac{d^2\psi_1}{dx^2} - \psi_1 \frac{d^2\psi_2}{dx^2}$$

verschwindet, wenn ψ_1 und ψ_2 Lösungen von (1) sind. Dabei darf die Potentialfunktion U in ganz beliebiger Weise von x abhängen.

Wenn es nun aber zwei oder mehrere getrennte x-Bereiche gibt, wo U konstant und kleiner als E ist (während es zwischen diesen Bereichen ganz beliebig verlaufen mag), so wird die allgemeine Lösung von (1) in jedem dieser Bereiche die Gestalt

$$A \sin(kx + \vartheta) \tag{14}$$

haben, wobei aber natürlish k für jeden dieser Bereiche einen anderen Wert hat, nämlich $\frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E-U)}$. Auch das Integrationskonstantenpaar A, ϑ hat für jeden Bereich andere Werte, und zwar wird das Konstantenpaar eines Bereiches eindeutig von dem Konstantenpaar eines beliebigen anderen bestimmt. Bilden wir nun die Lösung (14) in einem der Bereiche, und zwar einmal für die Konstantenwerte A, ϑ, das andere Mal für $A + dA, \vartheta + d\vartheta$, und berechnen für diese zwei Lösungen die Determinante (13), so ergibt sich

$$kA^2\, d\vartheta. \tag{15}$$

Dieser Ausdruck muß also für jeden Bereich denselben Wert haben, wenn man in jedem Bereich Phase und Amplitude und deren Inkremente so wählt, daß es sich jedesmal um dieselben zwei Gesamtlösungen handelt. Damit ist der Geltungsbereich unseres Schwellensatzes (10) sehr stark erweitert, er gilt für ganz beliebigen Verlauf von U zwischen den zwei Gebieten, wo U konstant ist.

Man erkennt weiter, da (15) dA nicht enthält, daß der eine Phasenzuwachs eindeutig durch den anderen bestimmt ist, d. h. die Phase des einen Bereiches hängt nur von der Phase des anderen und nicht von der Amplitude ab. Das ist aber ziemlich trivial, denn wenn man eine Amplitude abändert, ändern sich natürlich alle anderen Amplituden proportional und die Phasen bleiben fest.

Die Rolle der Schwelle im Falle eines Linienspektrums.

Gehört unsere Schwelle einem System an, dem beiderseits Randbedingungen auferlegt sind — sei es durch spiegelnde Wände, sei es dadurch, daß die Lösung im Randbereich exponentiell ist —, so sind durch die beiden Randbedingungen beide Phasen ϑ und ϑ'' eindeutig in Funktion des Energiewertes festgelegt, und es bleibt kein anderes Mittel zur Befriedigung der Gleichung (8) als eine geeignete Wahl von E. Das heißt, diese Gleichung, die wir jetzt in der Form

$$\frac{\sin(\vartheta + \eta)\sin(\vartheta'' - \eta'')}{\sin(\vartheta - \eta)\sin(\vartheta'' + \eta'')} = e^{-2k'l} \tag{8}$$

schreiben wollen, wird zur Eigenwertgleichung. Wegen der Kleinheit der e-Potenz kann diese Gleichung nur so erfüllt werden, daß auch die linke Seite sehr klein wird. Daraus kann man, ohne die Voraussetzungen über die übrigen Teile des Systems weiter zu detaillieren, schließen, daß im allgemeinen die Eigenwerte in zwei Gruppen zerfallen, eine erste Gruppe, welche durch

$$\vartheta = n\pi - \eta + O(e^{-2k'l}) \tag{16}$$

und eine zweite, welche durch

$$\vartheta'' = n''\pi + \eta'' + O(e^{-2k'l}) \tag{17}$$

approximiert wird. Die erste Gruppe fällt in die Bereiche (12), daher überwiegt für diese Eigenwerte größenordnungsmäßig die Amplitude auf der linken Seite der Schwelle; für die zweite Gruppe ist das Umgekehrte der Fall, da sie in die Bereiche (11) fällt.

Ohne Detaillierung kann man noch feststellen, daß in (16) und (17) in gewissem Sinne auch die Glieder $-\eta$ und $+\eta''$ Korrektionsglieder sind. Sie fallen weg, wenn man die Schwelle unendlich hoch werden läßt, sie wirkt dann — selbstverständlich — beiderseits als spiegelnde Wand. Mit der Koppelung der beiden Teile des Systems über die Schwelle hinweg haben diese Glieder nichts zu tun, die Koppelung kommt vielmehr in den nur mit $O(\cdots)$ angedeuteten Gliedern zum Ausdruck. Diese fallen weg, wenn man die Schwelle unendlich breit werden läßt. Wir erhalten dann, was wir die ungestörten Eigenwerte des linken bzw. rechten Systemteils nennen wollen. (η und η'' hängen von der Breite der Schwelle nicht ab.)

Wir haben bisher die Möglichkeit außer acht gelassen, daß die linke Seite von (8) den erforderlichen kleinen Wert durch vereinigte Bemühungen der beiden Sinus im Zähler bekommen kann. Die Abschätzung des Fehlers in (16) und (17) wird dann unrichtig, man kann dann bloß noch behaupten, daß das Produkt der beiden Korrektionsgrößen $O(\cdot\cdot)$ von der Ordnung $e^{-2k'l}$ ist, z. B. beide $O(e^{-k'l})$. Man erkennt, daß der Fall dann eintritt, wenn ein ungestörter Eigenwert des linken Systemteils ganz oder angenähert mit einem ungestörten Eigenwert des rechten Systemteils zusammenfällt. Es ist der Resonanzfall. Die Eigenwertstörung ist dann zwar immer noch sehr klein, aber doch zu groß, um das Amplitudenverhältnis nach (11) oder (12) beurteilen zu können. Man kann sich aber sehr leicht direkt überlegen, was bei der Resonanz passiert. Gehen wir von einem resonanzfreien System aus, fassen wir je einen Eigenwert L (»links«) aus (16) und einen R (»rechts«) aus (17) ins Auge, und ändern wir irgendeinen Parameter des linken Systemteils so lange ab, bis der zu L gehörige ungestörte Eigenwert, sagen wir L_0, an dem zu R gehörigen ungestörten Eigenwert R_0 (der dabei unverändert bleibt!) vorbeimarschiert, und das System wieder resonanzfrei geworden ist. Wie benehmen sich dabei die wahren Werte L und R. Nach einem allgemeinen Satz können sie nie koinzidieren, sie können also nicht aneinander vorbei! Anderseits werden sie stets durch L_0, R_0 approximiert, auch im Resonanzstadium, bloß mit etwas geringerer Güte. Offenbar ist das nicht anders möglich als so, daß jedenfalls nach der Resonanzkrise L in der

Nähe von R_0 zurückgeblieben, R dagegen mit L_0 weitermarschiert ist. L und R haben Rollen getauscht, sie sind während des Durchgangs durch das Resonanzstadium aus der einen in die andere Gruppe übergetreten. Anschaulich geschildert ist die Sache so: R steht anfangs fast still, es wird durch Abänderung des linken Systemteils nur sehr wenig tangiert (Größenordnung $e^{-2k'l}$); bei Annäherung von L wird es aber immer unruhiger und wird schließlich, wenn L ihm ganz nahe gekommen ist, von diesem verdrängt, übernimmt dessen Bewegung, während L an seiner Stelle zurückbleibt, immer ruhiger werdend, je weiter R sich von ihm entfernt[1]. — Da nun jede Eigenfunktion selbstverständlich an ihrem Eigenwert haftet, so müssen auch die beiden Eigenfunktionen beim Durchgang durch die Resonanzkrise ihren Charakter austauschen, indem das Amplitudenverhältnis (9) für die eine von sehr großen zu sehr kleinen, für die andere von sehr kleinen zu sehr großen Werten übergeht. Während der Resonanz hat es, und zwar für beide gleichzeitig, die Größenordnung Eins.

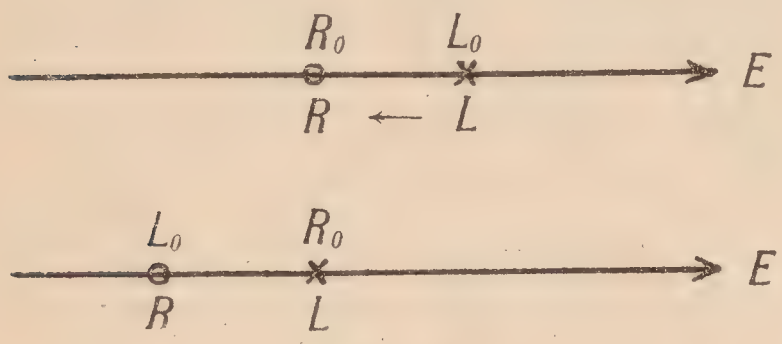


Fig. 4.

Auch im Resonanzfall kann man Lösungen herstellen, die in einem bestimmten Augenblick entweder fast ganz auf den linken oder fast ganz auf den rechten Systemteil beschränkt sind, und zwar muß man dazu die zwei nahe benachbarten Eigenlösungen in passender zeitlicher Phase superponieren. Da aber die Frequenzen doch etwas verschieden sind, verändert die Phasendifferenz säkular, und die beiden Fälle gehen langsam periodisch ineinander über. Die säkulare Periode ist umso größer, je genauer die Resonanz und je schwächer die Koppelung (d. h. je höher und breiter die Schwelle). Dieses Schwebungsphänomen ist hinlänglich bekannt, ich glaube, daß F. Hund der erste war, der es entdeckt und sehr interessante Anwendungen davon gemacht hat, z. B. auf den Übergang eines asymmetrischen Moleküls in sein optisches (spiegelbildliches) Isomer.

Es ist übrigens ganz bemerkenswert, daß wir gegenwärtig in der Quantenmechanik drei Arten von Resonanzphänomenen kennen, die in ihrem Habitus so außerordentlich ähnlich und in ihrem Auftreten gar nicht reinlich getrennt sind, so daß man sie bei flüchtigem Hindenken leicht verwechselt; während sie in Wahrheit begrifflich scharf auseinandergehalten werden sollten, wenigstens vorläufig. Da ist zunächst die »gewöhnliche« Resonanz, die dann auftritt, wenn man zwei Systeme, die eine gemeinsame Energiestufe (Eigenwertdifferenz) haben, aufeinander einwirken läßt, indem man sie mittels einer (kleinen) Potentialfunktion, die von den Koordinaten beider Systeme abhängt, koppelt. Auf dieser Art von Resonanz beruht ganz allgemein der Energieaustausch zwischen verschiedenen Systemen. Da ist zweitens die Heisenberg-

[1] Dieses Verhalten der Eigenwerte folgt hier schon aus dem Umstande, daß ein eindimensionales System überhaupt nicht entarten kann (außer bei periodischer Randbedingung, die liegt aber nicht vor). Wigner und Neumann haben l. c. gezeigt, daß dieses Verhalten der Eigenwerte das allgemeine ist. Es ist ein besonderer »Zufall«, wenn es durch Abänderung eines Parameters gelingt, zwei Eigenwerte zusammenzuführen.

Resonanz. wobei die zwei (oder mehr) verkoppelten Systeme ununterscheidbar gleich angenommen werden, also in allen Eigenwerten, mithin auch in allen Eigenwertdifferenzen, übereinstimmen; also scheinbar ein Spezialfall des vorigen, und doch etwas viel Tieferes und Bedeutungsvolleres wegen der sogleich auftauchenden Forderung, es dürfe zwischen den gleichen Systemen prinzipiell nicht unterschieden werden. Diese Forderung würde sogar das ganze Resonanzphänomen wieder beseitigen, wenn nicht durch die spin-Angelegenheit sozusagen zufällig doch wieder mehr oder weniger nahe benachbarte Eigenwerte des Gesamtsystems aufträten. — Das HUNDsche Resonanzphänomen ist wieder von anderer Art. Es tritt auf oder kann auftreten, wenn im Konfigurationsraum eines Systems zwei oder mehrere Gebiete relativ niedrigen Potentials durch relativ hohe Potentialwälle voneinander abgetrennt sind. Die Wälle wirken dann fast wie Randbedingungen, die verschiedenen »Mulden« haben fast ihre privaten Eigenschwingungen, die nur wenig auf andere Mulden übergreifen. Stimmen aber zwei zu verschiedenen Mulden gehörige private Eigenwerte überein, dann gehört zu jedem von ihnen eine Eigenfunktion, die beide Mulden erfüllt, und die Superposition dieser zwei Eigenfunktionen liefert Resonanzschwebungen zwischen den Mulden. — Gemeinsam ist allen diesen Schwebungsphänomenen dies: es liegt ein fast entartetes System vor, das bei Superposition der zwei zu den nahe benachbarten Eigenwerten gehörigen Lösungen, ähnlich wie eine Lissajousfigur bei fast kommensurabler Periode, säkular einen Zyklus von Schwingungstypen durchläuft, die einzeln als stationäre Schwingungszustände des Systems gar nicht auftreten können.

Die Rolle der Schwelle bei nur einer Randbedingung.

Jetzt wollen wir den Fall betrachten, daß nur auf einer Seite, sagen wir links, eine Randbedingung vorliegt, während rechts ein oszillatorisches Randgebiet ins Unendliche reiche. Dann legt die Randbedingung ϑ in Funktion von E fest. Die vielberufene Schwellenbedingung (8) ist nicht mehr Eigenwertgleichung, sondern dient zur Berechnung von ϑ'' bei beliebigem E, wir haben (in dem E-Bereich, für den die Voraussetzungen zutreffen) ein Streckenspektrum mit eindeutig festgelegter Eigenlösung. Um die Ideen zu fixieren, wollen wir aber jetzt doch ein ganz spezielles Beispiel herausgreifen, nämlich eine vollkommen spiegelnde Wand bei $x = -a$, so daß wir also nur die Schwelle mit den angrenzenden zwei Oszillationsgebieten vor uns haben, von denen das linke endlich ist ($-a \leqslant x \leqslant 0$), das rechte ins Unendliche reicht ($l \leqslant x \leqslant \infty$), s. Fig. 5.

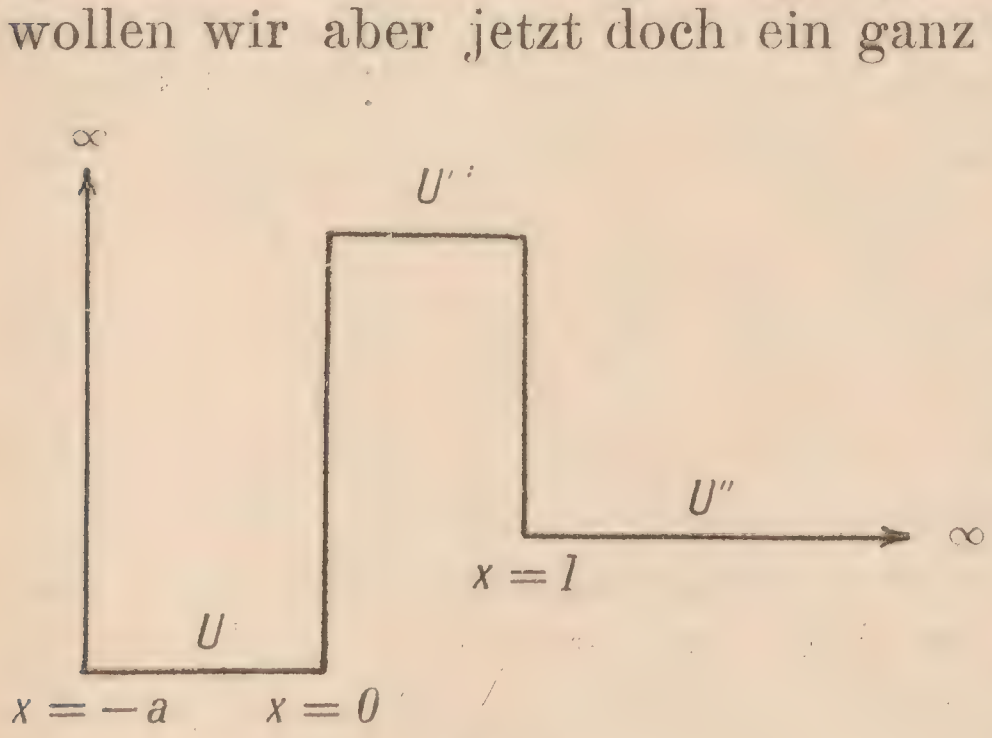


Fig. 5.

Man kann diesen Fall aus dem Fall zweier Randbedingungen, wie er im vorigen Abschnitt behandelt wurde, durch Grenzübergang entstehen lassen,

z. B. indem man zuerst auch rechts von der Schwelle eine Spiegelwand aufstellt und sie dann ins Unendliche abrücken läßt. Man findet, daß durch diesen Prozeß die »linke« Eigenwertgruppe, Gleichung (16), wenig tangiert wird, während die rechte, Gleichung (17), eine immer dichtere Folge bildet. Allerdings fühlen wir uns, je weiter der Grenzprozeß gediehen ist, um so mehr bedrückt durch den Umstand, daß die Resonanzkrise, die wir früher als ausnahmsweises Vorkommnis ansahen, zur Regel wird, wobei ganze Armeen von Eigenwerten zweiter Art gegen jeden Eigenwert erster Art sturmlaufen. Exakte Schlüsse aus solchem Grenzprozeß zu ziehen, ist eine heikle Sache und erfordert große Vorsicht. Wir wollen ihn deshalb nur heuristisch verwenden und froh sein, daß der Mathematiker[1] die Angelegenheit ein für allemal erledigt und uns feste Regeln zur direkten Behandlung eines Streckenspektrums an die Hand gegeben hat.

Es drängt sich die Frage auf: haben im Grenzfall die Stellen (16), wo nach naiver Betrachtung punktförmige Glanzlichter dem Streckenspektrum aufgesetzt scheinen, noch irgendwelche Bedeutung und welche? — Das Spektrum ist kontinuierlich, jeder Wert ist Eigenwert; zu jedem gehört eine und nur eine Lösung; sollte ein Eigenwert (16), in die immer dichter werdende Folge (17) hineingesetzt, eine merkliche Verdichtung hervorrufen? Das ist kaum anzunehmen, wir haben doch im vorigen Abschnitt gesehen, daß die Eigenwerte einander abstoßen, nicht anziehen.

Zur Klärung der Frage ist es offenbar nötig, die Eigenlösung des Streckenspektrums zu normieren. Ihre Gestalt ist durch (4) gegeben. Wir »normieren provisorisch«, durch die Festsetzung: A'' unabhängig von E. Wir schreiben abkürzend und einheitlich im ganzen Gebiet $\psi\,(x,\,E)$. Seien E_1 und E_2 irgendzwei E-Werte. Sei abkürzend

$$\psi\,(x\,,\,E_1) = \psi_1(x)\,;\;\psi\,(x\,,\,E_2) = \psi_2(x)\,. \qquad (18)$$

Ebenso werden wir alles, was zu E_1 und E_2 gehört $(\mathfrak{H}\,,\,\mathfrak{H}''\,;\,A\,;\,k\,,\,k'')$, durch die Indizes 1 und 2 kennzeichnen. Die Integrale

$$\int_{-a}^{\infty} \psi_1 \psi_2\, d\,x$$

sind sinnlos. Die korrekte Normierungsvorschrift ist diese: Man hat, bevor man mit x gegen ∞ geht, mit einem passend gewählten $f(E_2)\,d\,E_2$ zu multiplizieren[2] und nach E_2 über ein endliches Gebiet zu integrieren; dann erst mit x gegen ∞ zu gehen. Liegt E_1 außerhalb jenes endlichen E-Gebietes, so kommt automatisch Null heraus. Liegt es innerhalb, so soll Eins herauskommen. Letzteres ist die Forderung an $f(E)$. Ist sie erfüllt, so heißt $\psi\,(x,\,E)\sqrt{f(E)}\,d\,E$ das normierte Eigendifferential. Rechentechnisch erfüllt bzw. verifiziert man die Forderung, indem man, nach dem Grenzübergang $x \to \infty$, das E_2-Gebiet auf E_1 sich zusammenziehen läßt, was aber

[1] H. Weyl, Math. Ann. **68**, 220, 1910; Gött. Nachr. 1910.

[2] Korrekter wäre: mit $\sqrt{f(E_1) f(E_2)}\,d\,E$. Es kommt aber auf eins heraus.

den Wert des Integrals nicht mehr ändert, sondern bloß zu seiner Feststellung dient.

Aus der Differentialgleichung (1) ergibt sich leicht durch die bekannte GREENsche Umformung, welche durch die Unstetigkeit der zweiten Ableitung nicht behindert wird:

$$\int_{-a}^{x} \psi_1 \psi_2 \, dx = \frac{h^2}{8\pi^2 m (E_1 - E_2)} \left(\psi_1 \frac{d\psi_2}{dx} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{dx} \right) \Bigg|_{0}^{x}. \qquad (19)$$

Mit der oberen Grenze x meinen wir einen schon ziemlich großen positiven Wert, jedenfalls größer als l. Rechts verschwindet der Beitrag der unteren Grenze, für die obere ist er aus dem dritten Ausdruck (4) zu berechnen. Beachtet man noch, daß nach (3)

$$\frac{8\pi^2 m (E_1 - E_2)}{h^2} = k_1''^2 - k_2''^2, \qquad (20)$$

so kommt nach einfacher Umformung

$$\int_{-a}^{x} \psi_1 \psi_2 \, dx = \frac{A''^2}{2} \left\{ \frac{\sin [(k_1'' - k_2'')(x - l) + \vartheta_1'' - \vartheta_2'']}{k_1'' - k_2''} - \frac{\sin [(k_1'' + k_2'')(x - l) + \vartheta_1'' + \vartheta_2'']}{k_1'' + k_2''} \right\}. \qquad (21)$$

Wir wählen nun $f(E)\,dE = dk''$, d. h. wir multiplizieren, bevor wir mit x gegen ∞ gehen, mit dk_2'' und integrieren nach k_2'' von $k_1'' - \Delta$ bis $k_1'' + \Delta$. Dabeit passiert im zweiten Glied rechts an der kritischen Stelle $k_2'' = k_1''$ nichts Besonderes. Es liefert einen Beitrag, der zwar noch von x abhängt, aber für beliebiges x unter einer endlichen Schranke bleibt und mit $\Delta \to 0$ gegen Null gehen würde. Das erste Glied zerspalten wir nochmals, folgendermaßen:

$$\frac{A''^2}{2} \left\{ \frac{\sin [(k_1'' - k_2'')(x - l)] \cos (\vartheta_1'' - \vartheta_2'')}{k_1'' - k_2''} + \frac{\cos [(k_1'' - k_2'')(x - l)] \sin (\vartheta_1'' - \vartheta_2'')}{k_1'' - k_2''} \right\}. \qquad (22)$$

Hier ist das zu (21) Bemerkte wörtlich zu wiederholen (vorausgesetzt, daß $d\vartheta''/dk''$ unter einer endlichen Schranke bleibt, worauf wir noch zurückkommen). Unter derselben Voraussetzung begeht man im ersten Glied nur einen Fehler von der Ordnung Δ, wenn man den Kosinus durch die Einheit ersetzt. Tut man das, so liefert das erste Glied beim Grenzübergang $x \to \infty$ (mit beliebig kleinem aber noch endlichem Δ!)

$$\frac{A''^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \, du = \frac{A''^2 \pi}{2}. \qquad (23)$$

Dieser Teil des zu berechnenden Grenzwertes teilt mit letzterem folgende zwei Eigenschaften: 1. er existiert, 2. er ist unabhängig von Δ. Beide Eigenschaften müssen also auch dem Grenzwert (immer: bei $x \to \infty$ und noch endlichem, festem Δ) der beiseitegelassenen Glieder zusammengenommen zukommen. Da wir aber nur Glieder beiseitegelassen haben, die mit $\Delta \to 0$ ver-

schwinden würden, so muß auch ihr Grenzwert (bei $x \to \infty$ und endlichem, festem Δ), von dem wir ja jetzt wissen, daß er existiert, die Eigenschaft haben, mit $\Delta \to 0$ zu verschwinden. Diese Eigenschaft kann eine von Δ unabhängige Größe aber nur haben, wenn sie exakt Null ist. Der Grenzwert (bei $x \to \infty$ und endlichem, festem Δ) der fortgelassenen Glieder ist also exakt Null. (23) ist der gesamte gesuchte Grenzwert.

Die Wahl $f(E)\,d(E) = dk''$ war also richtig, und das korrekt normierte Eigendifferential lautet

$$\psi(x, E)\sqrt{\frac{dk''}{dE}}\cdot dE \backsim \frac{\psi(x, E)}{\sqrt{k''}}\,dE, \tag{24}$$

wobei daran zu erinnern ist, daß das »vorläufig normierte« $\psi(x, E)$ eine konstante (d. h. von E unabhängige) Amplitude A'' rechts von der Schwelle besitzt.

Nun wäre noch der Beweis nachzutragen, daß $d\vartheta''/dk''$ stets unter einer endlichen Schranke bleibt. Ich will ihn nur andeuten. Die Spiegelwand bei $x = -a$ verlangt nach (4)

$$\vartheta = ak; \quad d\vartheta = a\,dk. \tag{25}$$

Ferner ist zu beachten, daß nach (3)

$$k\,dk = k''\,dk''.$$

Nun darf man aber leider nicht unmittelbar die Beziehung (10) verwenden, weil die zwei Nachbarlösungen, um die es sich jetzt handelt, nicht zu demselben E-Wert gehören. Man muß die Beziehung (10) für diesen Fall verallgemeinern durch ähnliche Überlegungen, wie sie oben zu (13) bis (15) angestellt wurden. Dann folgt die Endlichkeit des in Frage stehenden Quotienten aus dem Umstand, daß das Verhältnis der Amplitudenquadrate zwar manchmal, sogar meistens, sehr extrem, aber doch stets endlich ist. Keine von den zwei Amplituden kann exakt verschwinden, denn das würde die triviale, überall verschwindende Lösung herbeiführen, die nicht in Betracht kommt.

Verwaschene Linienspektra.

Wie ist das Ergebnis (24) aufzufassen? Zeigt unser Streckenspektrum »Verdichtungen« oder nicht? Nun, unser Beispiel ist besonders geeignet, um erkennen zu lassen, daß ein Begriff »spektrale Dichte«, »Gewichtsfunktion« o. dgl. eigentlich gar nicht existiert, sondern nur der Begriff des normierten Eigendifferentials. Man wird sich allerdings manchmal dazu gedrängt fühlen, von diesem eine Funktion von E als Faktor abzuspalten

$$\frac{\psi(x, E)}{\sqrt{k''}}\,dE = \rho(E)\cdot\psi^*(x, E)\,dE$$

und den Faktor $\rho(E)$ als Dichtefunktion anzusprechen. Aber diese Spaltung ist eigentlich vollkommen willkürlich, sie kann bloß nahegelegt werden, wenn man fühlt, daß man geneigt sein würde, die »spektrale Dichte« als konstant

zu bezeichnen, wenn sich als normiertes Eigendifferential $\psi^*(x, E)dE$ ergeben hätte. (Mit $\sqrt{f(E)}$, welches oben auftrat, hat $\rho(E)$ natürlich gar nichts zu tun, denn dieses $f(E)$ hängt ja ganz davon ab, von welcher vorläufigen Normierung wir ausgegangen waren; es besorgt lediglich die Korrektur von der falschen Normierung auf die richtige.) Es liegt in der Natur eines nur psychologischen Motivs, daß es nie scharf eindeutig führt, es kommt z. B. noch darauf an, ob man wirklich die Energie oder lieber die Wellenlänge für die natürliche Variable hält, um das Eigendifferential auszudrücken. Immerhin kann man auf diese Weise zu einer natürlichen Unterscheidung zwischen langsam und rasch veränderlicher Dichteverteilung geführt werden.

Bei stehenden Sinuswellen wird man geneigt sein, den Begriff konstanter Dichte mit einem normierten Eigendifferential zu verbinden, in welchem die Amplitude konstant, d. h. von E unabhängig wäre. Unser Eigendifferential (24) zeigt nun rechts und links von der Schwelle sehr verschiedene Amplitude. Rechts ist sie langsam veränderlich, daher hat sie links als Funktion von ϑ, folglich auch von k oder von E (vgl. [25]), sehr hohe und sehr schmale Maxima in der Umgebung der Stellen (12), d. h. gerade in der Umgebung derjenigen Stellen (16), wo, wenn man das System auch rechts irgendwie abschließt, die dem linken Becken zugehörigen diskreten Eigenwerte liegen würden.

Ob man von Maximis der spektralen Dichte zu sprechen geneigt ist, hängt also ganz davon ab, ob man auf den rechten, unendlichen, oder auf den linken, endlichen Systemteil sein Augenmerk richtet. Vom Standpunkte des fast abgeschlossenen Beckens a liegt ein Streckenspektrum vor, das fast ausschließlich auf gewisse schmale, aber endliche Bereiche beschränkt ist. Unabhängig von aller Psychologie wird sich dies rein mathematisch darin aussprechen, daß man zur Fourierdarstellung einer Funktion, die fast ganz auf das Becken a beschränkt ist, bei $x = 0$ der Übergangsgrenzbedingung genügt und dann rasch auf Null absinkt, mit den Eigenfunktionen jener schmalen Bereiche näherungsweise das Auslangen finden wird; und man wird, indem man diese ausgeblendete Darstellung zeitlich verfolgt, sehen können, wie sich eine anfangs nur auf das Innere beschränkte Erregung allmählich durch die Wand durch nach außen ausbreitet. Für manche Zwecke (wenn auch nicht gerade für den eben angeführten!) wird man die Fourierintegraldarstellung näherungsweise durch eine Fourierreihendarstellung ersetzen können — gerade das Umgekehrte von dem, was so häufig bei physikalischen Berechnungen auftritt. Man kann sogar durch einen Grenzprozeß, z. B. indem man die Schwelle immer breiter werden läßt ($\lim l = \infty$), das Streckenspektrum zu einem Linienspektrum entarten lassen, wobei die eben besprochenen Näherungen zu exakter Gültigkeit gelangen. Ein solcher Grenzprozeß bildet das Gegenstück zu dem anderen, wohlbekannten, der durch immer dichtere Anhäufung diskreter Eigenwerte aus einem Linienspektrum ein Streckenspektrum hervorgehen läßt.

Genauere Überlegung zeigt, daß man in Wirklichkeit wohl alle diskreten Eigenwertspektra als Kontinua mit schmalen, aber endlichen Konzentrationsstellen aufzufassen hat, und zwar auch ganz abgesehen von der immer-

hin noch nicht ganz geklärten Koppelung mit dem Strahlungsfeld. In dem hier behandelten Schulbeispiel rührt nämlich der kontinuierliche Charakter, die Verwaschenheit des Spektrums, offenbar davon her, daß die Energie des Systems ausreicht, um ihm die Entfernung ins Unendliche zu ermöglichen. Das trifft nun aber für jedes frei bewegliche System zu, wenn es sich nicht gerade auf dem tiefsten Energieniveau befindet: Jeder positive Energiebetrag, in Schwerpunktsbewegung umgesetzt, ermöglicht die Entfernung ins Unendliche. Allerdings, wenn das System völlig isoliert ist, so ist die Schwerpunktsbewegung von den »inneren Bewegungen« völlig losgekoppelt, es ist so, als ob zwei ganz getrennte Systeme vorlägen. Aber das ist ein Idealfall, der in Wirklichkeit nicht vorkommt. Der geringste äußere Einfluß wird im allgemeinen eine Koppelung der inneren Bewegung und der Schwerpunktsbewegung herbeiführen und die diskreten Eigenwerte der ersteren ein wenig verwischen.

Anders ausgedrückt: Koppelt man ein System mit diskreten Eigenwerten (hier die innere Bewegung) an ein System mit kontinuierlichem Spektrum (hier die Schwerpunktsbewegung), so resultiert grundsätzlich ein Gesamtsystem mit Streckenspektrum. Der näherungsweise diskrete Charakter desselben mit Bezug auf das erste Teilsystem wird sich darin äußern, daß man zur fouriermäßigen Darstellung einer Funktion, die nur von den Koordinaten des ersten Teilsystems abhängt, näherungsweise mit denjenigen Eigenfunktionen des Gesamtsystems sein Auslangen finden wird, deren Eigenwerte in schmalen, aber endlichen Umgebungen der diskreten Eigenwerte des losgekoppelten ersten Teilsystems liegen.

Die Angelegenheit liegt keineswegs völlig analog wie bei dem in dieser Note durchgerechneten Beispiel, weil es sich ja in dem einen Fall um zwei fast entkoppelte Teilgebiete derselben Variablen, in dem anderen um zwei fast entkoppelte Hamiltonsche Funktionen handelt, die sich auf ganz getrennte Variablengruppen beziehen. Die allgemeine Behandlung des zweiten Falles wird erschwert durch gewisse Unannehmlichkeiten, denen die Störungstheorie im Streckenspektrum begegnet[1]. Die einwandfreie Durchführung ist mir bisher nicht gelungen, ich muß daher die Behauptungen der vorangehenden zwei Absätze nur als bestimmte Vermutungen bezeichnen, die in ihrem Kern wohl richtig, in der Formulierung aber vielleicht noch mangelhaft sein werden.

[1] Man vergleiche E. Fues, Zeitschr. f. Phys. **43**, 726, 1927, der einen hierhergehörigen Fall — die Auger-Sprünge — behandelt hat.

Ausgegeben am 14. Januar 1930.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1929 XXXII. XXXIII

Library of Congress
MAY 8 1930
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 12. Dezember. (S. 683)
Adresse an Hrn. Bruno Krusch zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 29. November 1929. (S. 685)
Klassensitzung am 19. Dezember. (S. 686)
Namen- und Sachregister. (S. 688)

BERLIN 1929

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XXXII. Gesamtsitzung. 12. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

1. Hr. Heymann sprach über das Thema »Zur Entwicklungsgeschichte des Aktienrechtes«.

In untrennbarem Zusammenhang der Wirtschafts- und Rechtsentwicklung ist das Aktienrecht seit den italienischen, holländischen und englischen Anfängen von dem Gedanken bestimmt, daß die Hauptpartizipanten den entscheidenden Einfluß auf Verwaltung und Geschäftsgebarung haben. Auch als im Anfang des 19. Jahrhunderts unter dem Einfluß naturrechtlicher Aufklärungsgedanken das Prinzip relativer Gleichheit aller Aktionäre nach Maßgabe ihres Risikoanteils aufkam, wurde durch die Praxis der ganz überwiegende Einfluß der Hauptpartizipanten noch lange erhalten. Erst mit dem Fortfall des Konzessionssystems im letzten Drittel des vorigen Jahrhunderts mußte man nach Sicherungen für die Einzelaktionäre der Minorität suchen, und es entstanden zahlreiche Normativbestimmungen und Sonderrechte, welche auf dem Gedanken des gleichen Stimmrechts aller Aktien aufgebaut waren. Die Praxis der Gesellschaften und eine scharfsinnige Kautelarjurisprudenz haben aber diese Sicherungen in weitem Umfang zur Seite geschoben und den alten Einfluß der Hauptpartizipanten doch zur Geltung gebracht. Diese in allen industriellen Staaten im wesentlichen gleichartige Entwicklung ist der Kernpunkt des Aktiensproblems und bewegt sich in der Richtung einer Ausgestaltung der sog. Klein-Aktionärstellung zur bloßen stillen Teilhaberschaft, was gesetzgeberisch die Sicherung des Aktionärs in seinem Kapital- und Gewinnanteil gegen Ausbeutung bei Wahrung einer starken Verwaltung keineswegs ausschließt, wohl aber die Unterscheidung von Anlage- und Spekulationsaktien nach dem Vorgange des am meisten fortgeschrittenen amerikanischen Rechts zeitigen muß.

2. Hr. Einstein überreichte eine Arbeit über »Die Kompatibilität der Feldgleichungen in der einheitlichen Feldtheorie«. (Ersch. später.)

Nach kurzer Kritik meiner früher vorgeschlagenen Feldgleichungen und nach kurzer Wiederholung der mathematischen Grundlagen der einheitlichen Feldtheorie werden die neuerdings von mir angegebenen Feldgleichungen abgeleitet; deren Kompatibilität wird bewiesen.

3. Vorgelegt wurde der 36. Bd. der »Griechischen christlichen Schriftsteller der ersten drei Jahrhunderte«: »Hyppolytus' Werke«, 4. Bd.: »Die Chronik«, hergestellt von Adolf Bauer (†), durchgesehen und herausgegeben von Rudolf Helm, nebst einem Beitrag von J. Markwart (Leipzig 1929).

4. Das korrespondierende Mitglied der philosophisch-historischen Klasse Hr. Bruno Krusch in Hannover hat am 29. November sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm aus diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Preußische Regierung hat am 11. Dezember 1929 die Wahl des außerordentlichen und bevollmächtigten Botschafters der Vereinigten Staaten von Nord-Amerika in Berlin, Hrn. Jacob Gould Schurman, zum Ehrenmitglied der Akademie bestätigt.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Franz Studniczka in Leipzig am 4. Dezember 1929 durch den Tod verloren.

Adresse an Hrn. Bruno Krusch zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 29. November 1929.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Am 29. November sind 50 Jahre vergangen, seitdem Sie zum Doktor der Philosophie promoviert wurden. Unter denen, die Ihnen zu diesem Tage ihre Glückwünsche darbringen, kann die Preußische Akademie der Wissenschaften nicht fehlen. Sie gedenkt dabei, daß das Jahr 1879, in dem Sie Ihr Doktordiplom erwarben, Ihnen zugleich die Berufung zum Mitarbeiter der Monumenta Germaniae historica brachte. Der durch die Promotion dokumentierte Abschluß Ihrer Universitätsstudien führte Sie sofort in den Kreis, dem Sie seitdem als eines der gelehrtesten, erfolgreichsten und bis auf den heutigen Tag unermüdlich tätigen Mitglieder angehört haben. Was Sie in den seitdem verflossenen 50 Jahren für dieses große nationale Werk geleistet haben, ist mit ehernem Griffel in seine Annalen eingetragen. Wir brauchen hier nicht aufzuzählen, was Sie als Mitarbeiter Theodor Mommsens für die Abteilung der Auctores antiquissimi, als Abteilungsleiter der Scriptores rerum Merowingicarum für die hagiographische Wissenschaft und als scharfer und jugendlich temperamentvoller Kritiker für die Geschichtswissenschaft überhaupt bedeuteten. Weit über die Grenzen Deutschlands hinaus sind diese Leistungen bekanntgeworden. Wir, die wir Sie zu den Unsrigen zählen, sprechen Ihnen daher an diesem Tage mit unseren Glückwünschen die Hoffnung aus, daß Ihnen ein gütiges Geschick die Kraft verleihen möge, noch lange Jahre wie bisher dieselbe unermüdliche Tätigkeit zu entfalten und die großen Aufgaben, die Sie sich noch gesetzt haben, zu einem glücklichen Ende zu führen.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 3. Februar 1930.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1929

XXXIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 19. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Wagner sprach über Neuere Fortschritte und Probleme der technischen Akustik. (Ersch. später.)

Durch die Benutzung neuzeitlicher Hilfsmittel, insbesondere aus der Elektronen-Röhrentechnik, konnten die Schallforschung und die Schalltechnik wesentliche Fortschritte machen. Der Vortragende berichtet u. a. über empfindliche und absolut eichbare Geräte zur Messung der Schallstärke, Verfahren zur Frequenzanalyse, die auch auf unharmonische Klänge und Geräusche mit kontinuierlichem Spektrum anwendbar sind; objektive Methoden zur Untersuchung und Beurteilung der Hörsamkeit von Räumen.

2. Hr. Schmidt legte eine Untersuchung von Dr. Rembs, Berlin, vor unter dem Titel »Unverbiegbare offene Flächen«. (Ersch. später.)

Es wird die infinitesimale Unverbiegbarkeit von Flächen bewiesen, die im Innern ein durchweg positives Krümmungsmaß besitzen, aber von solchen ebenen Rändern parabolischer Krümmung begrenzt werden, daß die Ebene jedes Randes zugleich Tangentialebene in allen Punkten dieses Randes ist. Die Flächen sind also selbst offen, besitzen aber ein geschlossenes sphärisches Bild.

3. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Heyting in Enschede vor: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. (Ersch. später.)

In der intuitionistischen Logik kann von den vier logischen Funktionen (1. »aus a folgt b«, 2. »a und b«, 3. »entweder a oder b«, 4. »nicht a«, wo a und b Aussagen bedeuten) keine mit Hilfe der übrigen definiert werden. In dieser Arbeit gibt der Verfasser ein System unabhängiger Axiome für diese vier Grundfunktionen und arbeitet den intuitionistischen Aussagenkalkül aus unter besonderer Berücksichtigung der von denen der klassischen Logik abweichenden Formeln.

4. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Heyting in Enschede vor: Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. (Ersch. später.)

Im Anschluß an die vorhergehende Arbeit wird hier der intuitionistische Funktionenkalkül formal dargestellt. Als wichtigste Grundbegriffe treten auf: 1. $\binom{p}{x}a$, die Aussage, welche aus der Aussage a entsteht, indem man darin überall x durch p ersetzt, 2. $(x)a$, »die Aussage a gilt für jeden Gegenstand x«, 3. $(Ex)a$, »man kann einen Gegenstand x angeben, für welchen die Aussage a gilt«, 4. $p \equiv q$, »p ist derselbe Gegenstand wie q«. Weiter wird die Theorie der natürlichen Zahlen aus den Peanoschen Axiomen hergeleitet.

5. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. G. Hoheisel in Breslau vor: Nullstellenanzahl und Mittelwerte der Zetafunktion. (Ersch. später.)

$N(\sigma_0, T)$ sei die Anzahl der Nullstellen, die $\zeta(s)$ in $\sigma > \sigma_0$, $t < T$ besitzt. Dann ist nach F. Carlson:

$$N\left(\tfrac{1}{2} + \delta, T\right) = O\left(T^{1-4\delta^2+\varepsilon}\right),$$

wo $\delta > 0$ und $\lim_{T\to\infty} \varepsilon(T) = 0$ ist.

Für diesen Satz wird hier ein einfacher durchsichtiger Beweis gegeben.

6. Vorgelegt wurde »Beiträge zur Flora von Papuasien. XVIII«, von C. Lauterbach (Sonderabdr.).

Ausgegeben am 3. Februar 1930.

NAMEN- UND SACHREGISTER.

Adressen: An Friedrich Küstner zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 15. Mai 1929. 241. 242–243. — an Max Planck zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. Juni 1929. 289. 341–342. — an Heinrich Finke zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. August 1929. 486. 488–489. — an Rudolf Thurneysen zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 17. September 1929. 486. 490–491. — an Otto von Zallinger zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 20. Oktober 1929. 543. 546–547. — an Bruno Krusch zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 29. November 1929. 683. 685.

Astronomie: Bericht über die Geschichte des Fixsternhimmels, von Guthnick. LXVI–LXVII. — Veröffentlichung derselben 241. 486. — Untersuchungen über die δCephei-Sterne, von Ludendorff. 63. 64–95. — Über den sogenannten 61 Cygni-Sternstrom, von Ludendorff. 226. 229–239. — Über die geschlossenen Bahnen der Mondtheorie, von Eberhard Hopf. 365. 401–413. — Weiteres zur Geschichte des Nebels »Barnard 86«, von J. G. Hagen. 533. 543–545. — Experimentelles zur Photometrie des Rotationsellipsoids, von C. Wirtz. 573. 574–591.

Anatomie: Über die Arbeitsleistung der Schultergelenkmuskeln, von Fick. 224. 458–483.

Antrittsreden: von Schrödinger, Erwiderung von Planck. C–CIV.

Auer von Welsbach, Karl Frhr., gestorben am 4. August 1929. 487.

Belinfante, M. J., Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen. 508. 639–660.

Beneschewitsch, Wladimir, in Leningrad, zum korrespondierenden Mitglied der philosophisch-historischen Klasse gewählt am 30. Mai 1929. 241.

Bieberbach, Bericht der Kronecker-Kommission. LXXXIV.

— und Schur, Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen. 508.

Bieberbach, Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen. 611. 612–619.

—, Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen. 611. 620–623.

Biographisches Jahrbuch, Deutsches: Bericht über dasselbe, von Marcks. XCI. — Geldbewilligung. 253. — Veröffentlichung. 485.

Birkhoff, Georg D., Divergente Reihen und singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen. 13. 171–183.

Blüthgen, Paul, Geldbewilligung an ihn für Forschungen über die *Apiden*-Gattungen. 487.

von Bode, Wilhelm, gestorben am 1. März 1929. 123.

Bodenstein, Der durch Chlor katalysierte Zerfall des Ozons. 365. 367–369.

Bohr, Harald, Über ganze transzendente Funktionen von einem besonderen Typus. (Beispiel einer allgemeinen Konstruktionsmethode.) 508. 565–571.

Bonhoeffer, K. F., und P. Harteck, Experimente über Para- und Orthowasserstoff. 102. 103–108.

Born, Max, in Göttingen, zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 31. Oktober 1929. 534.

Botanik: Bericht über das Pflanzenreich, von Engler. LXVI. — Bericht über die Bearbeitung der Flora von Papuasien und Mikronesien, von Engler. XC. — Veröffentlichung derselben. 253. — Geldbewilligung an Haberlandt für eine Forschungsreise nach Neapel. 186. — Nichtmendelnde Vererbung, von Correns. 154. — Über Regenerationsvorgänge bei *Bryopsis* und *Codium*, von Haberlandt. 288. 327–340.

Brackmann, Gedächtnisrede auf Dietrich Schäfer. CIV–CVII.

Bragg, Sir William, in London, zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 31. Oktober 1929. 534.

Brauer, Richard, Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe. 507. 626–638.

Bredow, Hans, erhält die goldene Leibniz-Medaille. CXXIII.

Brouwer, Egbertus, in Amsterdam, zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 31. Oktober 1929. 534.

von Bülow, Bernhard Fürst, gestorben am 28. Oktober 1929. 534.

Carathéodory, Constantin, Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen. 37. 38–54.

Chemie: Atomumwandlungen und ihre Bedeutung für Chemie und Physik, von Hahn. LII–LX. — Experimente über Para- und Orthowasserstoff, von K. F. Bonhoeffer und P. Harteck. 102. 103–108. — Über die Rolle der Elektrizitätsträger bei der Explosion brennbarer Gase im Gemische mit Luft, von Haber. 161. 162–170. — Der durch Chlor katalysierte Zerfall des Ozons, von Bodenstein. 365. 367–369. — Beiträge zur Kenntnis des Schwarzpulvers, von Karl Andreas Hofmann. 507. 509–515. — Über die Photolyse der Lösungen von Schwefelwasserstoff in Hexan und in Wasser, nach Versuchen mit Dr. Rump, von Warburg. 507. 624–625. — Die radioaktiven Substanzen im Dienste chemischer und physikalisch-chemischer Forschung, von Hahn. 533. 535–542.

Correns, Nichtmendelnde Vererbung. 154.

Einstein, Zur einheitlichen Feldtheorie. 1. 2–7.

—, Über einheitliche Interpretation von Gravitation und Elektrizität. 102.

—, Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip. 154. 156–159.

—, Die Kompatibilität der Feldgleichungen in der einheitlichen Feldtheorie. 683.

Engler, Bericht über das Pflanzenreich. LXVI.

—, Bericht über die Flora von Papuasien und Mikronesien. XC.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften: Veröffentlichung. 8.

Festreden: Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Jahrestages König Friedrichs II.: Das friderizianische Handelsrecht, von Heymann. XVII–XXXIX. — Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages, von Lüders. XCIII–XCIX.

Fick, Gedächtnisrede auf Franz Keibel. CVII–CXXII.

—, Über die Arbeitsleistung der Schultergelenkmuskeln. 224. 458–483.

von Ficker, Der Sturm in Norddeutschland am 4. Juli 1928. 288. 289–326.

Finke, Heinrich, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 7. August 1929. 486. 488–489.

Finsterwalder, Richard, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CXXIII–CXXIV.

Fixsternhimmel, Geschichte desselben: Bericht über das Werk, von Guthnick. LXVI–LXVII. — Veröffentlichung. 241. 486.

Flora von Papuasien und Mikronesien: Bericht über deren Bearbeitung, von Engler. XC. — Veröffentlichung. 253.

Franck, James, in Göttingen, zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 31. Oktober 1929. 534.

Gedächtnisreden: auf Dietrich Schäfer, von Brackmann. CIV–CVII. — auf Franz Keibel, von Fick. CVII–CXXII.

Geldbewilligungen: Wilhelm Meise. 186. — Gottlieb Haberlandt. 186. — Weierstrass-Kommission. 186. — Berliner Mathematische Gesellschaft. 186. — Otto Schmiedeknecht. 186. 487. — Leibniz-Ausgabe 253. — Biographisches Jahrbuch. 253. — Nomenclator animalium. 487. — Pappenheim. 487. Blüthgen. 487.

Geographie: Über den Gebirgsbau des Fernen Westens Nordamerikas, von Penck. 101. — Geomorphologische Probleme im Fernen Westen Nordamerikas, von Penck. 185. 187–218.

Geologie: Neue Funde in der iberisch-balearischen Trias, von Martin Schmidt. 507. 516–523.

Geyer, Rudolf Eugen, gestorben am 15. September 1929. 487.

Guthnick, Bericht über die Geschichte des Fixsternhimmels. LXVI–LXVII.

Haber, Über die Rolle der Elektrizitätsträger bei der Explosion brennbarer Gase im Gemische mit Luft. 161. 162–170.

Haberlandt, Geldbewilligung an ihn für eine Forschungsreise nach Neapel. 186.

—, Über Regenerationsvorgänge bei *Bryopsis* und *Codium*. 288. 327–340.

Hagen, J. G., Weiteres zur Geschichte des Nebels »Barnard 86«. 533. 543–545.

Hahn, Atomumwandlungen und ihre Bedeutung für Chemie und Physik. LII–LX.

—, Die radioaktiven Substanzen im Dienste chemiseher und physikalisch-chemischer Forschung. 533. 535–542.

Hardy, Godfrey Harold, zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 31. Oktober 1929. 534.

Harteck, P., siehe Bonhoeffer.

Hesse, Bericht über das »Tierreich«. XL–XLIV.

Hesse, Bericht über das Tierreich und den Nomenclator animalium generum et subgenerum. LXV–LXVI.
—, Die Stufenleiter der Organisationshöhe der Tiere. 1. 27–36.
Heymann, Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Jahrestages König Friedrichs II.: Das friderizianische Handelsrecht. XVII–XXXIX.
Heyting, A., Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. 686.
—, Di formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. 686.
Hofmann, Joh. Bapt., erhält die silberne Leibniz-Medaille. CXXIV–CXXV.
Hofmann, Karl Andreas, Beiträge zur Kenntnis des Schwarzpulvers. 507. 509–515.
Hoheisel, Guido, Über das Verhalten des reziproken Wertes der Riemannschen ζ-Funktion. 37. 219–223.
—, Zur Theorie der komplexen Zahlen. 508. 524–531.
—, Nullstellenanzahl und Mittelwerte der Zetafunktion. 687.
Hopf, Eberhard, Über die geschlossenen Bahnen der Mondtheorie. 365. 401–413.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik: Bericht über dasselbe, von Planck. LXXXV–LXXXVI. — Veröffentlichung. 8.
Johnsen, Über den β-Salmiak und verwandte Kristallarten. 270. 492–505.
Junkers, Hugo, in Dessau, zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 17. Januar 1929. 8.
Keibel, Franz, gestorben am 27. April 1929. CVII.
—, Gedächtnisrede auf ihn, von Fick. CVII–CXXII.
Koebe, Paul, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen (4. Mitteilung). 366. 414–457.
von Kries, Johannes, gestorben am 30. Dezember 1928. 8.
Kronecker-Kommission: Bericht derselben, von Bieberbach. LXXXIV. — Veröffentlichung. 486.
Krüger. Paul, Über die Verdauungsfermente der Wirbellosen. 507. 548–564.
Krusch, Bruno, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 29. November 1929. 683. 685.
Küstner, Friedrich, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 15. Mai 1929. 241. 242–243.
Landau, Edmund, Bemerkungen zu einer Arbeit von Hrn. Hoheisel über die Zetafunktion. 270. 271–275.
von Laue, Über eine röntgenographische Methode, Größe und Form ultramikroskopischer krystalliner Teilchen zu bestimmen. 226. 227–228.
Lehmann, Max, gestorben am 8. Oktober 1929. 487.
Leibniz: Bericht über die Ausgabe seiner Werke, von Heinrich Maier. LXVIII. — Geldbewilligung. 253.
Leibniz-Medaillen: Verleihung derselben. CXXIII–CXXVI.
Levi-Civita, Tullio, in Rom, zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 31. Oktober 1929. 534.
—, Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen. 124. 137–153.
Liebmann, Heinrich, Elementarer Beweis des Fenchelschen Satzes über die Krümmung geschlossener Raumkurven. 365. 392–393.
Ludendorff, Untersuchungen über die δ Cephei-Sterne. 63. 64–95.
—, Über den sogenannten 61 Cygni-Sternstrom. 226. 229–239.
Lüders, Ansprachen, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages. XCIII–XCIX.
Marcks, Bericht über das Deutsche Biographische Jahrbuch. XCI.
Marx, A., Zwei Sätze über schlichte Abbildungen. 13. 96–100.
Mathematik: Bericht über die Herausgabe der Werke von Weierstrass, von Planck. LXIV. — Bericht der Kronecker-Kommission, von Bieberbach. LXXXIV. — Veröffentlichung derselben. 486. — Bericht über das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, von Planck. LXXXV–LXXXVI. — Veröffentlichung desselben. 8. — Veröffentlichung der Enzyklopädie der mathemathischen Wissenschaften. 8. — Geldbewilligung für die Weierstrass-Kommission. 186. — Geldbewilligung für die Berliner Mathematische Gesellschaft. 186. — Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete (Dritte Mitteilung), von G. Pólya. 1. 55–62. — Divergente Reihen und singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen, von Georg D. Birkhoff. 13. 171–183. — Zwei Sätze über schlichte Abbildungen, von A. Marx. 13. 96–100. — Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, von Constantin Carathéodory. 37. 38–54. — Über das Verhalten des reziproken Wertes der Riemannschen ζ-Funktion, von Guido Hoheisel. 37. 219–223. — Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendung auf Irreduzibilitätsfragen, von Schur. I. 124. 125–136. II. 365. 370–391. — Über den Millouxschen Satz, von Erhard Schmidt.

244. — Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre, von Study. 254. 255–267. — Bemerkungen zu einer Arbeit von Hrn. Hoheisel über die Zetafunktion, von Edmund Landau. 270. 271–275. — Über Schwankungen analytischer Funktionen, die gegebene Werte nicht annehmen, von Alexander Ostrowski. 270. 276–287. — Elementarer Beweis des Fenchelschen Satzes über die Krümmung geschlossener Raumkurven, von Heinrich Liebmann. 365. 392–393. — Zur Partition der Zahlen, von Theodor Vahlen. 365. 394–400. — Über die geschlossenen Bahnen der Mondtheorie, von Eberhard Hopf. 365. 401–413. — Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen (4. Mitteilung), von Paul Koebe. 366. 414–457. — Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe, von Richard Brauer. 507. 626–638. — Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen (*Abh.*), von C. F. Siegel. 508. — Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen, von Bieberbach und Schur. 508. — Zur Theorie der komplexen Zahlen, von Guido Hoheisel. 508. 524–531. — Über die Ableitung einer meromorphen Funktion, von Egon Ullrich. 508. 592–605. — Über ganze transzendente Funktionen von einem besonderen Typus (Beispiel einer allgemeinen Konstruktionsmethode), von Harald Bohr. 508. 565–571. — Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen, von M. J. Belinfante. 508. 639–660. — Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen, von Bieberrbach. 611. 612–619. — Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen. 611. 620–623. — Unverbiegbare offene Flächen, von E. Rembs. 686. — Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, von A. Heyting. 686. — Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, von A. Heyting. 686. — Nullstellenanzahl und Mittelwerte der Zetafunktion, von Guido Hoheisel. 687.

Mathematische Gesellschaft, Berliner: Geldbewilligung für den Druck der Denkschrift über Joh. Heinr. Lambert. 186.

Meise, Wilhelm, Geldbewilligung an ihn für Studien über die Aaskrähe. 186.

Meteorologie: Der Sturm in Norddeutschland am 4. Juli 1928, von von Ficker. 288. 290–326.

von Miller, Oskar, in München, zum Ehrenmitglied ernannt am 27. April 1929. 225.

Mineralogie: Über den β-Salmiak und verwandte Kristallarten, von Johnsen. 270. 492–505.

Nernst, Über die wissenschaftliche Charakteristik der bisher benutzten Lautsprechersysteme. 13.

—, Über einige akustische Versuche, welche die getreue Übertragungsmöglichkeit sehr hoher und sehr tiefer Töne auf elektrischem Wege betreffen. 253.

Nomenclator animalium generum et subgenerum: Bericht über denselben, von Hesse. LXV–LXVI. — Veröffentlichung. 185. 486. — Geldbewilligung. 487.

Ostrowski, Alexander, Über Schwankungen analytischer Funktionen, die gegebene Werte nicht annehmen. 270. 276–287.

Ostwald, Wilhelm, Grundsätzliches zur messenden Farbenlehre. 13. 14–26.

Palaeontologie: Zentren der Tierverbreitung, von Pompeckj. 225.

Pappenheim, Geldbewilligung an ihn für Untersuchungen an Salmoniden der Alpengewässer. 487.

Paschen, Lymans Heliumlinien. 661. 662–666.

Penck, Über den Gebirgsbau des Fernen Westens Nordamerikas. 101.

—, Geomorphologische Probleme im Fernen Westen Nordamerikas. 185. 187–218.

Pflanzenreich: Bericht über dasselbe, von Engler. LXVI.

Physik: Atomumwandlungen und ihre Bedeutung für Chemie und Physik, von Hahn. LII–LX. — Zur einheitlichen Feldtheorie, von Einstein. 1. 2–7. — Über die Potentialdifferenz verdünnter Lösungen, von Planck. 8. 9–11. — Über die wissenschaftliche Charakteristik der bisher benutzten Lautsprechersysteme, von Nernst. 13. — Grundsätzliches zur messenden Farbenlehre, von Wilhelm Ostwald. 13. 14–26. — Über einheitliche Interpretation von Gravitation und Elektrizität, von Einstein. 102. — Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen, von Tullio Levi-Civita. 124. 137–153. — Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip, von Einstein. 154. 156–159. — Über die Rolle der Elektrizitätsträger bei der Explosion brennbarer Gase im Gemische mit Luft, von Haber. 161. 162–170. — Über eine röntgenographische Methode, Größe und Form ultramikroskopischer krystalliner Teilchen zu bestimmen, von von Laue. 226. 227–228. — Über einige akustische Versuche, welche die getreue Übertragungsmöglichkeit sehr hoher und sehr tiefer Töne auf elektrischem Wege betreffen, von Nernst. 253. — Die radioaktiven Substanzen im Dienste chemischer und physikalisch-chemischer Forschung, von Hahn. 533. 535–542. — Lymans Heliumlinien, von Paschen. 661. 662–666. — Verwaschene Eigenwertspektra, von Schrö-

DINGER. 667. 668–682. — Die Kompatibilität der Feldgleichungen in der einheitlichen Feldtheorie, von EINSTEIN. 683. — Neuere Fortschritte und Probleme der technischen Akustik, von WAGNER. 686.

Physiologie: Alte und neue Irrwege auf dem Gebiete der Volksernährung, von RUBNER. 254. 343–363.

PLANCK, Bericht über die Herausgabe der Werke von WEIERSTRASS. LXIV.

—, Bericht über das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. LXXXV–LXXXVI.

—, Erwiderung auf die Antrittsrede von SCHRÖDINGER. CII–CIV.

—, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 28. Juni 1929. 289. 341–342.

—, Über die Potentialdifferenz verdünnter Lösungen. 8. 9–11.

PÓLYA, G., Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. (Dritte Mitteilung.) 1. 55–62.

POMPECKJ, Zentren der Tierverbreitung. 225.

Preisaufgabe, akademische, für 1929. CXXII–CXXIII.

REMBS, E., Unverbiegbare offene Flächen. 686.

RHUMBLER, LUDWIG, in Hann.-Münden, zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 31. Oktober 1929. 534.

ROEDER, GÜNTHER, erhält die silberne LEIBNIZ-Medaille. CXXV.

RUBNER, Alte und neue Irrwege auf dem Gebiete der Volksernährung. 254. 343–363.

RUMP, siehe WARBURG.

SCHÄFER, DIETRICH, gestorben am 12. Januar 1929. 8.

—, Gedächtnisrede auf ihn, von BRACKMANN. CIV–CVII.

SCHMIDT, ADOLF, in Gotha, zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 17. Januar 1929. 8.

SCHMIDT, ERHARD, Über den MILLOUXschen Satz. 244.

SCHMIDT, MARTIN, Neue Funde in der iberisch-balearischen Trias. 507. 516–523.

SCHMIEDEKNECHT, OTTO, Geldbewilligung an ihn für die Fortführung der Opuscula Ichneumonologica. 186. 487.

SCHRÖDINGER, zum ordentlichen Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse ernannt am 12. Februar 1929. 101.

—, Antrittsrede. Erwiderung von PLANCK. C–CIV.

—, Verwaschene Eigenwertspektra. 667. 668–682.

SCHUR, Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendung auf Irreduzibilitätsfragen. I. 124. 125–136. II. 365. 370–391.

—, siehe BIEBERBACH.

SCHURMAN, JACOB GOULD, in Berlin, zum Ehrenmitglied ernannt am 11. Dezember 1929. 684.

SCHWEITZER, ALBERT, in Lambarene, zum Ehrenmitglied ernannt am 2. Juli 1929. 289.

SIEGEL, C. L., Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen (*Abh.*). 508.

SPEMANN, HANS, in Freiburg i. B., zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-mathematischen Klasse gewählt am 7. Februar 1929. 38.

STUDNICZKA, FRANZ, gestorben am 4. Dezember 1929. 684.

STUDY, EDUARD, Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre. 254. 255–267.

STUMPF, JOHANNES, Über Dampfinjektoren im allgemeinen und über umstellbare Injektorbauart im besonderen. 573.

Technik: Über die wissenschaftliche Charakteristik der bisher benutzten Lautsprechersysteme, von NERNST. 13. — Plan einer Fernsprechkabelverbindung zwischen Europa und Amerika, von WAGNER. 109–121. — Besonderes vom Knicken, von ZIMMERMANN. 244. 245–251. — Einige akustische Versuche, welche die getreue Übertragungsmöglichkeit sehr hoher und sehr tiefer Töne auf elektrischem Wege betreffen, von NERNST. 253. — Über Dampfinjektoren im allgemeinen und über umstellbare Injektorbauart im besonderen, von JOHANNES STUMPF. 573. — Neuere Fortschritte und Probleme der technischen Akustik, von WAGNER. 686.

THURNEYSEN, RUDOLF, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 17. September 1929. 486. 490–491.

Tierreich: Bericht über dasselbe, von HESSE. XL–XLIV. LXV–LXVI. — Veröffentlichung. 241. 611.

Todesanzeigen: JOHANNES VON KRIES. 8. — DIETRICH SCHÄFER. 8. — WILHELM VON BODE. 123. — FRANZ KEIBEL. CVII. — KARL Frhr. AUER VON WELSBACH. 487. — RUDOLF EUGEN GEYER. 487. — MAX LEHMANN. 487. — BERNHARD VON BÜLOW. 534. — FRANZ STUDNICZKA. 684.

ULLRICH, EGON, Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. 508. 592–605.

VAHLEN, THEODOR, Zur Partition der Zahlen. 365. 394–400.

WAGNER, Plan einer Fernsprechkabelverbindung zwischen Europa und Amerika. 109–121.

—, Neuere Fortschritte und Probleme der technischen Akustik. 686.

LE JL 32

Wahl ordentlicher Mitglieder: Schrödinger. 101.

Wahl von Ehrenmitgliedern: Oskar von Miller. 225. — Albert Schweitzer. 289. — Jacob Gould Schurman. 684.

Wahl korrespondierender Mitglieder: Adolf Schmidt. 8. — Hugo Junkers. 8. — Hans Spemann. 38. — Wladimir Beneschewitsch. 241. — Sir William Bragg. 534. — Max Born. 534. — James Franck. 534. — Ludwig Rhumbler. 534. — Egbertus Brouwer. 534. — Tullio Levi-Civita. 534. — Godfrey Harald Hardy. 534.

Warburg, Über die Photolyse der Lösungen von Schwefelwasserstoff in Hexan und in Wasser. Nach Versuchen mit Dr. Rump. 507. 623–624.

Weierstrass, Bericht über die Herausgabe seiner Werke, von Planck. LXIV. — Geldbewilligung. 186.

Wentzcke, Paul, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CXXIV.

Wentzel-Heckmann-Stiftung: Bericht des Kuratoriums. LXXXVI–XCII.

Wirtz, C., Experimentelles zur Photometrie des Rotationsellipsoids. 573. 574–591.

von Zallinger, Otto, Adresse an ihn zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 20. Oktober 1929. 534. 546–547.

Zimmermann, Besonderes vom Knicken. 244. 245–251.

Zoologie: Bericht über das »Tierreich«, von Hesse. XL–XLIV. — Bericht über das Tierreich und den Nomenclator animalium generum et subgenerum, von Hesse. LXV–LXVI. — Veröffentlichung des Nomenclator. 185. 486. — Veröffentlichung des »Tierreich«. 241. 611. — Geldbewilligung an Wilhelm Meise für Studien über die Aaskrähe. 186. — Geldbewilligung für das Nomenclator animalium. 487. — Geldbewilligung an Otto Schmiedeknecht. 186. 487. — Geldbewilligung an Pappenheim. 487. — Geldbewilligung an Blüthgen. 487. — Die Stufenleiter der Organisationshöhe der Tiere, von Hesse. 1. 27–36. — Zentren der Tierverbreitung, von Pompeckj. 225. — Über die Verdauungsfermente der Wirbellosen, von Paul Krüger. 507. 548–564.

Ausgegeben am 3. Februar 1930.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

§ 17.

Eine für die akademischen Schriften bestimmte wissenschaftliche Mitteilung darf in keinem Falle vor ihrer Ausgabe an jener Stelle anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Sollte eine dem zuwiderlaufende Veröffentlichung dem redigierenden Sekretar vor der Ausgabe in den akademischen Schriften zur Kenntnis kommen, so hat er die Mitteilung aus diesen zu entfernen.

Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilung dieselbe anderweitig früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies nach den geltenden Rechtsregeln zusteht, so bedarf er dazu der Einwilligung der Gesamtakademie.

Gedächtnisreden anderweitig zu veröffentlichen, ist den Verfassern unbeschränkt gestattet.

Aus § 21.

Die Sitzungsberichte erscheinen in einzelnen Stücken in der Regel Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.

Aus § 22.

Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mitteilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

Hinter den Titeln der wissenschaftlichen Mitteilungen folgen in dieser Übersicht kurze Inhaltsangaben derselben, welche die Verfasser einreichen, und für welche sie verantwortlich sind. Diese Inhaltsangaben sollen sich in der Regel auf 5—6 Druckzeilen beschränken, keinesfalls 10 Zeilen überschreiten.

Die nicht in den Schriften der Akademie erscheinenden Mitteilungen werden mit vorgesetztem Stern bezeichnet, bei den für die Abhandlungen bestimmten wird »(Abh.)« zugefügt.

Wissenschaftliche Mitteilungen fremder Verfasser werden in dem Bericht über diejenige Sitzung aufgeführt, in welcher deren Aufnahme in die akademischen Schriften endgültig beschlossen wird.

Aus § 27.

Das Manuskript einer in einer akademischen Sitzung am Donnerstag zur Aufnahme in die Sitzungsberichte zugelassenen Mitteilung, welche am nächsten Donnerstag gedruckt erscheinen soll, muß der Regel nach in der Sitzung selber, spätestens bis Freitag 10 Uhr morgens, dem redigierenden Sekretar oder der Reichsdruckerei druckfertig zugestellt werden. Später eingereichte Manuskripte werden, mit dem Präsentationsvermerk des redigierenden Sekretars oder des Archivars versehen, für ein späteres Stück zurückgelegt.

Dasselbe kann von vornherein mit Mitteilungen geschehen, deren Satz aus irgendwelchen Gründen besondere Schwierigkeiten erwarten läßt, oder welche den in den §§ 3 und 4 enthaltenen Bestimmungen nicht entsprechen.

Die Reichsdruckerei sendet die Korrekturen an das Bureau der Akademie, das sie an die Verfasser oder an die Mitglieder, welche die Mitteilung vorgelegt haben, weiterreicht. Die Verfasser schicken die Korrekturabzüge nach Berichtigung an das Bureau der Akademie zurück und erhalten und erledigen auf dem gleichen Wege auch die etwa erforderlichen weiteren Korrekturen. Wird die Korrektur länger als bis Dienstag Abend von der damit betrauten Person behalten, so hat diese es zu verantworten, wenn die Mitteilung in einem späteren Stück erscheint.

Nach auswärts werden Korrekturen nur auf Verlangen versandt; die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mitteilung nach acht Tagen. Fremden Verfassern, deren Korrekturen erst noch dem vorlegenden Mitgliede zur Revision unterbreitet werden müssen, kann das Erscheinen am nächsten Ausgabetage überhaupt nicht zugesichert werden.

Aus § 36.

Die Akademie behält sich das Recht vor, von einer vergriffenen Abhandlung eine zweite Auflage zu veranstalten.

Abhandlungen der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Jahrgang 1926	ℳ	5.—
» 1927	»	8.50
» 1928	»	1.50

Einzelne Abhandlungen aus den Jahren 1921—1927

Hellmann: Die Meteorologie in den deutschen Flugschriften und Flugblättern des XVI. Jahrhunderts. Ein Beitrag zur Geschichte der Meteorologie (1921, 1)	ℳ	5.—
Fick: Über die Entstehung der Gelenkformen. Mit Tierversuchen (1921, 2)	»	2.—
Rubner: Über die Wasserbindung in Kolloiden mit besonderer Berücksichtigung des quergestreiften Muskels (1922, 1)	»	4.—
Hellmann: Versuch einer Geschichte der Wettervorhersage im XVI. Jahrhundert (1924, 1)	»	3.—
K. Bopp: Leonhard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel (1924, 2)	»	4.—
Fick: Einiges über Vererbungsfragen (1924, 3)	»	2.50
D. Mahnke: Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis (1925, 1)	»	11.—
Hellmann: Die Entwicklung der meteorologischen Beobachtungen in Deutschland von den ersten Anfängen bis zur Einrichtung staatlicher Beobachtungsnetze (1926, 1)	»	3.50
Hellmann: Die Entwicklung der meteorologischen Beobachtungen bis zum Ende des XVIII. Jahrhunderts (1927, 1)	»	7.—

Die Preise verstehen sich in Reichsmark.

Sitzungsberichte der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Preis des Jahrgangs . . . . . *RM* 20.—

Sonderabdrucke. I. Halbjahr 1929

K. F. Bonhoeffer und P. Harteck: Experimente über Para- und Orthowasserstoff . . . . . *RM* 1.—
Wagner: Plan einer Fernsprechkabelverbindung zwischen Europa und Amerika . . . . . » 1.—
Schur: Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. I . . . . . » 1.—
T. Levi-Civita: Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen . . . » 2.—
Einstein: Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip . . . . . » 1.—
Haber: Über die Rolle der Elektrizitätsträger bei der Explosion brennbarer Gase im Gemische mit Luft . . . . . » 1.—
G. D. Birkhoff: Divergente Reihen und singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen . » 1.—
Penck: Geomorphologische Probleme im Fernen Westen Nordamerikas . . . . . » 2.—
G. Hoheisel: Über das Verhalten des reziproken Wertes der Riemannschen ζ-Funktion . . . . » 1.—
Ludendorff: Über den sogenannten 61 Cygni-Sternstrom . . . . . » 1.—
Zimmermann: Besonderes vom Knicken . . . . . » 1.—
Study: Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre . . . . . » 1.—

Sonderabdrucke. II. Halbjahr 1929

Landau: Bemerkungen zu einer Arbeit von Hrn. Hoheisel über die Zetafunktion . . . . . *RM* 1.—
A. Ostrowski: Über Schwankungen analytischer Funktionen, die gegebene Werte nicht annehmen » 1.—
v. Ficker: Der Sturm in Norddeutschland am 4. Juli 1928 . . . . . » 2.50
Haberlandt: Über Regenerationsvorgänge bei *Bryopsis* und *Codium* . . . . . » 1.—
Rubner: Alte und neue Irrwege auf dem Gebiete der Volksernährung . . . . . » 2.—
Schur: Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen. II . . . . » 2.—
Th. Vahlen: Zur Partition der Zahlen . . . . . » 1.—
E. Hopf: Über die geschlossenen Bahnen in der Mondtheorie . . . . . » 1.—
Koebe: Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Vierte Mitteilung: Verlauf geodätischer Linien) . . . . . » 2.50
Fick: Über die Arbeitsleistung der Schultergelenkmuskeln (hierzu Taf. I—X) . . . . . » 2.—
Johnsen: Über den β-Salmiak und verwandte Kristallarten (hierzu Taf. XI) . . . . . » 1.—
Hofmann: Beiträge zur Kenntnis des Schwarzpulvers . . . . . » 1.—
M. Schmidt: Neue Funde in der iberisch-balearischen Trias . . . . . » 1.—
G. Hoheisel: Zur Theorie der komplexen Zahlen . . . . . » 1.—
Hahn: Die radioaktiven Substanzen im Dienste chemischer und physikalisch-chemischer Forschung » 1.—
P. Krüger: Über die Verdauungsfermente der Wirbellosen . . . . . » 2.—
H. Bohr: Über ganze transzendente Funktionen von einem besonderen Typus. (Beispiel einer allgemeinen Konstruktionsmethode) . . . . . » 1.—
C. Wirtz: Experimentelles zur Photometrie des Rotationsellipsoids . . . . . » 2.—
E. Ullrich: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion . . . . . » 2.—
Bieberbach: Über die topologischen Typen der offenen Euklidischen Raumformen . . . . . » 1.—
Bieberbach: Über schlichte Abbildungen des Einheitskreises durch meromorphe Funktionen . . » 1.—
R. Brauer: Die stetigen Darstellungen der komplexen orthogonalen Gruppe . . . . . » 1.—
M. J. Belinfante: Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen . . . . . » 2.—
Paschen: Lymans Heliumlinien . . . . . » 1.—
Schrödinger: Verwaschene Eigenwertspektra . . . . . » 2.—

Die Preise verstehen sich in Reichsmark

Ein systematisches Gesamtverzeichnis der noch lieferbaren Sonderdrucke kann durch den Verlag Walter de Gruyter u. Co., Berlin W 10, Genthiner Str. 38, bezogen werden.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01298 9950